EE02 - Wechselstromkreis

Tillmann Mühlpfordt

7. Februar 2010

Die folgenden Lösungen zu den Studienkontrollfragen des Praktikumsversuches *Wechselstromtechnik* sollen bei der Vorbereitung auf selbigen helfen. Es wird Wert darauf gelegt, die qualitativen Verläufe zu verstehen, da es sich bei den quantitativen nur um des Einsetzen der gegebenen Werte handelt. Oftmals sind ausführlichere Lösungswege angegeben als nötig, aber mir persönlich fiel es leichter, beispielsweise den Schaltvorgang am Kondensator zu verstehen, wenn ich wusste, woher die spezifischen Formeln kommen, die das Verhalten von Strom und Spannung beschreiben.
Meiner Meinung nach sind die *Z-Verläufe*, *Schaltvorgänge* und *qualitativen Zeigerdiagramme* am wichtigsten.
Grundsätzlich gilt im Folgenden, was auch in der Vorlesung vereinbart wurde: Kleinbuchstaben repräsentieren *zeitlich veränderliche Größen*, während Großbuchstaben für *zeitlich unabhängige Größen* stehen. *Zeiger* werden durch Unterstreichung gekennzeichnet.
Für jegliche Rückfragen, Hinweise, Kritik oder Anmerkungen stehe ich per E-Mail an zur Verfügung: *tillmann.muehlpfordt@st.ovgu.de*

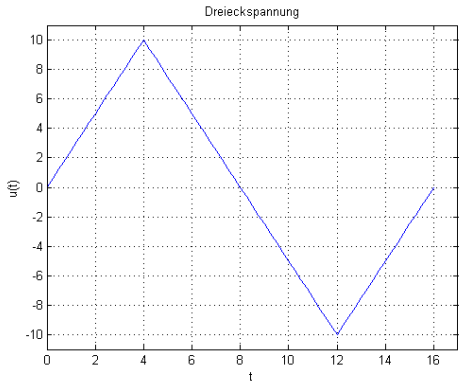
Ich wünsche schon jetzt viel Erfolg beim Praktikum und hoffe, dass die Lösungen weiterhelfen.

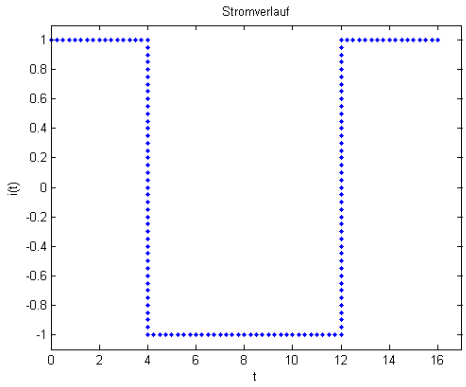
1 Kondensator an dreieckförmiger Spannung

Der Stromfluss im Kondensator hängt von der zeitlichen Änderung der Spannung ab. Dieser Zusammenhang wird über folgende Gleichung beschrieben:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Der Stromvelauf kann einerseits durch Ableiten und andere mathematische Verfahren ermittelt werden. Es ist aber sicherlich einfacher und schneller, sich den Spannungsverlauf einmal genau anzusehen. Bei einer dreieckförmigen Wechselspannung gilt, dass der *Anstieg in jedem Abschnitt betragsmäßig gleich und* ***konstant*** *ist*. Jeder Abschnitt des Spannungsverlaufes kann durch eine lineare Funktion beschrieben werden, deren zeitliche Ableitung, wie bereits erwähnt, *konstant* ist. Es kann sich also nur ein betragsmäßig konstanter Stromverlauf ergeben. Da der Anstieg jedoch einmal positiv und einmal negativ auftritt, ergeben sich also *zwei konstante Stromverläufe*. An den Spannungsmaxima tritt theoretisch ein 'Stromsprung' in entgegengesetzter Richtung ein. Dass dies nur eine modellhafte Annahme ist, sollte klar sein.





2 Impedanz bei Reihenschaltung

2.1 Ohmscher Widerstand und Spule

$$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_{X_L}, \quad \underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = R + j\omega L$$

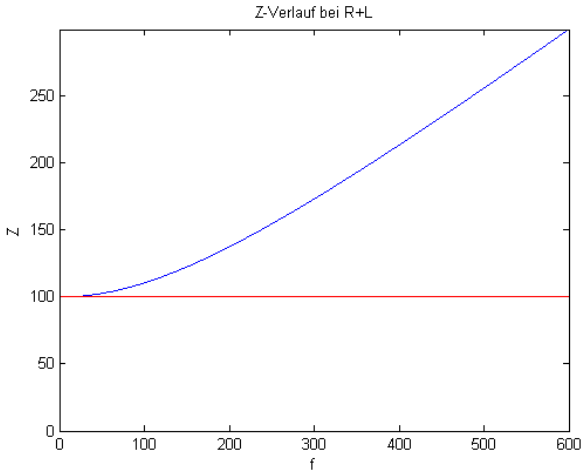
$$\boxed{|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (2\pi L)^2 \cdot f^2}}$$

Durch Frequenzänderung ändert sich das Induktionsverhalten der Spule:

$$X_L \sim f,$$

so dass der Einfluss der Spule auf Z mit größerem f steigt. Es gilt

$$\lim_{f \to 0} Z = R \quad .$$



2.2 Ohmscher Widerstand und Kondensator

$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_{X_C}, \quad \underline{U} = R\underline{I} - \frac{j}{\omega C}\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$

$$\boxed{|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega C}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \cdot \frac{1}{f^2}}}$$

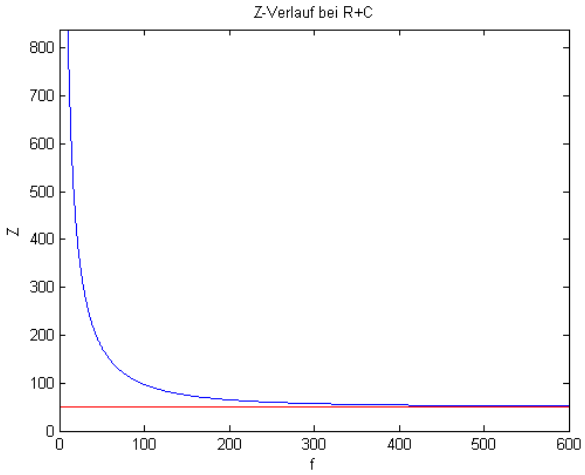
Durch Frequenzänderung ändert sich das Verhalten des Kondensators:

$$X_C \sim \frac{1}{f},$$

so dass der Einfluss bei hohen Frequenzen verschwindet. Es gilt

$$\lim_{f \to \infty} Z = R \quad .$$

Die beiden Diagramme geben den qualitativen Verlauf wieder.



3 Berechnung eine Wechselstromnetzwerkes

bei geöffnetem Schalter gilt:
$\underline{I} = \underline{I}_{R_1} = \underline{I}_{X_L}, \quad \underline{U} = R_1\underline{I} + j\omega L\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L$

$Re\{\underline{Z}_1\} = R_1 = 10\,\Omega \quad Im\{\underline{Z}_1\} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50Hz \cdot 0,1273H \approx 40\,\Omega$

bei geschlossenem Schalter gilt:

$$\underline{Z}_2 = R_1 + (\underline{X}_L || R_2) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \underline{X}_L}{R_2 + \underline{X}_L} = R_1 + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L}$$

$$\vdots$$

$$\underline{Z}_2 = R_1 + \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j \cdot \frac{R_2^2 \cdot \omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}$$

$Re\{\underline{Z}_2\} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \approx \underline{30\Omega} \quad Im\{\underline{Z}_2\} = \frac{R_2^2 \cdot \omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} \approx 20\,\Omega$

4 Unterschied zwischen idealer und technischer Spule

- Spule besteht aus gewickeltem Draht, welcher einen gewissen Widerstand aufweist $(R \sim l)$
- beim Fließen von I durch Spule wird ein Teil zum Aufbau des magnetischen Feldes benötigt, während der andere in Wärme umgewandelt wird
- durch Strom erzeugtes Magnetfeld wird durch ohmschen Widerstand begrenzt
- es handelt sich um denselben Strom, so dass eine technische Spule aus Reihenschaltung von R und L besteht

5 Impedanz bei Parallelschaltung

5.1 Ohmscher Widerstand und Spule

$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L, \quad \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L \quad \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{X}_L} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}$$

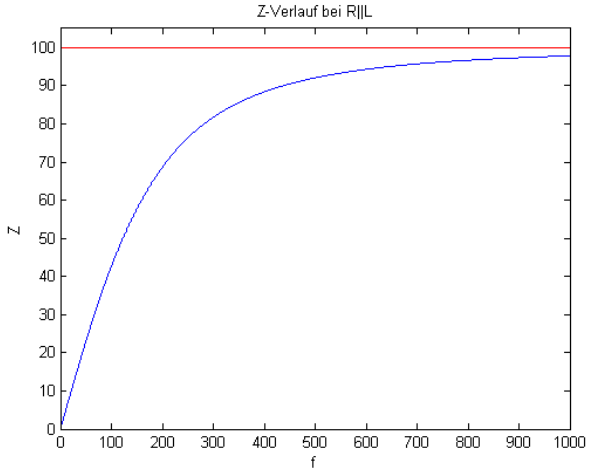
$$\boxed{|\underline{Z}| = Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}}}$$

Durch Frequenzänderung ändert sich das Induktionsverhalten der Spule, da

$$X_L \sim f,$$

so dass der Einfluss der Spule auf Z mit größerem f steigt. Es gilt hier

$$\lim_{f \to \infty} Z = R \quad .$$



Dieser Einfluss wird im nebenstehenden Diagramm deutlich, da die Spule bei hohen Frequenzen einen sehr hohen Widerstand hat und der Strom somit nahezu aussschließlich über R fließt. Bei sehr niedrigen Frequenzen wirkt die (ideale) Spule wie ein Draht. Da der Strom immer den *Weg des geringsten Widerstandes* wählt, fließt fast kein Strom über R.

5.2 Ohmscher Widerstand und Kondensator

$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_C, \quad \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C \quad \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{X}_L} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

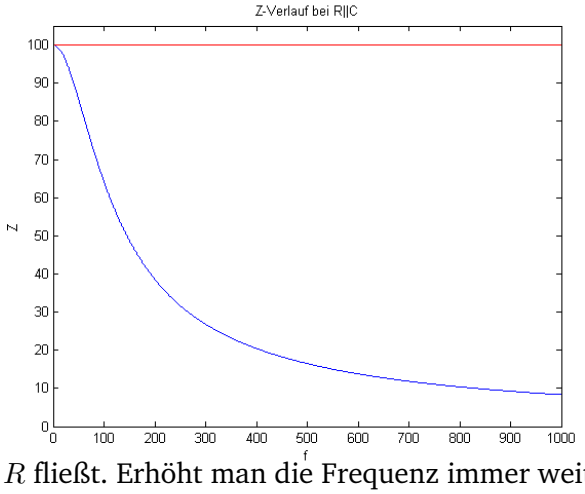
$$\boxed{|\underline{Z}| = Z = \left(\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}}$$

Durch Frequenzänderung ändert sich das Verhalten des Kondensators, da

$$X_C \sim \frac{1}{f},$$

so dass der Einfluss bei hohen Frequenzen verschwindet. Es gilt

$$\lim_{f \to 0} Z = 0 \quad .$$



Hier tritt das bei der Spule beschriebene Verhalten in umgekehrter Form auf: Der Kondensator ist bei kleinen Frequenzen ein sehr großer Widerstand, so dass der Strom fast ausschließlich über R fließt. Erhöht man die Frequenz immer weiter, sinkt der Wechselstromwiderstand des Kondensators, so dass der Strom erneut den *Weg des geringsten Widerstandes* wählt: den Kondensator, dessen Widerstand nahezu 0 ist.

6 Grenzwertbetrachung der Impedanz

Die Lösung kann durch geschicktes Überlegen zunächst schneller gefunden werden, denn eine (ideale) Spule stellt bei $f = 0\,Hz$ einen simplen (aufgewickelten) Draht dar, dessen Widerstand modellhaft als $R = 0\,\Omega$ angenommen wird. Betrachtet man nun das Schaltbild, so wird klar, dass bei diesem Sonderfall der Strom *ausschließlich* über R_1 fließt (Kurzschlussfall). Bei einer sehr hohen Frequenz stellt eine Spule einen eben so großen Widerstand dar, denn $X_L \sim f$, so dass sie nun wie eine Unterbrechung des Stromkreises wirkt und der Strom daher *ausschließlich* über R_1 und R_2 fließen muss, die nun eine Reihenschaltung darstellen. Dies soll nun mathematisch gezeigt werden.
Zuerst muss eine Gleichung für Z aufgestellt werden, wobei von der Zeigerdarstellung ausgegangen wird.

$$\underline{Z} = R_1 + (R_2 \parallel \underline{X}_L) = R_1 + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} = R_1 + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} \cdot \frac{R_2 - j\omega L}{R_2 - j\omega L}$$

$$= R_1 + \frac{jR_2^2\omega L + R_2(\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} = R_1 + \frac{R_2(\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j\left(\frac{R_2^2\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}\right)$$

Daraus kann nun der Betrag bestimmt werden, also Z:

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2(\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}\right)^2}$$

Nun kann die Grenzwertbetrachtung problemlos durchgeführt werden. Da $\omega = 2\pi f$, gilt

$$\lim_{f\to 0} Z(f) = \lim_{\omega\to 0} Z(\omega) = \lim_{\omega\to 0} \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2 \cdot 0}{R_2^2 + 0}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2 \cdot 0}{R_2^2 + 0}\right)^2} = R_1$$

$$\lim_{f\to \infty} Z(f) = \lim_{\omega\to \infty} Z(\omega) = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{\frac{R_2^2}{(\omega L)^2} + 1}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2}{\frac{R_2^2}{\omega L} + \omega L}\right)^2} = R_1 + R_2$$

Die Überlegungen finden in den mathematischen Ergebnissen also ihre Bestätigung.

7 Kapazitätsbestimmung für reellwertigen Scheinwiderstand

Damit $\varphi = 0°$ gilt, muss Z reellwertig sein, wofür wiederum gelten muss, dass $Im\{\underline{Z}\} = 0$. Diese Überlegung wird auch folgendermaßen klar:

$$\tan\varphi = \tan 0° = 0 = \frac{Im\{\underline{Z}\}}{Re\{\underline{Z}\}} \quad \Rightarrow \quad Im\{\underline{Z}\} = 0$$

$\underline{U}_C = \underline{U}_R + \underline{U}_L, \quad \underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_{RL}$

$$\underline{I} = \frac{U}{(-j)} \cdot \omega C + \frac{U}{R + j\omega L} = U \cdot \left(j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}\right)$$

mit $\underline{I}/U = 1/\underline{Z} = \underline{Y}$ und der Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl folgt, dass

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right).$$

Wenn nun $Im\{\underline{Z}\} = 0$, so gilt auch $Im\{\underline{Y}\} = 0$, also

$$0 = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{0,225H}{(70,7\Omega)^2 + (2\pi \cdot 50Hz \cdot 0,225H)^2} = 22,5\,\mu F$$

8 Schaltvorgang am Kondensator

Es sei hier nochmals *explizit* darauf hingewiesen, dass Kleinbuchstaben für *zeitlich veränderliche Größen* stehen, während Großbuchstaben *zeitlich unveränderlichen Größen* entsprechen.

8.1 Aufladevorgang

Allgemein bekannt sind folgende Zusammenhänge:

$$C = \frac{Q}{U}, \quad i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Bei der gegeben Anordnung handelt es sich um eine Reihenschaltung von R und C. Die Anwendung des Maschensatzes liefert hier, wobei der Index CA für 'Kondensator - Aufladevorgang' steht:

$$U_Q = u_R + u_{CA} = R \cdot i_A + u_{CA} = R\,C\,\frac{du_{CA}}{dt} + u_{CA}$$

Es handelt sich um eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*, auf die das Prinzip der *Trennung der Veränderlichen* angewendet werden kann. Daraus erhält man

$$\frac{1}{U_Q - u_{CA}}\,du_{CA} = \frac{1}{RC}\,dt.$$

Für folgende Berechnungen wird $\tau = RC$ als *Zeitkonstante* definiert. Außerdem bildet man das unbestimmte Integral über beiden Seiten.

$$\int \frac{1}{U_Q - u_{CA}}\,du_{CA} = \frac{1}{\tau}\int dt$$

Daraus erhält man

$$-ln(U_Q - u_{CA}) = \frac{t}{\tau} + K_1 \quad .$$

Zum Bestimmen der Konstante K_1 betrachtet man die Anfangsbedingung $u_{CA}(0) = 0$. Daraus ergibt sich

$$-ln(U_Q) = 0 + K_1 = K_1.$$

Einsetzen in die Lösung der sowie Teilen durch -1 DGL liefern

$$ln(U_Q - u_{CA}) - ln(U_Q) = ln\left(\frac{U_Q - u_{CA}}{U_Q}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad .$$

Das Umstellen nach u_{CA} liefert die gesuchte Gleichung

$$\frac{U_Q - u_{CA}}{U_Q} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Longleftrightarrow \quad u_{CA} = U_Q\,\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad .$$

Diese gewonnene Beziehung für die Aufladespannung hilft nun bei der Ermittlung des Ladestroms nach der Beziehung

$$i_{CA} = C \cdot \frac{du_{CA}}{dt} = CU_Q\frac{d\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = CU_Q \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = CU_Q \cdot \frac{t}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Man beachte die Ähnlichkeit dieser beiden wichtigen Formeln.

$$\boxed{u_{CA} = U_Q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad i_{CA} = I_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

8.2 Entladevorgang

Zu beachten ist nun, dass der Kondensator bereits geladen ist und somit als Spannungsquelle wirkt. Dies wirkt sich auf die Bezugspfeile aus und es ergibt sich mit Hilfe das Maschensatzes, wobei der Index CE nun für 'Kondensator - Entladevorgang' steht:

$$u_{CE} = u_R = R \cdot i_{CE}$$

Da der Strom nun in umgekehrter Richtung fließt, gilt $i_{CA} = -i_{CE}$. Einsetzen liefert

$$u_{CE} = -RC \, \frac{du_{CE}}{dt}$$

Auch hier handelt es sich erneut um eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*, auf die das Prinzip der *Trennung der Veränderlichen* angewendet werden kann:

$$-\frac{1}{\tau} \, dt = \frac{1}{u_{CE}} \, du_{CE}$$

Nun kann das unbestimmte Integral über beiden Seiten gebildet werden:

$$-\frac{1}{\tau} \int dt = \int \frac{1}{u_{CE}} \, du_{CE}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$-\frac{t}{\tau} = ln(u_{CE}) + K_2 \quad .$$

Die Konstante K_2 kann erneut aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden, wobei nun gilt, dass $u_{CE}(0) = U_Q$, also

$$0 = ln(U_Q) + K_2 \quad \Longleftrightarrow \quad K_2 = -ln(U_Q).$$

Einsetzen in die Lösung der DGL liefert

$$ln\left(\frac{u_{CE}}{U_Q}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Longleftrightarrow \quad u_{CE} = U_Q \, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Aus dieser ermittelten Gleichung für die Entladespannung kann nun der fließende Entladestrom bestimmt werden:

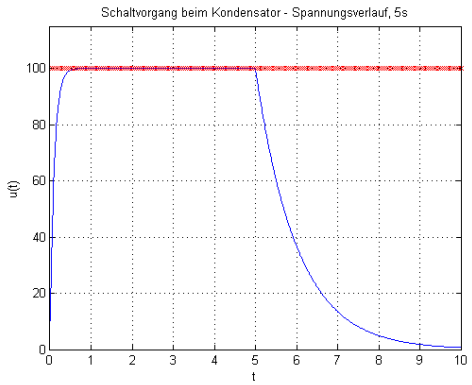
$$i_{CE} = C \, U_Q \, \frac{d\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = -C \, U_Q \, \frac{1}{RC} \, e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

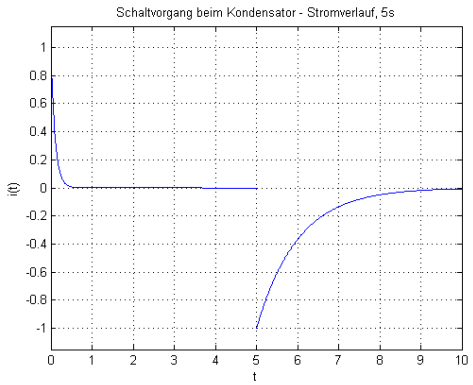
Auch hier soll die Ähnlichkeit beider Formeln nochmals hervorgehoben werden:

$$\boxed{u_{CE} = U_Q \, e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad i_{CE} = -I_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

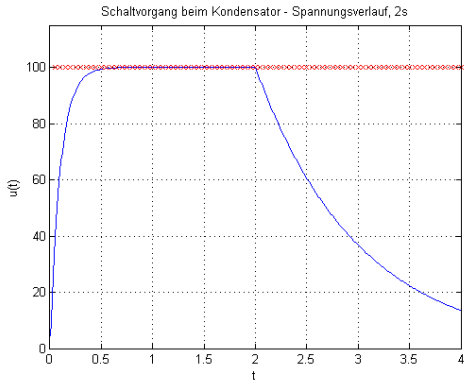
8.3 Diagramme

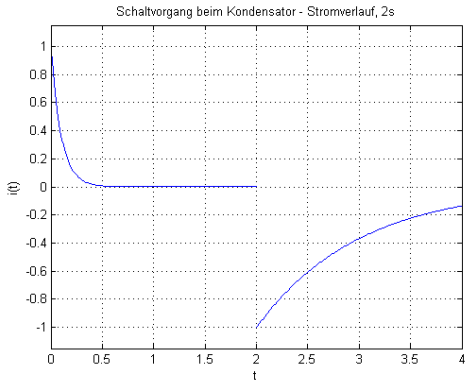
Nach diesen länglichen Vorüberlegungen sollen nun die Spannungs- und Stromverläufe entsprechend der Bauteilvorgaben der Aufgabe gezeichnet werden. Zu beachten ist hierbei, dass sich der Kondensator über einem Widerstand von $R_1 = 100\,\Omega$ auflädt, während der Lastwiderstand beim Entladen $R_2 = 1000\,\Omega$ deutlich größer ist. Daraus ergeben sich unterschiedliche Zeitkonstanten, die im Verhältnis $1:10$ stehen. Da die Umschaltzeit bei beiden Vorgängen $t_1 = 5\,s$ beträgt, ist der Ladevorgang nur sehr schlecht erkennbar. Aus diesem Grund wird im Folgenden auch der Spannungs- und Stromverlauf bei einer Umschaltzeit von $t_2 = 2\,s$ zu sehen sein. Dies ist laut Aufgabenstellung *NICHT* gefordert, lässt aber den Verlauf deutlicher werden.
Zunächst die laut Aufgabenstellung gesuchten Verläufe für eine Gesamtzeit von $T_1 = 10\,s$:





Nun die Verläufe für eine Gesamtzeit von $T_2 = 4\,s$ bei einer Umschaltzeit $t_2 = 2\,s$:





Allgemeine Anmerkung zu Schaltkurven
Durch die Einführung der Zeitkonstanten τ ist es möglich, Schaltvorgänge bereits ohne Kenntnis des genauen Verlaufs des Graphen abzuschätzen. Allgemein gilt beispielsweise, dass nach der Zeit $t = 1 \cdot \tau$ der Kondensator zu $63,2\,\%$ geladen ist, denn

$$u_{CA} = U_Q \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = U_Q \left(1 - e^{-1}\right) = 0,632\,U_Q \quad .$$

Dadurch ergibt sich auch die allgemeine Abschätzung, dass ein (vorher ungeladener) Kondensator nach der Zeit $t \gg 5\tau$ als komplett geladen betrachtet werden kann, denn $u_{CA}(5\tau) = 99,3\,U_Q$. Der Strom wiederum kann dann als *nicht vorhanden* angesehen werden, denn $i_{CA}(5\tau) = 0,0067\,I_0$. Umgekehrt gilt dann, dass nach der Zeit $t = \tau$ der Strom auf $36,8\,\%$ von I_0 gesunken ist. Dieses Ergebnis ergibt sich durch den gleichen Rechenweg. Zur Verdeutlichung kann in den Diagrammen die Vertikale durch die Zeit $t = \tau$ gezogen werden. Der Schnittpunkt mit dem Strom- oder Spannungsverlauf entspricht den soeben beschriebenen Werten von U_Q oder eben I_0. Dadurch ist jederzeit ein schneller qualitativer Verlauf des Stromes oder der Spannung darstellbar.

9 Schaltvorgang an einer Spule

Es sei hier nochmals *explizit* darauf hingewiesen, dass Kleinbuchstaben für *zeitlich veränderliche Größen* stehen, während Großbuchstaben *zeitlich unveränderlichen Größen* entsprechen.

9.1 Einschaltvorgang

Allgemein bekannt ist der folgende Zusammenhang:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Bei der gegebenen Anordnung handelt es sich um eine Reihenschaltung von R und L. Die Anwendung des Maschensatzes liefert hier, wobei der Index "LE"für 'Einschaltvorgang bei Spule' steht.

$$U_Q = u_R + u_L = R \cdot i_{LE} + L \cdot \frac{di_{LE}}{dt}$$

Hierbei handelt es sich nun erneut um eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*, auf die das Prinzip der *Trennung der Veränderlichen* angewendet werden kann:

$$\frac{1}{\frac{L}{R}}\, dt = \frac{1}{\frac{U_Q}{R} - i_{LE}}\, di_{LE}$$

Die Definition der Zeitkonstanten erfolgt hier durch $\tau = \frac{L}{R}$. Außerdem steht der Term $\frac{U_Q}{R}$ für den Strom, der sich für $t \to \infty$ einstellt, so dass $I_\infty = \frac{U_Q}{R}$ gilt. Dadurch vereinfacht sich die DGL zu:

$$\frac{1}{\tau}\, dt = \frac{1}{I_\infty - i_{LE}}\, di_{LE}$$

Nun kann das unbestimmte Integral berechnet werden.

$$\frac{1}{\tau} \int dt = \int \frac{1}{I_\infty} - i_{LE} di_{LE}$$

Daraus ergibt sich zunächst:

$$\frac{t}{\tau} + K_3 = -ln(I_\infty - i_{LE})$$

Die Integrationskonstant K_3 kann mit Hilfe der Anfangsbedingungenen ermittelt werden, denn $i_{LE}(0) = 0$.

$$0 = ln(I_\infty) + K_3 \quad \Longleftrightarrow \quad K_3 = -ln(I_\infty)$$

Durch Einsetzen ergibt sich nun

$$ln\left(\frac{I_\infty - i_{LE}}{I_\infty}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{I_\infty - i_{LE}}{I_\infty} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Dadurch ergibt sich die Funktion für den Strom beim Einschalten zu

$$i_{LE} = I_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad .$$

Die Funktion für den Spannungsverlauf beim Einschalten kann nun durch die zuerst genannte Beziehung ermittelt werden.

$$u_{LE} = L \cdot \frac{di_{LE}}{dt} = L\, I_\infty \frac{d\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = L\, I_\infty \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = L\, I_\infty \frac{R}{L}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = U_Q\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Man beachte hier die Ähnlichkeit zum entsprechenden Verlauf beim Kondensator.

$$\boxed{i_{LE} = I_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad u_{LE} = U_Q\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

9.2 Ausschaltvorgang

Die Spule umgibt nun ein Magnetfeld, dessen Quelle beim Ausschalten versiegt. Das Magnetfeld bricht daraufhin zusammen, was eine Änderung des magnetischen Flusses verursacht. Es wird eine Spannung induziert, die ihrer Ursache entgegenwirkt. Dadurch fließt ein Strom in umgekehrter Richtung (*Lenzsche Regel*). Aus dem Maschensatz ergibt sich also nun, wobei der Index 'LA' für 'Ausschaltvorgang bei Spule' steht:

$$0 = u_R - u_{LA} \quad \Longleftrightarrow \quad u_R = u_{LA}$$

Dadurch ergibt sich folgender Zusammenhang, der wiederum eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* darstellt:

$$-L\,\frac{di_{LA}}{dt} = R \cdot (-i_{LA})$$

Nach Ermitteln der Stammfunktion und Beachtung der Definition der Zeitkonstanten τ als $\tau = \frac{L}{R}$ ergibt sich

$$ln(i_{LA}) = -\frac{t}{\tau} + K_4 \quad .$$

Das Einsetzen der Anfangsbedingung $i_{LA}(0) = I_\infty$ ergibt sich für K_4

$$ln(I_\infty) = K_4 \quad .$$

Daraus ergibt sich nun nach Einsetzen von K_4

$$ln\left(\frac{i_{LA}}{I_\infty}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad i_{LA} = I_\infty\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Nun kann auch der Spannungsverlauf beim Ausschalten ermittelt werden

$$u_{LA} = L\,\frac{di_{LA}}{dt} = L\,I_\infty \cdot \frac{d\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = L\,I_\infty \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -L\,I_\infty \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_Q\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Die Gegenüberstellung der beiden Verläufe weist erneut auf die Ähnlichkeit hin.

$$\boxed{i_{LA} = I_\infty\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad u_{LA} = -U_Q\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

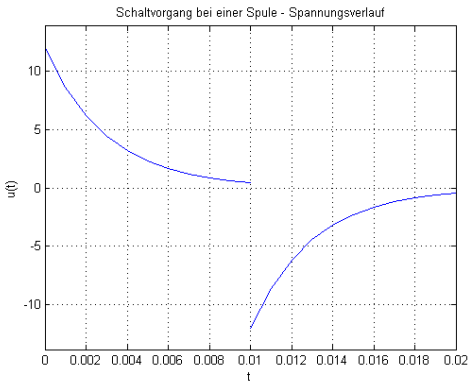
9.3 Diagramme

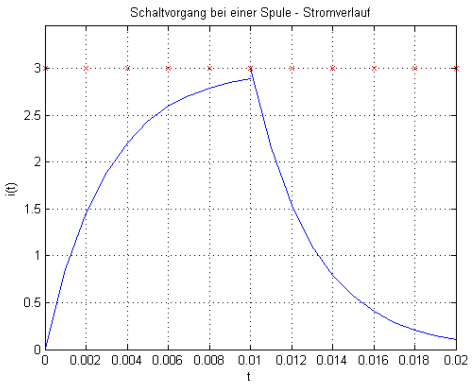
Hier sei auf ein **sehr wichtiges** Detail hingewiesen: Die Sachverhalte, die τ betreffen, gelten hier natürlich genauso wie beim Kondensator (siehe oben), wobei jedoch die Bedeutung der physikalischen Größen U und I bezüglich *Ursache* und *Wirkung* anders sind. So gilt bei der Spule beispielsweise, dass nach der Zeit von $t = 1 \cdot \tau$ gerade $63,2\%$ des Stromes I_∞, der sich theoretisch nach unendlicher Zeit einstellt, fließen. Betrachtet man die gegebenen Werte lauf Aufgabenstellung, so ergibt sich eine Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R} = \frac{12\,mH}{4\,\Omega} = 3\,ms$. Die Umschaltzeit beträgt hier $T = 10\,ms = \frac{10}{3}\,\tau$, so dass sich also folgender Strom einstellt:

$$i_{LA}(10\,ms) = I_infty\,\left(1 - e^{-\frac{10\,tau}{3\,tau}}\right) = 0,964 \cdot I_\infty$$

Im Gegensatz zu der vorherigen Aufgabe durchfließt also beim Umschalten die Spule nur $96,4\,\%$ des Stromes. Dies ist nicht unerheblich, *wurde jedoch in der Darstellung in den Diagrammen vernachlässigt!*. Ich empfehle jedoch, den genauen Verlauf mathematisch zu ermitteln. Dies fördert den Umgang mit der e-Funktion sowie das Prinzip der Zeitkonstanten.

Welche Auswirkungen hat der nicht vollständige Stromfluss? *Es kann bei dem Ermitteln der Ausschaltkurve nicht von der Ausgangsbedingung* $i_{LA}(0) = 0$ *ausgegangen werden*. Vielmehr gilt, dass $i_{LA}(0) = 0,964 \cdot I_\infty$. Dies hat dann wiederum Auswirkungen auf das erneute Einschalten...
Im Folgenden also die Diagramme, die, um es nochmals zu betonen, *nicht der richtigen Lösung entsprechen*, aber den generellen Verlauf dennoch deutlich werden lassen.





Im Diagramm des Stromverlaufes ist bei der Umschaltzeit ein Knick zu beobachten. Da die zeitliche Funktion des Stromes unmöglich *unstetig* sein kann, wird hier deutlich, dass mit den falschen Anfangsbedingungen gerechnet wurde.

9.4 Änderung der Zeitkonstanten

Zuletzt soll auf die Auswirkungen einer verdoppelten Windungszahl eingegangen werden. Es gilt für eine zylinderförmige Spule:

$$L = N^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l}$$

Laut Definition ergibt sich für τ_1 bei N_1:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R} = N_1^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l \cdot R}$$

Für τ_2 bei doppelter Windungszahl $N_2 = 2\,N_1$ ergibt sich:

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R} = N_2^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l \cdot R} = 4 \cdot N_1^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l \cdot R} = 4\,\tau_1$$

Die Deutung dieses Ergebnisses liefert, dass es bei doppelter Windungszahl genau viermal so lang dauert, bis beispielsweise $63,2\,\%$ des Stromes I_∞ fließen. Die Ein- und Ausschaltkurve verläuft also deutlich flacher.

10 Berechnung des arithmetischer Mittelwertes

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass nur über $1/3$ der Periode eine Spannung anliegt, für die folgende Funktion gilt:

$$u(t) = \hat{U}\,\frac{3}{T} \cdot T$$

Die Funktion $u(t)$ wird nun zur Mittelwertberechnung verwendet:

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} u(t)\,dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} \hat{U}\frac{3}{T} \cdot T\,dt = \frac{3\,\hat{U}}{2\,T^2} \cdot \left[\frac{T^2}{9} - 0\right] = \frac{\hat{U}}{6}$$

Aus dem gegebenen Spannungsverlauf entnimmt man $\hat{U} = 10V$, so dass sich für $\overline{U}$ ergibt:

$$\overline{U} = \frac{10}{6}\,V = \frac{5}{3}\,V$$

11 Berechnung des Effektivwertes

allgemein gilt für den Effektivwert:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t)\,dt}$$

Aufgrund der Symmetrie des Stromverlaufes ist es hier ausreichend, I_{eff} für $\frac{T}{4}$ zu berechnen, da die Anstiege in den drei verschiedenen Abschnitten einer Periode betragsmäßig gleich sind.
Für $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ gilt:

$$i(t) = \hat{I}\,\frac{4}{T} \cdot t$$

Damit ergibt sich der Effektivwert zu:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\frac{T}{4}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\hat{I}\,\frac{4}{T} \cdot t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \cdot \frac{16\,\hat{I}^2}{T^2} \int_0^{\frac{T}{4}} t^2\,dt} = \sqrt{\frac{64}{T^3}\,\hat{I}^2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{T^3}{64} - \frac{1}{3} \cdot 0\right]} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{3}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{3}}$$

Aus dem gegebenen Stromverlauf entnimmt man $\hat{I} = 10\ A$, so dass sich für I_{eff} ergibt:

$$I_{eff} = \frac{10}{\sqrt{3}}\,A \approx 5,77\ A$$

12 Berechung von Strömen eines Wechselstromnetzwerkes

Zunächst ergibt die Knotenregel: $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

I_2 kann relativ einfach ermittelt werden, wenn man U willkürlich reell setzt:

$$\underline{X}_C = \frac{U}{\underline{I}_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = \frac{U}{-\frac{j}{\omega C}} = j\,U\omega C$$

Einsetzen der Werte liefert $\underline{I}_2 = 0,5\,e^{j\,\frac{\pi}{2}}\,A$.
Es folgt die Berechnung von $\underline{I}_1$:

$$R + j\,\omega L = \frac{U}{\underline{I}_1}, \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{U}{R + j\,\omega L} \cdot \frac{R - j\,\omega L}{R - j\,\omega L} = U\left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\,\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

Für $|\underline{I}_1|$ ergibt sich

$$|\underline{I}_1| = U \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = 0,5\ A \quad .$$

Für φ ergibt sich

$$\varphi = -\arctan\frac{\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}}{\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}} = -\arctan\frac{\omega L}{R} \approx -\frac{\pi}{4} \quad .$$

Also ist $\underline{I}_1 = 0,5\, e^{-j\,\frac{\pi}{4}}$. Nun kann auch $\underline{I}$ berechnet werden:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = U\, j\omega C + U \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2}$$

$$= U\left[\frac{R}{R^2+(\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)\right]$$

Damit ergibt sich für $|\underline{I}|$:

$$|\underline{I}| = U \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2} \approx 0,38\ A$$

Nochmals alle Ergebnisse im Überblick:

$$I_1 = 0,5\ A, \quad I_2 = 0,5\ A, \quad I \approx 0,38\ A$$

Bei dieser Aufgabe könnte es durchaus hilfreich sein, ein Zeigerdiagramm anzufertigen, um sich bewusst zu machen, dass I durch *vektorielle Addition* ermittelt werden muss.

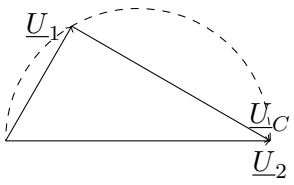
13 Zeichnen eines qualitativen Zeigerdiagramms I

Bei der Erstellung von Zeigerdiagrammen empfiehlt es sich, die Schaltung von *innen nach außen* zu analysieren. Außerdem sollten vorher die Zusammenhänge zwischen den Teilströmen(-spannungen) mit Hilfe des Knotensatzes und der Maschenregel aufgestellt werden. Für die konkrete Anordnung ergeben sich:

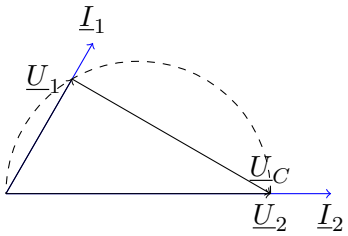
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}$$
$$\underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{U}_2$$
$$\underline{U}_L + \underline{U}_2 = \underline{U}$$

Ein Zeiger muss willkürlich als Bezugszeiger genommen werden. Es bietet sich an, $\underline{U}_2$ zu verwenden:

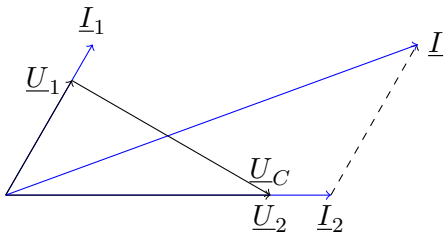
Nun muss dieser Zeiger gerade die Sie Summe aus $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_2$ darstellen, wobei darauf geachtet werden muss, dass die Spannung am Kondensator um $\frac{\pi}{2}$ *hinterhereilt*. Die Konstruktion gelingt in einfacher Form unter Ausnutzung des Thaleskreises:



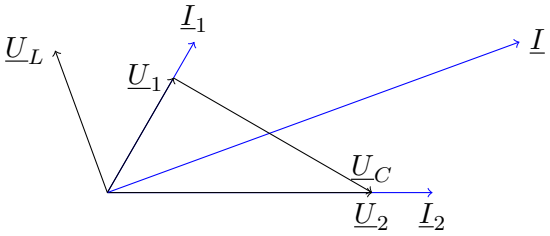
Das Einzeichnen der Teilströme $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_2$ erfolgt in Phase mit den Ohmschen Widerständen. Es kann nun kontrolliert werden, ob der Spannungszeiger $\underline{U}_C$ dem Stromzeiger $\underline{I}_1$ hinterhereilt.
Man mache sich bewusst, was das gespiegelte Antragen des Thaleskreises und der Spannungszeiger bedeutet!



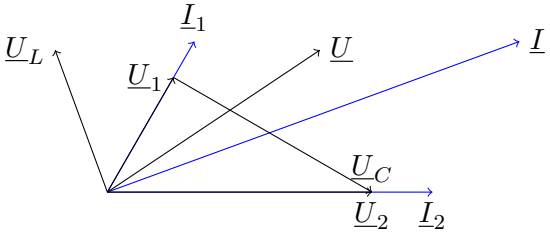
Nun kann die durch die Knotenregel aufgestellte Bedingung erfüllt werden, in dem man beide Stromzeiger vektoriell addiert, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Thaleskreis verzichtet wird:



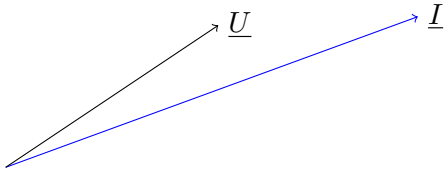
Der Spannungszeiger $\underline{U}_L$ muss dem Gesamtstromzeiger $\underline{I}$ um $\frac{\pi}{2}$ *vorauseilen*, da es sich hierbei um den Spannungsabfall über einer Spule handelt.



Die letzte aufgestellte Bedingung kann nun erfüllt werden, in dem man die beiden Spannungszeiger $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_2$ vektoriell addiert.



Betrachtet man nun nur die Gesamtzeiger und $\underline{U}$ und $\underline{I}$, so zeigt sich, dass $\varphi > 0°$ ist. Dies bedeutet also, dass die hier skizzierte Lösung einen *induktiven* Charakter aufweist, da der Gesammtspannungszeiger $\underline{U}$ dem Gesamtstromzeiger $\underline{I}$ vorauseilt.



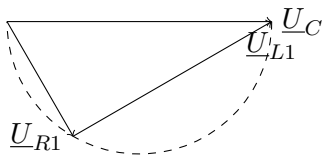
14 Zeichnen eines qualitativen Zeigerdiagramms - II

Auch hier geht man am einfachsten von *innen nach außen*. Aus der Anordnung ergeben sich folgende Beziehungen:

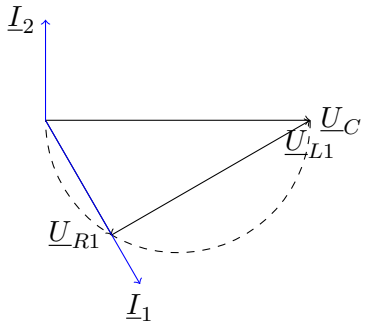
$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C + \underline{U}_{R2}$$
$$\underline{U}_C = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L1}$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Willkürlich wird $\underline{U}_C$ als Bezugszeiger gewählt.

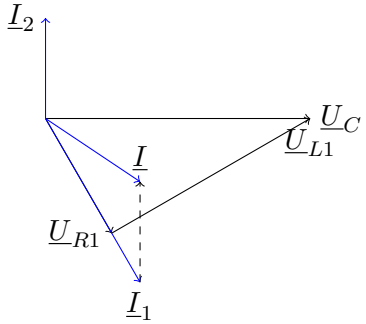
Nun muss dieser Zeiger gerade die vektorielle Summe aus $\underline{U}_{R1}$ und $\underline{U}_{L1}$ darstellen, wobei darauf geachtet werden muss, dass die Spannung bei der Spule um $\frac{\pi}{2}$ vorauseilt. Erneut wird mit Hilfe des Thaleskreises konstruiert.



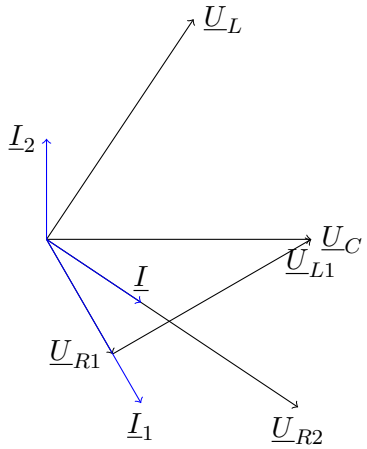
Der Teilstrom $\underline{I}_1$ muss in Phase mit dem Spannungszeiger $\underline{U}_{R1}$ sein. $\underline{I}_2$ muss dem Spannungszeiger $\underline{U}_C$ gerade um $\frac{\pi}{2}$ *vorauseilen*. Danach kann kontrolliert werden, ob die Beziehung von Strom- und Spannungszeiger an der Spule gegeben sind.



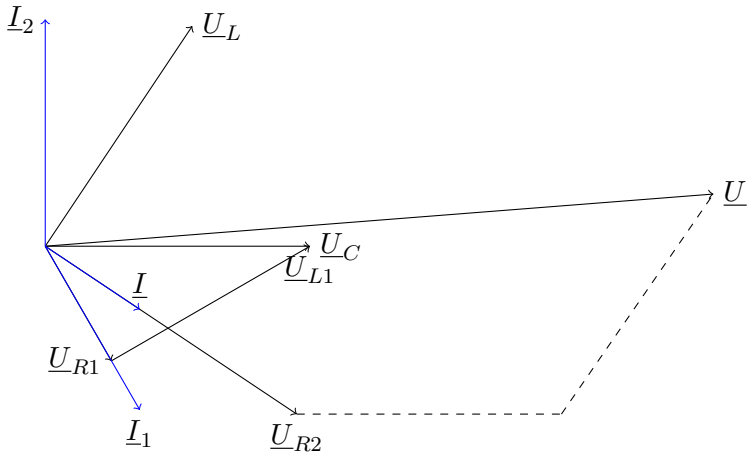
Aus der vektoriellen Addition der beiden Teilstromzeiger ergibt sich der Gesamtstromzeiger $\underline{I}$.



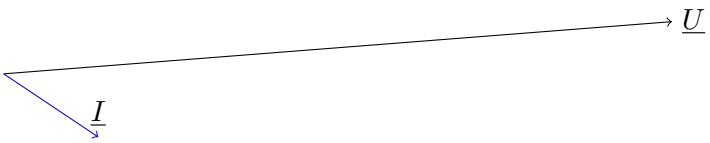
Der Spannungszeiger $\underline{U}_{R2}$ hat die gleiche Phase wie der Gesamtstromzeiger $\underline{I}$. Für den Spannungszeiger $\underline{U}_{L2}$ an der zweiten Spule gilt, dass er nun dem Gesamtstromzeiger $\underline{I}$ um $\frac{\pi}{2}$ vorauseilen muss.



Nun kann die zuerst aufgestellte Bedingung erfüllt werden, indem alle Teilspannungszeiger $\underline{U}_C$, $\underline{U}_{R2}$ und $\underline{U}_L$ vektoriell addiert werden. Daraus ergibt sich der Gesamtspannungszeiger $\underline{U}$.



Betrachtet man nur die Gesamtzeiger von Strom und Spannung, so sieht man, dass die hier qualitativ skizzierte Anordnung einen *induktiven* Charakter aufweist, da der Gesamtspannungszeiger $\underline{U}$ dem Gesamtstromzeiger $\underline{I}$ etwas vorauseilt $\varphi > 0°$.



15 Güte im Reihen- und Parallelschwingkreis

Allgemein gilt für die Güte eines Schwingkreises

$$Q = \frac{f_R}{B},$$

wobei B für die Bandbreite steht. Eine hohe Güte entspricht einer hohen *Selektivität*, da nur bestimmte Frequenzen hindurchgelassen werden. Dies ist beispielsweise beim Empfang eines Radiosenders wünschenswert, um tatsächlich nur die Frequenz zu empfangen, auf der gesendet wird. Das Rauschen, also Störfrequenzen, soll möglichst herausgefiltert werden.

15.1 Reihenschwingkreis

Im Reihenschwingkreis ist die Güte ein *Maß für Spannungsüberhöhung* an der Spule und dem Kondensator bei Resonanz. Im Resonanzfall wirkt im Reihenschwingkreis nur der Ohmsche Widerstand, wobei man beim Reihenschwingkreis auch vom Bandpass spricht - für alle anderen Frequenzen ist der Betrag der komplexen Impedanz größer als der Ohmsche Widerstand und damit der Strom kleiner. Im Resonanzfall kompensieren sich die Spannungszeiger von Spule und Kondensator, weisen jedoch hohe Werte auf!
In Formeln ausgedrückt ergibt sich also

$$Q = \frac{U_L(f_R)}{U(f_R)} = \frac{U_C(f_R)}{U(f_R)}.$$

Für $U(f_R)$ ergibt sich einfach $U(f_R) = R \cdot I$, da bei Resonanzfrequenz gerade nur der Ohmsche Anteil wirkt. Für $U_L(f_R)$ gilt

$$U_L(f_R) = \omega_R L \cdot I.$$

Daraus lässt sich die Güte für den Reihenschwingkreis berechnen:

$$Q = \frac{\omega_R L \cdot I}{R \cdot I} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

15.2 Parallelschwingkreis

Im Parallelschwingkreis ist die Güte ein *Maß für die Stromüberhöhung* an der Spule und dem Kondensator im Resonanzfall, denn dann wirkt nur der Ohmsche Widerstand, wobei man beim Parallelschwingkreis auch von einer Bandsperre spricht, da für alle anderen Frequenzen der Betrag der komplexen Impedanz kleiner als der Ohmsche Widerstand ist. Im Resonanzfall kompensieren sich die Stromzeiger von Spule und Kondensator, wobei hohe Ströme fließen! Dies muss bei der Konzipierung unbedingt bedacht werden.
Es ergibt sich also

$$Q = \frac{I_C(f_R)}{I(f_R)} = \frac{I_L(f_R)}{I(f_R)}$$

Für $I(f_R)$ ergibt sich einfach $I(f_R) = \frac{U}{R}$, da ja nur der Ohmsche Anteil den Strom bei Resonanz bestimmt. Für $I_C(f_R)$ ergibt sich

$$I_C(f_r) = \frac{U}{\omega_R \cdot C}.$$

Daraus lässt sich nun die Güte für den Parallelschwingkreis bestimmen:

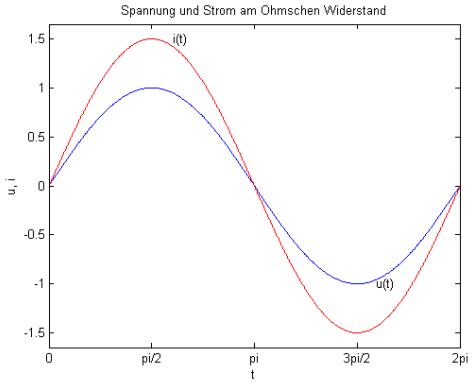
$$Q = \frac{\frac{U}{\omega_R \cdot C}}{\frac{U}{R}} = \frac{R}{\frac{2\pi}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} \cdot C} = R \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

16 Strom- und Spannungsbeziehungen an R, L und C

16.1 Ohmscher Widerstand

Da an einem Ohmschen Widerstand keine Phasenverschiebung auftritt, sind die Diagramme für Strom- und Spannung reine Sinusfunktionen:

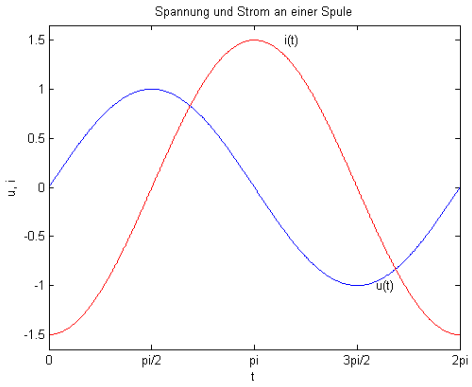
$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \qquad i(t) = I_0 \sin(\omega t)$$



16.2 Ideale Spule

An einer Spule eilt die *Spannung* dem Strom um $\frac{\varphi}{2}$ *voraus*, da $u = L \cdot \frac{di}{dt}$

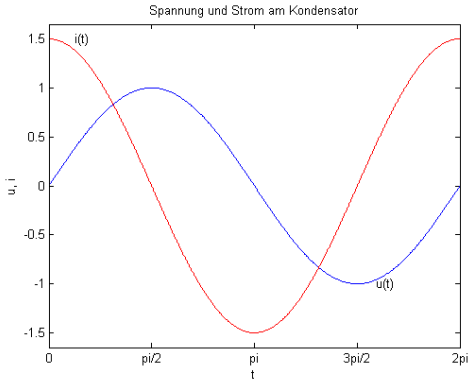
$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \qquad i(t) = -I_0 \cos(\omega t)$$



16.3 Kondensator

Bei einer Spule eilt der *Strom* der Spannung um $\frac{\varphi}{2}$ *voraus*, da $i = C \cdot \frac{du}{dt}$

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \qquad i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$



17 Durchlassbereich

Alle Frequenzen außerhalb des Durchlassbereiches werden gesperrt. Nur ein Frequenzband mit einer definierten Breite ist duchlässig. Es gilt

$$B = f_o - f_u,$$

wobei f_o und f_u sogenannte *Grenzfrequenzen* darstellen (o - obere, u - untere), bei welchen die Phasenverschiebung $\varphi = \pm 45°$ beträgt. Bei dieser Phasenverschiebung sind Blind- und Wirkleistung betragsmäßig gleichgroß und die Dämpfung beträgt $3\,dB$.
Weitere Informationen zum Reihenschwingkreis liefert die übernächste Aufgabe.

18 Z-Verlauf beim Parallelschwingkreis

Für den Parallelschwingkreis gilt folgender Zusammenhang:

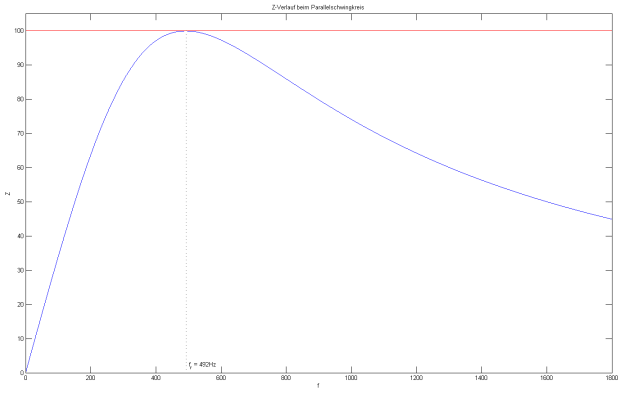
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{X}_L} + \frac{1}{\underline{X}_C} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + j\,\omega C = \frac{1}{R} + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Für den Betrag der komplexen Impedanz $|\underline{Z}|$ folgt demnach

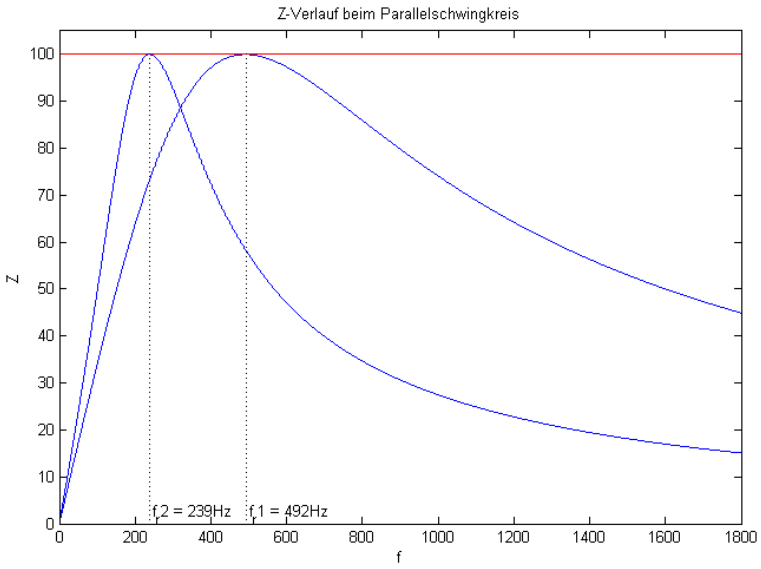
$$\frac{1}{|\underline{Z}|} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad .$$

Der Kehrwert davon liefert das gewünschte Ergebnis

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad .$$



Aus dem Diagramm wird sehr gut ersichtlich, dass der Parallelschwingkreis bei $f = f_R$ sein Maximum hinsichtlich des Widerstandes annimmt, denn im Resonanzfall kompensieren sich die Stromzeiger an R und L, so dass nur der Ohmsche Widerstand wirkt. Aus diesem Grund bezeichnet man den Parallelschwingkreis auch als *Bandsperre*, da er alle Frequenzen innerhalb seines Sperrbereiches nicht hindurchlässt.
Im folgenden Diagramm ist ein zweiter Z-Verlauf eingezeichnet, der insgesamt spitzer verläuft. Das bedeutet, dass die Güte *höher* und der Sperrbereich entsprechend *kleiner* ist, da $Q \sim \frac{1}{B}$.



Im Allgemeinen zeichnet man Z-Verläufe über große Frequenzen auf halblogarithmisches Papier, da das Frequenzspektrum leichter eingefangen werden kann, aber für diesen Fall genügt das lineare Abtragen, um den Verlauf deutlich zu machen.

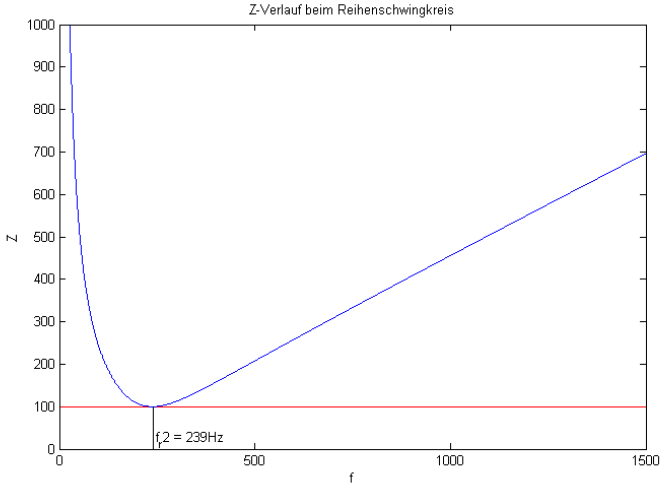
19 Z-Verlauf beim Reihenschwingkreis

Für den Reihenschwingkreis gilt:

$$\underline{Z} = R + \underline{X}_L + \underline{X}_C = R + j\,\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad .$$

Für den Betrag der komplexen Impedanz $|\underline{Z}|$ folgt demnach

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad .$$



Der Z-Verlauf verdeutlicht, warum der Reihenschwingkreis als *Bandpass* fungiert: im Resonanzfall wirkt nur der Ohmsche Widerstand nach außen, da sich die Spannungszeiger an L und C kompensieren, was also einem Phasenwinkel von $\varphi = 0°$ entspricht. Daher ist der Stromfluss im Resonanzfall maximal und allein vom Ohmschen Widerstand abhängig. Bei jeder anderen Frequenz hemmen die Einflüsse von Spule und Kondensator den Stromfluss.
Es sei noch angemerkt, dass die Bauteile aus diesem Reihenschwingkreis denen des zweiten Parallelschwingkreises von oben entsprechen; die Resonanzfrequenz ist bei beiden natürlich gleich groß.

20 Berechnung eines Reihenschwingkreises

$U_{ges} = 5\,V \quad L = 55\,mH \quad C = 150\,nF \quad R = 100\,\Omega$

1. Herleitung der Gleichung für die Resonanzfrequenz

$$\underline{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Für den Fall der Resonanzfrequenz gilt, dass $Im\{\underline{Z}\} = 0$, also

$$0 = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\omega C} = \omega L \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \omega^2 LC$$

Durch Einsetzen der Beziehung $\omega = 2\pi f$ ergibt sich durch Umstellen

$$f_R^2 = \frac{1}{4\pi^2\, LC} \quad \Rightarrow \quad f_R = \frac{1}{2\pi\,\sqrt{LC}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$f_R = \frac{1}{2\pi\,\sqrt{55\,mH \cdot 150\,nF}} \approx 1,752\,kHz$$

2. Berechnen der anliegenden Teilspannungen bei $f = f_R = 1,752\,kHz$ Da im Resonanzfall eines Reihenschwingkreises nur der Ohmsche Widerstand nach außen wirkt, ergibt sich der Gesamtstrom $\underline{I}$ zu

$$I = \frac{U_{ges}}{\underline{Z}(f_R)} = \frac{U}{R} = \frac{5\,V}{100\,\Omega} = 50\,mA$$

U und I wurden willkürlich reell gesetzt. Die Berechnung der Teilspannungen kann auf zwei Weisen durchgeführt werden.
Zunächst über die *klassische* Methode der Netzwerkberechnung:

$$\underline{X}_L = \frac{\underline{U}_L}{I} = j\omega L \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_L = j\,2\pi\,f_R\,L\,I$$

Einsetzen der Werte und die Beziehung $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ liefern

$$\underline{U}_L = 2\pi \cdot 1,752\,kHz \cdot 55\,mH \cdot 20\,mA \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \approx 30,3\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,V$$

Der Ansatz für $\underline{U}_C$ ist äquivalent.

$$\underline{X}_C = \frac{\underline{U}_C}{I} = \frac{-j}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_C = -j \cdot \frac{I}{2\pi f\,C}$$

Einsetzen der Werte und die Beziehung $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ liefern

$$\underline{U}_C = \frac{50\,mA}{2\pi \cdot 1,752\,kHz\;150\,nF} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \approx 30,3\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\,V$$

Viel Erfolg beim Praktikum!