Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Lehrstuhl für Systemtheorie technischer Prozesse
Prof. Dr.-Ing. Jörg Raisch

Prüfung
Einführung in die Systemtheorie

9. Juli 2003

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben auf drei Aufgabenblättern.

Aufgabe 1
Gegeben sei die folgende Differenzengleichung:

$$x(k+1) = -x^3(k) + \frac{5}{4}\,x(k) \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die stationären Lösungen dieser Gleichung.

(b) Linearisieren Sie das System um jede der Ruhelagen aus (a). Was können Sie über die Stabilität der Ruhelagen aussagen?

Aufgabe 2
Untersuchen Sie das folgende System von Differenzengleichungen:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}}_{:=A} x(k), \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2, sowie die Eigenvektoren $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{v}^{(2)}$ der Matrix A.

(b) Existieren außer $\underline{x}_s = \underline{0}$ noch weitere Ruhelagen des Systems (2)? Ist die Ruhelage $\underline{x}_s = \underline{0}$ stabil? Ist Sie asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Führen Sie die Koordinatentransformation $\underline{x}(k) = T\underline{z}(k)$ durch. Dabei sei die Transformationsmatrix $T = [\underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(2)}]$ eine Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A, also $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{v}^{(2)}$ bilden. Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(k)$ und aus dieser die allgemeine Lösung $\underline{x}(k)$ im ursprünglichen Koordinatensystem.
<u>Hinweis:</u> Zur Inversion einer 2×2-Matrix:

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3
Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\,(-x_1(t) + x_2(t)) \tag{3}$$
$$\dot{x}_2(t) = 5\,x_2(t)\,(-2\,x_1^2(t) - x_2(t) + 1) \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems (3), (4).

(b) Geben Sie die Jacobimatrix $J(x_{1s}, x_{2s})$ des Systems (3), (4) für eine beliebige Ruhelage $\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{pmatrix}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Ruhelagen aus Teilaufgabe (a) auf asymptotische Stabilität.

Aufgabe 4
Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{2}\,\dot{y}(t) - \frac{3}{2}y(t) = 0 \tag{5}$$

(a) Transformieren Sie Gl. (5) in ein System aus zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung, also in ein System

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) \tag{6}$$

mit

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(b) Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ aussagen?

(c) In dieser Teilaufgabe soll das System aus Gl. (5) stabilisiert werden. Zu diesem Zweck wird das System mit einer skalaren Stellgröße versehen. Das System hat dann folgende Gestalt:

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{2}\,\dot{y}(t) - \frac{3}{2}y(t) = u(t) \tag{8}$$

Transformieren Sie (8) wieder in ein System aus zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung, also in ein System

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t). \tag{9}$$

(i.) Ist das System (9) vollständig zustandssteuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage.

(ii.) Benutzen Sie eine konstante Zustandsrückführung

$$u(t) = (r_1, r_2)\,\underline{x}(t) \tag{10}$$

und geben Sie die Dynamikmatrix A_c des aus Differentialgleichung (9) und Rückführung (10) bestehenden geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_c\,\underline{x}(t) \tag{11}$$

an.

(iii.) Ist es möglich, die reellen Parameter r_1, r_2 so zu wählen, daß A_c die Eigenwerte $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -1$ besitzt? Wenn ja, geben Sie geeignete Koeffizienten r_1 und r_2 an.

Aufgabe 5
Die Polymerisationsreaktion

$$
\begin{aligned}
P_1 + S &\leftrightarrows P_2 \\
P_2 + S &\leftrightarrows P_3 \\
P_3 + S &\leftrightarrows P_4 \\
P_4 + S &\leftrightarrows P_5 \\
P_5 + S &\leftrightarrows P_6
\end{aligned}
$$

soll durch eine Markov-Kette beschrieben werden. Ein Radikal P_1 reagiert mit einem Molekül S zu einem Polymer der Länge 2. Dieses kann entweder zerfallen, wobei P_1 und S entstehen oder es reagiert mit einem weiteren Molekül S zu einem Polymer der Länge 3, usw. . Der Einfachheit halber sei 6 die maximal mögliche Länge eines Polymers. Experimentelle Daten ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül P_1 auf ein Molekül S trifft und zu P_2 reagiert $p = \frac{1}{4}$ beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül P_6 zu einem Molekül P_5 und einem Molekül S zerfällt betrage ebenfalls $p = \frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül der Länge i, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ mit einem Molekül S zu einem Molekül P_{i+1} der Länge $i+1$ reagiert sei $q_r = \frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Molekül zu einem Molekül P_{i-1} der Länge $i-1$ und einem Molekül S zerfällt, betrage $q_z = 1 - q_r = \frac{1}{2}$.

(a) Zeichnen Sie einen Graphen, der diesen Prozess beschreibt. Verwenden Sie dabei Zustände

x_1 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 1 hat,

x_2 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 2 hat,

x_3 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 3 hat,

x_4 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 4 hat,

x_5 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 5 hat,

x_6 Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Polymer die Länge 6 hat.

(b) Lesen Sie aus diesem Graphen die Übergangsmatrix A einer Markov-Kette $\underline{x}(k+1) = A\,\underline{x}(k)$ ab.

(c) Begründen Sie ohne Rechnung, warum diese Differenzengleichung eine von $\underline{x}_s = \underline{0}$ verschiedene stationäre Lösung besitzt.

(d) Berechnen Sie diese stationäre Lösung.