Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Lehrstuhl für Systemtheorie technischer Prozesse
Prof. Dr.-Ing. Jörg Raisch

Prüfung
Einführung in die Systemtheorie

25. Juli 2005

Diese Klausur besteht aus vier Aufgaben auf vier Aufgabenblättern.

Aufgabe 1
Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - x_3(t) \tag{1}$$
$$\dot{x}_2(t) = 16 - 8\,x_3(t) + x_3^2(t) \tag{2}$$
$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) \tag{3}$$

und den Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20} \text{ und } x_3(0) = x_{30}.$$

(a) Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems aus Gl. (1), Gl. (2) und Gl. (3).

(b) Geben Sie die Jacobimatrix $J(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$ des Systems aus Gl. (1)–Gl. (3) für eine beliebige Ruhelage $\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ x_{3s} \end{pmatrix}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Ruhelagen aus Teilaufgabe (a) auf asymptotische Stabilität.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Differenzengleichung

$$y(k+3) = \frac{5}{4}\,y(k+2) - \frac{1}{8}\,y(k+1) - \frac{1}{8}\,y(k) \tag{4}$$

mit den Anfangswerten:

$$y(0) = y_0,\; y(1) = y_1 \text{ und } y(2) = y_2. \tag{5}$$

(a) Transformieren Sie Gl. (4) in ein System aus drei Differenzengleichungen 1. Ordnung, also in ein System

$$\underline{x}(k+1) = A\,\underline{x}(k) \tag{6}$$

mit

$$\underline{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3, sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$ und $\underline{v}^{(3)}$ der Matrix A.

(c) Existieren außer $\underline{x}_s = \underline{0}$ noch weitere Ruhelagen des Systems (6)? Ist die Ruhelage $\underline{x}_s = \underline{0}$ stabil? Ist sie asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Aussagen.

(d) Führen Sie die Koordinatentransformation $\underline{x}(k) = T\underline{z}(k)$ durch. Dabei sei die Transformationsmatrix $T = [\underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(3)}]$ eine Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A, also $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$ und $\underline{v}^{(3)}$ bilden. Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(k)$ und aus dieser die allgemeine Lösung $\underline{x}(k)$ im ursprünglichen Koordinatensystem.
Hinweis: Verwenden Sie die Bezeichnung $\underline{z}_0 = T^{-1}\,\underline{x}_0$ für die Darstellung des Vektors der Anfangswerte $\underline{x}_0$ im neuen Koordinatensystem und behalten Sie diese Bezeichnung auch nach der Rücktransformation ins ursprüngliche Koordinatensystem bei (d.h. ermitteln Sie $\underline{x}(k)$ in Abhängigkeit von $\underline{z}_0$).
Die Inversion der Matrix T ist zur Lösung dieser Aufgabe dann nicht mehr erforderlich!

Aufgabe 3
Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t). \tag{8}$$

(a) Ist das System (8) stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Aussage.

(b) Für das System soll eine Zustandsrückführung

$$u(t) = \begin{pmatrix} r_1, r_2 \end{pmatrix} \underline{x}(t), \quad r_1, r_2 = const, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

entworfen werden. Berechnen Sie die Dynamikmatrix A_g des aus Differentialgleichung (8) und der konstanten Zustandsrückführung (9) bestehenden geschlossenen Regelkreises

$$\underline{\dot{x}}(t) = A_g \underline{x}(t). \tag{10}$$

(c) Für welche Werte von r_1 und r_2 ist das System (10) asymptotisch stabil?

(d) Wählen Sie r_1 und r_2 so, dass A_g die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$ besitzt.

Aufgabe 4

Ein Käfer bewegt sich durch das in Abb. 1 dargestellte Wegenetz. An jeder Wegkreuzung entscheidet er sich zufällig für einen der mit ⇧ gekennzeichneten Wege (mit ⊖ gekennzeichnete Wege können nicht betreten werden). Für einen Wegabschnitt benötigt er genau einen Tag. Das „System" Käfer und Wegenetz kann dann durch eine Markov-Kette

$$\underline{x}(k+1) = P\underline{x}(k). \tag{11}$$

beschrieben werden, bei der k für die Anzahl der vergangenen Tage steht. Jeder Zustand x_i der Markov-Kette gebe dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich der Käfer am Tagesende an der Kreuzung i befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Käfer sich an einer Kreuzung für einen möglichen Weg entscheidet, ist für alle Wege, die diese Kreuzung verlassen gleich groß. Der Käfer geht also z.B. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ von Kreuzung 2 nach Kreuzung 3.

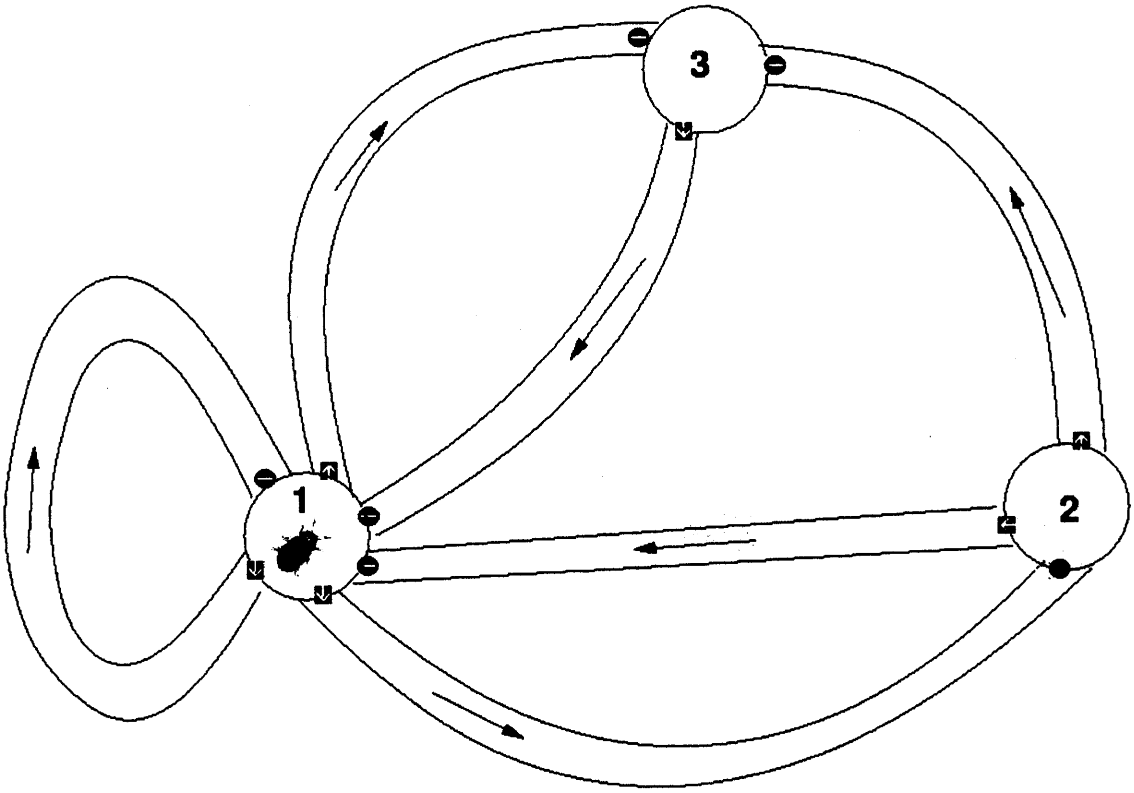

Abbildung 1: Wegesystem: Der Käfer darf sich nur in Pfeilrichtung bewegen

(a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix P der Markov-Kette.

(b) Der Käfer startet an Kreuzung 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet er sich nach 2 Tagen an Kreuzung 1, 2 und 3?

(c) Konvergiert der Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ für $k \to \infty$ mit $\sum_{i=1}^{3} x_i(0) = 1$ gegen eine stationäre Lösung $\underline{x}_s$? Begründen Sie Ihre Aussage anhand der Eigenwerte der Matrix P.

(d) Berechnen Sie die stationäre Lösung $\underline{x}_s$ des dynamischen Systems aus Gl. (11) mit der in Teilaufgabe (a) ermittelten Transitionsmatrix P.