Klausur Digitale Signalverarbeitung[1]
bei Prof. Wendemuth
vom 09.02.2007

Aufgabe 1) z-Transformation

1.) Beweisen Sie durch zeitliche Inversion $x[-n]$ und anschließender Verschiebung zu $x[m-n]$ folgende Aussage:

$$Z\{x[m-n]\} = z^{-m}X(\frac{1}{z})$$

2.) Führen Sie die inverse z-Transformation für

$$E(z) = \frac{z}{z-a}$$

im Bereich von $(i)|z| > |a|$ und $(ii)|z| < |a|$ mittels Residuensatz durch. Nutzen sie dabei z bzw. $1/z$ um an geeigneter Stelle Rechenaufwand zu sparen.

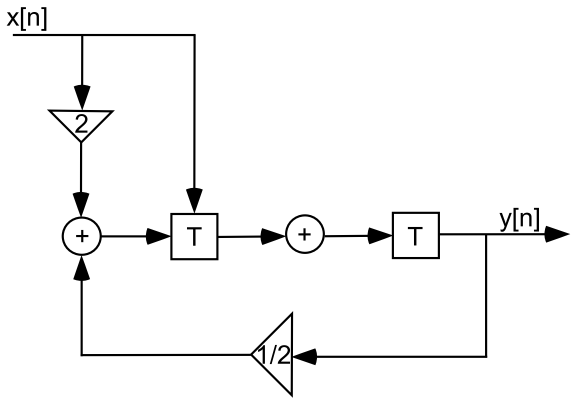
3.) Führen Sie die z-Transformation von

$$G(z) = \frac{z}{(z-a)^2}$$

im Bereich $(i)|z| > |a|$ und $(ii)|z| < |a|$ durch. Nutzen Sie dabei die Ableitung aus 1.2 von $E(z)$ nach a.
Hinweis: Die Ableitung und inverse Transformation sind linear.

[1] Klausur wird eingesammelt, nur aus dem Gedächtnis wiedergegeben

Aufgabe 2) Systemanalyse
Das folgende Bild zeigt ein digitales Filter. Alle "inneren" Größen nach dem Verzögerungsglied waren Null zum Zeitpunkt $t = 0$.



1.) Wie lautet die Differenzengleichung des Filters?

2.) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Schema.

3.) Berechnen Sie die Impulsanwort $h(n)$ durch inverse z-Transformation aus $H(z)$. Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung und ggf. den Verschiebungssatz der z-Transformation.

4.) Die Impulsantwort lässt sich bekanntlich auch im Zeitbereich bestimmen. Womit muss das System im Zeitbereich angeregt werden, um am Ausgang die Impulsantwort zu erhalten?

5.) Regen Sie das System wie in 2.4 genannt an. Welche rekursive Gleichung ergibt sich dann direkt aus der Differenzengleichung, die in 2.1 genannt wurde?

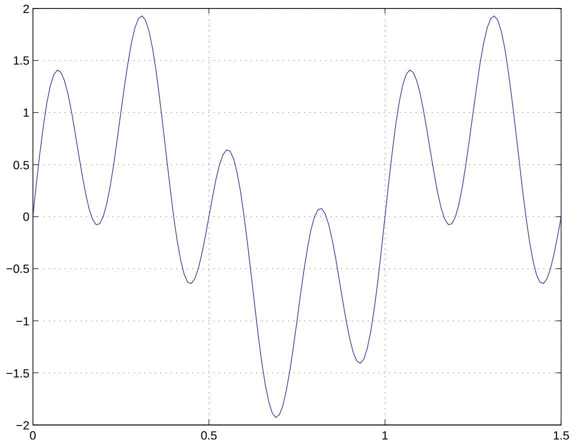
6.) Bestimmen Sie mit Hilfe der rekursiven Gleichung aus 2.5 die ersten 3 Werte der Impulsantwort $h(n)$. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis identisch mit den Werten gemäß dem Ergebnis aus Aufgabe 2.3 ist. Wenn nicht, haben Sie damit eine Probe auf eventuelle Fehler.

7.) Ist das System a) stabil, b) minimalphasig, c) kausal, d) allpasshaltig, e) einen Allpass? Begründen Sie!

8.) Die Eingangsfolge $x(n)$ entstand durch Abtastung eines an analogen Signals mit der (bekannten) Abtastzeit T. Bis zu welcher Kreisfrequenz $\omega = \omega(T)$ kann das System eingesetzt werden, so dass das analoge Signal ohne Informationsverlust rekonstruiert werden kann (Begründung)?

9.) Wir betrachten die Kreisfrequenzen ω und setzen $\varphi = \omega T$. Berechnen und skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems für $\varphi = -\pi \ldots \pi$. Wie verhält sich der Amplitudengang außerhalb des φ-Intervalls? Handelt es sich bei dem System um einen a) Hochpass, b) Tiefpass, c) Bandpass, d) Allpass?

Aufgabe 3) Abtastung und Rekonstruktion



1.) Im Bild ist etwas mehr als eine Periode eines Signals dargestellt. Tasten Sie es mit $f_{a1} = 5$Hz und mit $f_{a2} = 10$Hz ab. Die erste Abtastung soll bei $t = 0$ erfolgen. Tragen Sie die Werte in das Diagramm ein.

2.) Die Abtastwerte werden mit einem zunächst noch unbestimmten Fenster $p(t)$ gewichtet. Geben Sie die *allgemeine* Formel für das rekonstruierte Signal $x(t)$ mit Hilfe des Rekonstruktionssatzes an. Die Formel für den *wahren* Signalverlauf ist durch scharfes Hinschauen ermittelbar, geben Sie sie an. Falls Sie nichts sehen, benutzen Sie den gerade hingeschriebenen Rekonstruktionssatz für dieses spezielle Beispiel.

3.) Die erste Abtastung soll bei $t = 0$ erfolgen, es soll ein Fenster der Fenster der Breite $T = 1$ gewählt werden. Bestimmen Sie mit der Rekonstruktionsformel, die sie in 3.2 bestimmt haben, den rekonstruierten Wert $x(t = 0.28)$ *für beide Abtastfrequenzen* bei Anwendung eines Rechteckfensters mit Fensterbreite T.

4.) Vergleichen Sie für beide Abtastfrequenzen jeweils die zwei Werte
a) nach Rekonstruktion mit Rechteckfenster
b) nach obigem Bild (der reale Wert) bzw. nach der Formel für den wahren Signalverlauf nach 3.2, wenn vorhanden.
Erläutern Sie die Abweichung und geben Sie an, was “falsch gemacht” wurde.

Aufgabe 4) Modellsysteme
Folgende Systemgleichung ist gegeben (alle Größen für $t \leqq 0$ sind Null):
$x[n] = q[n] - 1/2x[n-1] + 1/4x[n-2]$ $(q[n] Anregung)$.

1.) Regen Sie das System mit $q[n] = \delta[n]$ an und berechnen Sie die ersten 4 Folgeglieder.

2.) Runden Sie Ihre Ergebnisse aus 4.1 auf Vielfache von 0.5. Sollten Sie nicht runden müssen, überprüfen Sie ihre Ergebnisse.

3.) Berechnen Sie den konstistenten Schätzer für $N = 4$.

4.) Bestimmen Sie die Koeffizienten mittels Matrixinversion oder Levinson-Durbin-Methode für das System 2. Ordnung. Dabei können Sie folgende Gleichung nutzen:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5.) Vergleichen Sie die Koeffizienten aus dem Original und den gerundeten erhaltenen Werten.

6.) Geben Sie die Gleichung des realen Übertragungssystems und des AR-Systems an. Sind diese stabil?

7.) Weshalb treten Unterschiede auf, spielen dabei
a) die Form der Systemgleichung
b) die Anregung
c) die Anzahl der Folgeglieder
d) die Länger der Summe für den konsistenten Schätzer
eine Rolle?

Alle Antworten sind mit Begründung und Rechenweg anzugeben. Formeln, die Sie einfach hinschreiben, müssen Sie kommentieren: aus der Vorlesung, auswendig gelernt.