

# Lösungen zur Klausur Einf. in die Systemtheorie SS2005

16. Oktober 2005

## 1

### 1.1

$$\underline{x}_{s1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}, \underline{x}_{s2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

### 1.2

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -1 \\ 0 & 0 & 2x_3 - 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.3

$$J|_{\underline{x}_{s1}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{11} = 0$ ,  $\lambda_{12} = \sqrt{2} + 1$  und  $\lambda_{13} = \sqrt{2} - 1$

Da  $\lambda_{12}, \lambda_{13} > 0 \Rightarrow$  Die Ruhelage  $\underline{x}_{s1}$  ist instabil.

$$J|_{\underline{x}_{s2}} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{21} = 0$ ,  $\lambda_{22} = \sqrt{2} - 1$  und  $\lambda_{23} = -\sqrt{2} - 1$

Da  $\lambda_{22} > 0 \Rightarrow$  Die Ruhelage  $\underline{x}_{s2}$  ist instabil.

## 2

### 2.1

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/8 & -1/8 & 5/4 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(k), \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

### 2.2

$\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1/2$  und  $\lambda_3 = -1/4$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} \text{ und } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

### 2.3

Alle Punkte auf dem Eigenvektor zum Eigenwert 1 sind ebenfalls Ruhelagen.

Also sind alle  $\underline{x}_s = c \cdot \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}$ , mit  $c \in \mathbb{R}$  Ruhelagen des Systems.

### 2.4

Mit  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$  und der Transformation  $\underline{x} = T \cdot \underline{z}$  folgt:

$$\underline{z}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & & -1/4 \end{bmatrix} \cdot \underline{z}(k) \Rightarrow \underline{z}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^k & 0 \\ 0 & & (-1/4)^k \end{bmatrix} \cdot \underline{z}_0$$

$$\underline{x}(k) = T \cdot \underline{z}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^k & 0 \\ 0 & & (-1/4)^k \end{bmatrix} \cdot \underline{z}_0$$

## 3

### 3.1

$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow Rg(C) = 2 \Rightarrow$  Das System ist steuerbar, damit auch stabilisierbar.

### 3.2

$$A_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2(1+r_1) & 2r_2 \end{bmatrix}$$

### 3.3

Es gilt für die beiden Eigenwerte von  $A_g$ :

$\lambda_{1/2} = \frac{2r_2+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2r_2+1)^2}{4} - 2(r_2 - r_1 - 1)} =: a \pm \sqrt{a^2 - b}$ , also Abkürzungen  $a = \frac{2r_2+1}{2}$  und  $b = 2(r_2 - r_1 - 1)$ . Damit das System asymptotisch stabil ist, müssen die Realteile beider Eigenwerte negativ sein. Ist  $a > 0$ , so ist mindestens der Realteil des Eigenwertes  $\lambda_p = a + \sqrt{a^2 - b}$  positiv, das System also instabil.

Folgt also zuerst mal  $a \stackrel{!}{<} 0 \Leftrightarrow r_2 \stackrel{!}{<} -0.5$ .

Wäre jetzt noch  $b < 0$ , so ist der Term unter der Wurzel  $a^2 - b = a^2 + |b| > a^2$ , also wäre, trotz  $a < 0$ , der Eigenwert  $\lambda_p = a + \sqrt{a^2 - b}$  positiv. Also ist die zweite Bedingung  $b \stackrel{!}{>} 0 \Leftrightarrow r_1 \stackrel{!}{<} r_2 - 1$ .

### 3.4

### 3.5

$$r_1 = -4 \quad r_2 = -2$$

Wie man sieht ist  $r_2 < -0.5$  und  $r_1 < r_2 - 1 = -3$ .

## 4

### 4.1

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4.2

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Elemente  $x_i$  des Vektors  $\underline{x}(k)$  geben die W'keiten an, dass sich der Käfer am Tag  $k$  an der Kreuzung  $i$  befindet.

Also ergeben sich die W'keiten am Tag 2 zu  $\underline{x}(2) = P^2 \cdot \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 11/18 \\ 1/9 \\ 5/18 \end{bmatrix}$ .

### 4.3

Ein Eigenwert ist  $\lambda_p = 1$ , die anderen beiden haben Realteile  $< 0$ . (Das ist übrigens durch den Satz von PERRON-FROBENIUS sichergestellt, nach dem nicht-negative Matrizen genau einen nicht-negativen Eigenvektor mit zugehörigem positiven Eigenwert, der alle anderen Eigenwerte betragsmäßig dominiert.) Also existieren zwei as. stabile und eine stabile Richtung, das System wird auf den Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_p$  konvergieren. Die Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$  liefert den Punkt, auf den das System konvergiert.

### 4.4

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 6/11 \\ 2/11 \\ 3/11 \end{bmatrix}$$