Einführung in die Systemtheorie

Prof. Dr.-Ing. Jörg Raisch
Dipl.-Ing. Carsten Conradi

Prüfung

24. Juli 2006

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben auf vier Aufgabenblättern.

Aufgabe 1
Betrachten Sie das dynamische System:

$$\dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2\,y(t) = 0 \tag{1}$$

(a) Transformieren Sie Gl. (1) in ein System aus drei Differentialgleichungen 1. Ordnung, also in ein System

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) \tag{2}$$

mit

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und } x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = \dot{y}(t),\ x_3(t) = \ddot{y}(t). \tag{3}$$

(b) Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ aussagen?

(c) In dieser Teilaufgabe soll das System aus Gl. (1) stabilisiert werden. Zu diesem Zweck wird das System mit einer skalaren Stellgröße versehen. Das System hat dann folgende Gestalt:

$$\dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2\,y(t) = u(t) \tag{4}$$

Transformieren Sie (4) wieder in ein System aus drei Differentialgleichungen 1. Ordnung, also in ein System

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t). \tag{5}$$

(i.) Ist das System (5) vollständig zustandssteuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage.

(ii.) Benutzen Sie eine konstante Zustandsrückführung

$$u(t) = (r_1, r_2, r_3)\,\underline{x}(t) \tag{6}$$

und geben Sie die Dynamikmatrix A_c des aus Differentialgleichung (5) und Rückführung (6) bestehenden geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_c\,\underline{x}(t) \tag{7}$$

an.

(iii.) Ist es möglich, die reellen Parameter r_1, r_2 und r_3 so zu wählen, daß A_c die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$ besitzt? Wenn ja, geben Sie geeignete Koeffizienten r_1, r_2 und r_3 an.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Differenzengleichung

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mu - 1 & \frac{3}{2} - \mu \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \underline{x}(k) \tag{8}$$

mit dem reellen Parameter μ, $\mu \neq 1$ und den Anfangswerten:

$$x_1(0) = x_{10},\; x_2(0) = x_{20}. \tag{9}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2, sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{v}^{(2)}$ der Matrix A.

(b) Für welche Werte von μ ist die Ruhelage $\underline{x}_s = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(i) asymptotisch stabil

(ii) stabil

(iii) instabil?

(c) Für welche Werte von μ existieren außer $\underline{x}_s = \underline{0}$ noch weitere Ruhelagen des Systems (8)? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Führen Sie die Koordinatentransformation $\underline{x}(k) = T\underline{z}(k)$ durch. Dabei sei die Transformationsmatrix $T = [\underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(2)}]$ eine Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A, also $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{v}^{(2)}$ bilden. Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(k)$ und aus dieser die allgemeine Lösung $\underline{x}(k)$ im ursprünglichen Koordinatensystem.
<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Bezeichnung $\underline{z}_0 = T^{-1}\,\underline{x}_0$ für die Darstellung des Vektors der Anfangswerte $\underline{x}_0$ im neuen Koordinatensystem und behalten Sie diese Bezeichnung auch nach der Rücktransformation ins ursprüngliche Koordinatensystem bei. **Die Inversion der Matrix T ist zur Lösung dieser Aufgabe dann nicht mehr erforderlich!**

Aufgabe 3
Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\ (x_1(t) - 1)\ (x_2(t) - 4) \tag{10}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)\ (x_1(t) + 4) \tag{11}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_{10}$ und $x_2(0) = x_{20}$.

(a) Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems aus Gl. (10) und Gl. (11).

(b) Geben Sie die Jacobimatrix $J(x_{1s}, x_{2s})$ des Systems aus Gl. (10) und Gl. (11) für eine beliebige Ruhelage $\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{pmatrix}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Ruhelagen aus Teilaufgabe (a) auf asymptotische Stabilität.

Aufgabe 4
Ein Fertigungsprozeß soll durch eine Markov-Kette beschrieben werden. Der Prozeß besteht aus einem Depot D in dem die Rohlinge gelagert werden, zwei Produktionsprozessen M_1 und M_2, einer Qualtitätskontrolle Q, zwei Reinigungsstufen R_1 und R_2 und einem Lager L in dem auch eine Endkontrolle durchgeführt wird. Ein Rohling aus dem Depot D wird mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ von M_1 und mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ von M_2 bearbeitet. Alle Teile die von M_2 bearbeitet werden, müssen noch von M_1 nachbearbeitet werden. Alle Teile die M_1 verlassen müssen durch die Qualitätskontrolle Q, die entscheidet ob die Teile in R_1 oder R_2 gereinigt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil von Q nach R_1 kommt beträgt $p = \frac{1}{4}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil von Q nach R_2 kommt beträgt $p = \frac{3}{4}$. Da R_1 nicht so gut säubert wie R_2 muß ein Teil der in R_1 behandelten Teile noch in R_2 weiterbehandelt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil von R_1 nach R_2 kommt beträgt $p = \frac{1}{4}$. Alle anderen Teile kommen nach L. Alle Teile aus R_2 kommen ebenfalls nach L. In L findet eine Endkontrolle statt, die ein viertel der Teile nicht besteht. Diese Teile kommen zurück nach Q. Teile, die die Endkontrolle bestehen, verbleiben in L.

(a) Zeichnen Sie einen Graphen, der diesen Prozesse beschreibt. Verwenden Sie dabei Zustände

- s_1 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich im Depot D .
- s_2 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich im Produktionsprozeß M_1.
- s_3 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich im Produktionsprozeß M_2.
- s_4 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich in der Qualitätskontrolle Q.
- s_5 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich in der Reinigungsstufe R_1.
- s_6 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich in der Reinigungsstufe R_2.
- s_7 Ein Element des Fertigungsprozesses befindet sich im Lager L.

(b) Lesen Sie aus diesem Graphen die Übergangsmatrix A einer Markov-Kette $\underline{x}(k+1) = A\,\underline{x}(k)$ ab. Verwenden Sie dabei die Zustände

- x_1 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_1 befindet.
- x_2 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in $s2$ befindet.

x_3 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_3 befindet.

x_4 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_4 befindet.

x_5 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_5 befindet.

x_6 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_6 befindet.

x_7 Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig herausgegriffenes Element des Fertigungsprozesses in s_7 befindet.

(c) Berechnen Sie die stationäre Lösung dieser Markov-Kette.

Aufgabe 5
Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + e^{y(t)} = 1,\ y(0) = y_0. \tag{12}$$

(a) Berechnen Sie alle Ruhelagen y_s von Gl. (12).

(b) Linearsieren Sie Gl. (12) um jede der in (a) ermittelten Ruhelagen. Sie erhalten ein System der Form

$$\dot{\psi}(t) = a(y_s)\psi(t). \tag{13}$$

(c) Sind diese Ruhelagen

(1.) asymptotisch stabil,

(2.) stabil,

(3.) instabil?

Begründen Sie Ihre Aussagen.