Zusammenfassung Systemtheorie

1. Mathematische Grundlagen

Determinante einer Matrix **A**

ND -

2x2: $$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

HD +

ND-

3x3: $$\det(A) = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{11} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} +(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) \\ +(a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) \\ -(a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}) - (a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}) \end{matrix}$$

HD+

Eigenwerte einer Matrix **A**

$\det(\lambda I - A) = 0$ $\lambda^{(i)}$ sind dann die Eigenwerte

Eigenvektoren einer Matrix **A**

die oben erhaltenen Eigenwerte $\lambda^{(i)}$ in $(\lambda I - A) \cdot \underline{v} = \underline{0}$ einsetzen und man erhält die Eigenvektoren $\underline{v}^{(i)}$ der Art $\underline{v} = c \cdot \underline{\tilde{v}}$

Inverse Matrix A^{-1} einer Matrix **A**

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

wenn $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dann $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Markov-Kette

p_{ij} → Wahrscheinlichkeit, mit der Zustand **j** in den Zustand **i** übergeht

$P=[p_{ij}]$ Wahrscheinlichkeitsmatrix

stationäre Lösung: $$\underline{x}_S = P \cdot \underline{x}_S$$ $$\Rightarrow (P - I) \cdot \underline{x}_S = \underline{0}$$

$\underline{x}_S$ ist die stationäre Lösung

wichtig: $\sum x_i = 1$

2. Differenzengleichungen

- diskrete Zeitachse
- allg.: x(k+1)=f(x(k))

Ruhelagen, stationäre Lsg

$x(k+1) = x(k) = x_S$

$x_S^{(i)}$ sind die Ruhelagen

Linearisierung

mit Taylorreihe:

allg: $$f(x) = f(x_S) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}(x - x_S) + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_S}(x - x_S^2) + \left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x=x_S}(x - x_S^3) + ...$$

Abbruch der Taylorreihe nach dem linearen Glied.

$$\Rightarrow f(x) = f(x_S) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}(x - x_S)$$

da nach Definition der Ruhelage: $f(x_S) = x_S$

$$\Rightarrow x(k+1) = x_S + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}(x - x_S)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x(k+1) - x_S}_{\Psi(k+1)} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}\underbrace{(x - x_S)}_{\Psi(k)}$$

$$\Rightarrow \Psi(k+1) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S} \cdot \Psi(k)$$

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}$ $< |1|$, dann asymptotisch stabil

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}$ $= |1|$, dann stabil

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_S}$ $> |1|$, dann instabil

Wechsel des Koordinatensystems

$\underline{x}$ Darstellung im **alten** Kooerdinatensystem

$\underline{z}$ Darstellung im **neuen** Kooerdinatensystem

$$\underline{x}(k) = T \cdot \underline{z}(k)$$
$$\underline{x}(k+1) = T \cdot \underline{z}(k+1) \quad \Big| \cdot T^{-1}$$
$$T^{-1} \cdot \underline{x}(k+1) = \underline{z}(k+1)$$
$$\underline{z}(k+1) = T^{-1} \cdot \underline{x}(k+1) \quad \Big| \; \underline{x}(k+1) = A \cdot \underline{x}(k)$$
$$\underline{z}(k+1) = T^{-1} \cdot A \cdot \underline{x}(k) \quad \Big| \; \underline{x}(k) = T \cdot \underline{z}(k)$$
$$\underline{z}(k+1) = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{\text{diag}(\lambda)} \cdot \underline{z}(k)$$

$$\underline{z}(k+1) = diag(\lambda) \cdot \underline{z}(k)$$

λ – Eigenwerte der Matrix **A**

vektorielles System zerfällt in ***i*** unabhangige skalare Systeme:

$$z_i(k+1) = \lambda_i \cdot z_i(k)$$

Lösung: $z_i(k) = \lambda_i^k \cdot z_{i0}$

denn:

$$z_i(1) = \lambda_i \cdot z_{i0}$$
$$z_i(2) = \lambda_i \cdot z_i(1) = \lambda_i^2 \cdot z_{i0}$$
$$z_i(3) = \lambda_i \cdot z_i(2) = \lambda_i^3 \cdot z_{i0}$$
$$\vdots$$
$$z_i(k) = \lambda_i \cdot z_i(k-1) = \lambda_i^k \cdot z_{i0}$$

λ_i^k < |1| für alle ***i***, dann asymptotisch stabil

λ_i^k > |1| für min. ein ***i***, dann instabil

Instabilität kann auch bei mehrfachen EW mit Betrag 1 auftreten!!!

asymptotische Stabilität ist unabhängig vom gewähltem Koordinatensystem!!!

3. Differentialgleichungen

- kontinuierliche Zeitachse

Transformation in ein System von Dgl 1. Ordnung

$$x_1 = y \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \qquad = f_1(x_1, x_2)$$
$$x_2 = \dot{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} \qquad = f_2(x_1, x_2)$$

Ruhelagen, stationäre Lsg

für sationäre Lösungen gilt: $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$

und man erhält die RL $\underline{x}_S^{(i)}$

Untersuchung auf Stabilität

Berechne: $\det(\lambda I - J(x_{S1}, x_{S2})) = 0$

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

λ_i sind dann die EW

Achtung! Hier können auch komplex-wertige EW auftreten.

λ_i < 0 für alle ***i***, dann asymptotisch stabil
λ_i > 0 für min. ein ***i***, dann instabil

Wechsel des Koordinatensystem

$$\underline{x}(t) = T \cdot \underline{z}(t)$$
$$\underline{z}(t) = T^{-1} \cdot \underline{x}(t)$$
$$\dot{\underline{z}}(t) = T^{-1} \cdot \dot{\underline{x}}(t) \quad \left|\dot{\underline{x}}(t) = A \cdot \underline{x}(t)\right.$$
$$\dot{\underline{z}}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot \underline{x}(t) \quad \left|\underline{x}(t) = T \cdot \underline{z}(t)\right.$$
$$\dot{\underline{z}}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \underline{z}(t)$$
$$\dot{\underline{z}}(t) = diag(\lambda) \cdot \underline{z}(t)$$
$$\underline{z}(t) = diag(e^{\lambda_i \cdot t}) \cdot \underline{z}_0$$

$$\underline{x}(t) = T \cdot diag(e^{\lambda_i \cdot t}) \cdot T^{-1} \cdot \underline{x}_0$$

vektorielles System zerfällt in ***i*** unabhängige skalare Systeme

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i \cdot z_{i0}$$
$$z_i(t) = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot z_{i0}$$