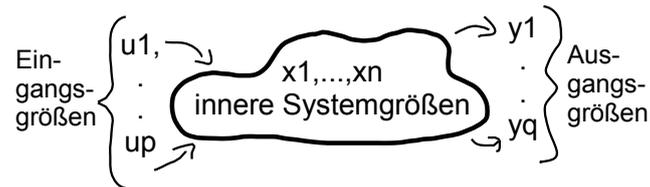


# 1 Grundbegriffe

## 1.1 System

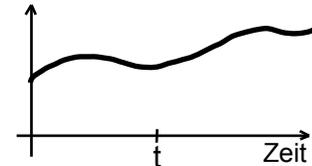
**System** Ein System ist eine abgegrenzte Zusammenfassung von Elementen, die untereinander und mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung stehen.



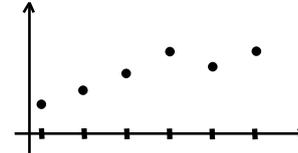
## 1.2 Signal

**Signal** Ein Signal ist eine Größe, die sich mit der Zeit ändert.

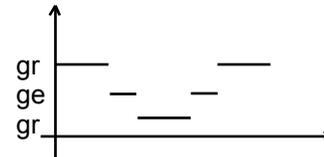
**kontinuierliches Signal:**  $T$  kontinuierlich,  $T = \mathbb{R}^+$ ;  
 $X : T \rightarrow X$ ;  $X$  kontinuierlich, z.B.  $[-273, \infty]$   
 Eine Abbildung von der Zeitachse in den Signalraum.



**zeitdiskretes Signal:** z.B. Temperatursensor, der von einem Computer abgefragt wird.  $T = \{k T_S | k \in \mathbb{N}_0\}$



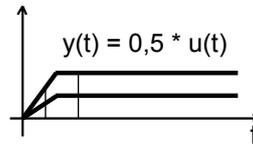
**wertediskretes Signal:** z.B. Verkehrsampel, T kont.,  $\mathcal{X}$  diskret,  $\mathcal{X} = \{\text{rot, gelb, grün}\}$



**diskretes Signal:** zeit- und wertediskret

### 1.3 statische und dynamische Systeme

statisch  $y(t) = f(u(t))$



In einem dynamischen System hängt der Ausgang  $y(t)/y(k)$  nicht nur vom aktuellen Zeitpunkt  $t/k$  ab, sondern auch von vorhergehenden. Dazu gehören Differenzen-, Differentialgleichungen und Gleichungen mit Integralen (Gedächtnis, da von der Vergangenheit bis in die Gegenwart integriert wird).

- kausal  $y(t) = f(u(\tau))$  mit  $\tau \leq t$
- streng kausal  $y(t) = f(u(\tau))$  mit  $\tau < t$
- sonst nicht kausal

⇒ Beschäftigung mit (kausalen) dynamischen Systemen

## 2 Beispiele

siehe Hefter

## 3 Klassifikation von dynamischen Systemen

$$y(t) = G\{u(t)\}$$

$G$  ist ein Operator und wird auf einen Signalverlauf angewendet.

Wechselwirkung zwischen Signalen:  $x = F(u); y = H(x, u)$

Es ist keine Abbildung im mathematischen Sinne. Ein Signalverlauf wird auf einen anderen Signalverlauf abgebildet.

### 3.1 Linearität

**Linearität** Das System  $y = G\{u\}$  heißt linear, wenn für alle konst.  $c_1, c_2$  gilt:

$$G\{c_1u_1 + c_2u_2\} = c_1G\{u_1\} + c_2G\{u_2\} \quad (1)$$

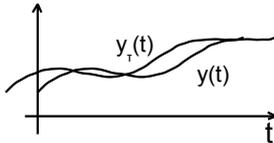
$$y(t) = au(t) \Rightarrow \text{linear}; \quad y(t) = au(t) + b \Rightarrow \text{nicht linear} \quad (2)$$

Beispiele für lineare (nicht lineare) Systeme

<u>Linear</u>	<u>nicht Linear</u>
$\frac{d}{dt}, \int, \pm, \cdot c(t), \dots$	$y^2, y \cdot \dot{y}, \sin(y), e^y,  y , +c, \dots$

### 3.2 Zeitinvarianz

Zeitverschiebung: („Shift Operator“)



$$S_\tau\{Y\} = G\{S_\tau\{u\}\} \quad (3)$$

u Eingang, y Ausgang

Bei Zeitinvarianz darf die Zeit t nicht alleine auftauchen.

z.B.  $y = \frac{1}{4}tu$  ist zeitvariant

Beispiele für zeitvariante (zeitinvariante) Systeme

<u>zeit variant</u>	<u>zeitinvariant</u>
$y = \int_0^t \tau u(\tau) d\tau,$ da $\dot{y} = t u(t)$ zeitvariant	$y = \int_0^t u(\tau) d\tau,$ da $\dot{y} = u(t)$ zeitinvariant

### 3.3 Autonomie

**Autonomie** Ein System heißt autonom, wenn es keine Eingangssignale hat. Oft wird autonom auch so verstanden: ohne Eingang und zeitinvariant.

## 4 Differenzgleichungen

### 4.1 Vorbemerkungen

- diskrete Zeitpunkte  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$   
Diff-gl.: Relation zw. Signalwert an verschiedenen Zeitpunkten
  1. einfaches Populationsmodell (2.2)
  2. Modell für eine Volkswirtschaft (2.3)
- kontinuierliche Zeit  $T = \mathbb{R}^+$  Zusammenhang zw. Signalwert und Ableitungen des Signals zu einem Zeitpunkt.
  1. Räuber-Beute-Modell

### 4.2 Autonome Differenzgl.

Autonom: keine Eingangsgröße und zeitinvariant

$$\tilde{f}(Y(k+n), Y(k+n-1), \dots, Y(k)) = 0 \quad (4)$$

$n$  bestimmt die Ordnung der Diff-gl.  
Anfangsbedingungen (AB):  $n$ -Stück

$$Y(0) = Y_0, Y(1) = Y_1, \dots, Y(n-1) = Y_{n-1} \quad (5)$$

Gesucht: Signal  $Y : T \rightarrow \mathbb{R}$

$Y$  heißt Lösung von (Formel 4) und (Formel 5), wenn es (4) und (5) erfüllt.

#### 4.2.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Problem 1: Nicht alle Diff-gl. besitzen eine (reelle) Lösung.

$$\text{z.B. } Y(k+1)^2 + Y(k)^2 = -1; \quad Y(k) \in \mathbb{R}$$

Für keine (AB) existiert eine Lösung.

Problem 2: Wenn eine Lösung existiert, muss sie nicht eindeutig sein.

$$\text{z.B. } (Y(k+1) - Y(k))^2 = Y(k)$$

Satz: Wenn die Diff-gl. (4) in die Form (Formel 6)

$$Y(k+n) = g(Y(k+n-1), \dots, Y(k)) \quad (6)$$

gebracht werden kann, besitzt sie für jede (AB) eine eindeutige Lösung.

#### 4.2.2 Vektorielle Diff-gl. n-ter Ordnung

geg:  $Y(k+n) = g(Y(k+n-1), \dots, Y(k))$  und  $Y(0) = Y_0, Y(1) = Y_1, \dots, Y(n-1) = Y_{n-1}$

Definitionen:

- $x_1(k) := Y(k)$
- $x_2(k) := Y(k+1)$
- $\vdots$
- $x_n(k) := Y(k+n-1)$

Diff-gl. für „neue Variable“:

- $x_1(k+1) := x_2(k)$
- $x_2(k+1) := x_3(k)$
- $\vdots$
- $x_n(k+1) := g(x_n(k), \dots, x_1(k))$

Vektorenschreibweise:  $\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k))$ 

$$\underline{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

stationäre Lösung / Gleichgewichtspunkt / Ruhelage; Eine stationäre Lösung ist zeitlich konstant.

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k)) \quad (9)$$

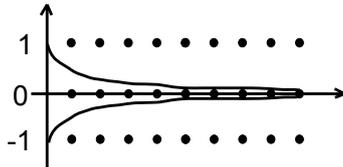
Bestimmung von stationären Lösungen (Formel 9):  $\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) = \underline{x}_s$ 

$\Rightarrow$  Bestimmungsgleichung:  $\underline{x}(s) = \underline{f}(\underline{x}(k))$

Es kann keine, eine, „mehrere“ und unendlich viele Lösungen geben.

 $x_s = x_s^2 - 1$  keine Lösung; $x_s = 3x_s$  1. Lösung

$x_s = x_s^3$  mehrere Lösungen



$$\underbrace{x_{s1} = 0; x_{s2} = -1; x_{s3} = 1}$$

Lösungen mit verschiedenen Charakteren

-1, 1 instabil

**Stabil**, wenn keine Lösung, die in ihrer Umgebung beginnt wegstrebt.

Eine Ruhelage heißt:

**Asymptotisch stabil**, alle Lösungen, die in ihrer Umgebung starten auf sie zustreben.

**Instabil**, wenn Lösungen aus ihrer Umgebung wegstreben.

Es kann für ein und dasselbe System stabile, asymptotisch stabile und instabile Ruhelagen geben. Darum ist es nicht sinnvoll von der Stabilität eines Systems zu sprechen.

Die Stabilität ist auf eine Ruhelage bezogen.

### 4.2.3 Linearisierung

skalares System:  $x(k+1) = f(x(k))$

Berechnung der Ruhelage (-n):  $x_s, \dots$

Linearisierung um jede Ruhelage

Taylorentwicklung von  $f(x(k))$  um die Ruhelage  $x_s$

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (10)$$

$$x(k+1) = f(x_s) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_s} (x(k) - x_s) + \underbrace{\dots}_{\approx 0} \quad (11)$$

$$\underbrace{x(k+1) - x_s}_{\xi(k+1)} = \underbrace{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_s}}_a \underbrace{(x(k) - x_s)}_{\xi(k)} \quad (12)$$

$\Rightarrow \xi(k+1) = a \xi(k)$        $\xi(k+1), \xi(k)$  sind die Abweichungen von der Ruhelage

- $|a| < 1$  asymptotisch stabil
- $|a| = 1$  stabil, nicht asymptotisch stabil (bedarf weiterer Untersuchungen)
- $|a| > 1$  instabil

#### 4.2.4 Linearisierung von vektoriellen Systemen

$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k))$        $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$        $\underline{x}_s = \underline{f}(\underline{x}_s) \rightarrow$  vektorielle algebraische Gleichung

$$\underbrace{\underline{x}(k+1)}_{\text{n-Vektor}} = \underbrace{\underline{f}(\underline{x}_s)}_{\text{n-Vektor}} + \underbrace{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_s}}_{\text{n} \times \text{n Matrix}} \underbrace{(\underline{x}(k) - \underline{x}_s)}_{\text{n-Vektor}} \quad (13)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = A \quad (16)$$

Jacobi Matrix von  $\underline{f}$ 

$$\underline{\xi}(k+1) = A(\underline{x}_s) \underline{\xi}(k) \quad (17)$$

Lineare vek. Diff-gl.

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k)$$

Transformation in ein neues Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  (Eigenvektoren von A)

$$\underline{x} = V \underline{x}' \quad \text{Darstellung altes / neues Koordinatensystem}$$

$$V \underline{x}'(k+1) = A V \underline{x}'(k) \Rightarrow \underline{x}'(k+1) = V^{-1} A V \underline{x}'(k) \Rightarrow \underline{x}'(k+1) = D \underline{x}'(k)$$

Das System „zerfällt“ in unabhängige skalare Systeme.

Einschränkung:

- A besitzt nur einfache Eigenwerte.
- $\rightarrow$  A besitzt n-linear unabhängige Eigenvektoren.

Lösung im alten Koordinatensystem:

$$\underline{x}'(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \underline{x_0}' \quad (18)$$

$$\underline{x}(k) = V \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1} \underline{x_0} \quad (19)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}'(k) = \underline{0} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}(k) = \underline{0} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1; i = 1, \dots, n$$

$\hookrightarrow$  asymptotisch stabil

Eigenschaft der Stabilität hängt nur von den Beträgen der Eigenwerte ab.

$\exists |\lambda_i| > 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow$  Instabilität

Instabilität kann für mehrfache Eigenwerte mit Betrag 1 auftreten.

#### 4.2.5 Stationäre Lösung

$$(I - A) \underline{x_s} = \underline{0}$$

2 Fälle:

$(I - A)$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \det(I - A) \neq 0$

$$\underline{x}_s = (I - A)^{-1} \quad \cdots \quad \underline{0} \Rightarrow \underline{x}_s = \underline{0}$$

ist einzige stationäre Lösung

$(I - A)$  ist nicht invertierbar  $\Leftrightarrow \det(I - A) = 0$

Es existieren mehrere Lösungen.

$\det(I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$  EW von A

Alle zum Eigenwert  $\lambda = 1$  gehörigen Eigenvektoren sind stationäre Lösungen  $\Rightarrow$  unendlich viele stationäre Lösungen

#### 4.2.6 „Rezept“ zum Lösen von Differenzgleichungen

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) \quad // \text{ Ord. } n$$

1. EW und EV

2.  $T$  und  $T^{-1}$   $\underline{x}(k) = T \underline{z}(k)$

3.

$$\begin{aligned} \underline{z}(k+1) &= T^{-1} A T \underline{z}(k) \\ &= \text{diag}\{\lambda_i\} \underline{z}(k) \\ \underline{z}(k) &= \text{diag}\{\lambda_i^k\} \underline{z}_0 \\ \underline{z}(k) &= T^{-1} \underline{x}(k) \\ \Rightarrow \underline{x}(k) &= T \text{diag}\{\lambda_i^k\} T^{-1} \underline{x}_0 \end{aligned} \tag{20}$$

## 5 Markov-Ketten

**Markov-Kette** Eine Markov-Kette ist ein System mit  $n$ -diskreten Zuständen,  $S_1, \dots, S_n$  und Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$   $i, j = 1, \dots, n$ .

$p_{ij}$  ist die Wkt. mit der das System von  $S_j$  in  $S_i$  übergeht.

$$[p_{ij}] \quad \text{Matrix} \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \quad (\text{Spaltensumme} = 1)$$

$$\Rightarrow \text{allg. Übergang: } \underline{x}(k+1) = P \underline{x}(k) \quad (21)$$

Fragen:

1.  $\exists \underline{x}_s = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}(k)$ ?
2. Existiert eine stationäre Lösung  $\underline{x}_s$  von (21) für die  $\sum_{i=1}^n x_i(k) = 1$  gilt?
3. Konvergiert  $\underline{x}(k)$  gegen  $\underline{x}_s$ ?

zu a) stationäre Lösung von (21):

$$\begin{aligned} \underline{x}_s &= P \underline{x}_s \\ (I - P) \underline{x}_s &= \underline{0} \\ \exists \underline{x}_s = \underline{0} &\Leftrightarrow (I - P) \text{ nicht inv.} \Leftrightarrow \det(I - P) = 0 \Leftrightarrow \text{min. ein EW von } P \text{ ist } 1 \text{ (siehe 4.2.5)} \end{aligned}$$

Eine reelle Matrix  $A = [a_{ij}]$  heißt positiv, wenn  $a_{ij} > 0, \forall i, j$ .

Eine reelle Matrix  $A = [a_{ij}]$  heißt nicht negativ, wenn  $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$ .

**Perron-Frobenius** Eine positive quadratische Matrix  $A$  besitzt einen einfachen reellen Eigenwert  $\lambda_1 > 0$  (P-F EW), der alle anderen Eigenwert betragsmäßig dominiert  $|\lambda_i| < \lambda_1, i = 2, 3, \dots$  ( $\mathcal{A}$ ) und einen dazugehörigen positiven Eigenvektor besitzt.

Dies gilt auch für quadratische nicht negative Matrizen  $A \neq 0$  für die  $A^n$  positiv für  $n \in \mathbb{N}$ .

Für die nicht negative Matrix  $A$  analog ( $\mathcal{A}$ ) nur mit Eigenwert  $\lambda_1 \geq 0$  und  $|\lambda_i| \leq \lambda_1, i = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & \text{Grenzen für } \lambda_1? \quad A \underline{v} = \lambda_1 \underline{v} \\ \Delta_1 v_1 + \dots + \Delta_n v_n = \lambda_1 (v_1 + \dots + v_n) \quad \min \Delta_i \leq \lambda_1 \leq \max \Delta_i \end{aligned}$$

Für Markov-Ketten  $\rightarrow \lambda_1 = 1$

## 6 Differentialgleichungen

- kontinuierliche Zeitachse:  $T = \mathbb{R}^+$
- Zusammenhang zwischen Signalwerten und Ableitungen des Signals zu einem Zeitpunkt.

### 6.1 Autonome DGL

DGL n-ter Ordnung  
 $\hookrightarrow$  höchste Ableitung

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f \left( y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right) \quad (22)$$

### 6.1.1 Vektorielle DGL erster Ordnung

Jede DGL n-ter Ordnung läßt sich in n-DGL 1.Ordnung umformen mittels:

- $x_1(t) := y(t)$
- $x_2(t) := \dot{y}(t)$
- $\vdots$
- $x_n(t) := y^{(n-1)}(t)$
- $\dot{x}_1(t) := x_2(t)$
- $\dot{x}_2(t) := x_3(t)$
- $\vdots$
- $\dot{x}_n(t) := f(x_1(t), \dots, x_n(t))$

### 6.1.2 Stationäre Lösungen

zeitlich konstante Lösungen

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_s = \text{const.}$$

Bestimmungsgleichung:  $\dot{\underline{x}}_s = \underline{f}(\underline{x}_s) = \underline{0}$

### 6.1.3 Linearisierung um Ruhelagen

Taylorentwicklung um  $\underline{x}_s$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \quad (23)$$

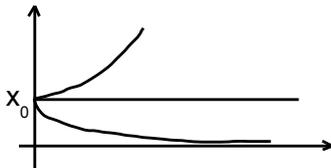
$$\dot{\underline{\xi}}(t) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_s} \xi(t) \quad (24)$$

$$A(\underline{x}_s) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_s} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_s} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_s} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (25)$$

## 6.2 Autonome lineare DGL

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t), A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad \text{skalärer Fall} \quad \text{Lösung: } x(t) = x_0 e^{at}$$



$a > 0$  instabil

$a = 0$  stabil

$a < 0$  asymptotisch stabil

Einschränkung:

- A besitzt nur einfache Eigenwerte.
- $\rightarrow$  A besitzt n-linear unabhängige Eigenvektoren.

Wechsel des Koordinatensystems und Lösung des Systems:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}(t) &= \underbrace{[v_1 \ \dots \ v_n]}_T \underline{z}(t) \\
 \dot{\underline{z}}(t) &= \text{diag}\{\lambda_i\} \underline{z}(t) \\
 \underline{z}(t) &= \text{diag}\{e^{\lambda_i t}\} \underline{z}_0 \\
 \underline{x}(t) &= T \text{diag}\{e^{\lambda_i t}\} T^{-1} \underline{x}_0
 \end{aligned} \tag{26}$$

Einsetzen in DGL:  $\dot{\underline{z}} = \text{diag}\{\lambda_i\} \underline{z}(t) \quad i = 1, \dots, n$

Stabilität hängt nur vom Realteil ab.

$\underline{x}_s$  ist asymptotisch stabil  $\Leftrightarrow \text{Re}\{\lambda_i\} < 0, i = 1, \dots, n$

$\underline{x}_s$  ist instabil  $\Leftrightarrow \text{Re}\{\lambda_i\} > 0$ , für min. ein i

Keine Stabilitätsaussage möglich wenn  $\text{Re}\{\lambda_i\} = 0$ .

## 7 Steuerung und Regelung

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$  bzw.  $\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k))$

Systeme mit Eingangs- (stell-)größe

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (27)$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) \quad (28)$$

$u(t), u(k)$  frei wählbare Signale

**Steuerbarkeit** Die (DGL (27) / Diff-gl. (28)) heißt vollständig zustandssteuerbar, wenn durch geeignete Wahl von  $(u(t), 0 \leq t \leq T / u(k), 0 \leq k \leq N; N \in \mathbb{N})$ , der Zustand in (endlicher Zeit / endlich vielen Zeitschritten), aus einem beliebigen Anfangspunkt  $x_0$  in einen beliebigen Endpunkt  $x_e$  gebracht werden kann.

## 7.1 Lineare zeitinvariante Systeme mit skalarer Eingangsgröße

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \quad (29)$$

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) \quad (30)$$

$A$  ist eine  $n \times n$  Matrix;  $\underline{x}(k), \underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\underline{b}$  Spaltenvektor mit  $n$ -Elementen

$$\underbrace{\underline{x}_e - A^N \underline{x}_0}_{\text{beliebig, aber bekannt}} = \underbrace{[A^{N-1}\underline{b} \ \dots \ A\underline{b} \ \underline{b}]}_{\text{Matrix } n\text{-Zeilen, } N\text{-Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}}_{N\text{-Elemente}} \quad (31)$$

1.  $N < n$ , nicht lösbar

2.  $N=n$ , lösbar  $\Leftrightarrow \text{Rang}([\underline{b} \ A\underline{b} \ \dots \ A^{N-1}\underline{b}]) = n$

3.  $N > n$ , „Cayley-Hamilton-Theorem“

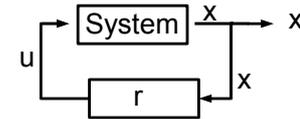
Das System ist genau dann steuerbar, wenn mit  $\mathcal{C} = [\underline{b} \ A\underline{b} \ \dots]$  gilt:  $\text{rank}(\mathcal{C}) = n$ . Ist die Stellgröße  $u$  skalar, so ist  $\mathcal{C}$  quadratisch und es gilt:  $\text{rank}(\mathcal{C}) = n \Leftrightarrow \det(\mathcal{C}) \neq 0$

## 7.2 DGL des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + \underline{b} \underline{r}^T \underline{x}(k) \\ \underline{x}(k+1) &= \underbrace{(A + \underline{b} \underline{r}^T)}_{:=A_g} \underline{x}(k) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b} \underline{r}^T \underline{x}(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) &= \underbrace{(A + \underline{b} \underline{r}^T)}_{:=A_g} \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\underline{r}^T = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (34)$$



Das Verhalten des geschlossenen Systems (32) bzw. (33) ist allein durch die Eigenwerte von  $A_g$  bestimmt. Die Eigenwerte von  $A_g$  sind genau dann durch die Wahl der Rückführparameter  $r_i$  einer konstanten Zustandsrückführung beliebig reell oder konjugiert komplex wählbar, wenn das System (29) bzw. (30) steuerbar ist.

Wahl der  $r_i$ ?

1. Wunscheigenwerte  $\lambda_i^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Dabei folgendes beachten: Je „negativer“ (kontinuierlich) die Eigenwerte bzw. je kleiner deren Betrag (diskret) ist, desto schneller reagiert das System auf Abweichungen von der Ruhelage. Der Nachteil dabei ist, dass der Betrag der Stellgröße  $u$  auch zunimmt.

2. Aus Wunscheigenwerten  $\lambda_i^*$  Wunschpolynom bilden:

$$P^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*) \cdot (\lambda - \lambda_2^*) \cdots (\lambda - \lambda_n^*)$$

3. Wunschpolynom ausmultiplizieren:

$$P^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_0^* = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^* \lambda^i$$

4. Charakterisches Polynom von  $A_g$  berechnen:

$$P(\lambda) = |\lambda \cdot I - A_g| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$

5. In den  $a_i^*$  stecken jetzt die  $\lambda_i^*$ , in den  $a_i$  die  $r_i$ .

Ein Koeffizientenvergleich  $a_i^* \stackrel{!}{=} a_i$  führt auf die  $r_i$ .

- lineares System ist asymptotisch stabil

Anforderungen:

- Ruhelage  $\underline{x}_s$  des nichtlinearen Systems ist asymptotisch stabil

Durch eine konstante Zustandsrückführung  $u(k) = \underline{r}^T x(k)$  /  $u(t) = \underline{r}^T x(t)$  sind die Eigenwerte der Zustandsgleichungen (29 und 30) frei wählbar.

$$\text{Steuerbarkeit} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{vollständige Zustandssteuerbarkeit} \\ \updownarrow \\ \text{freie Wählbarkeit} \end{array} \right.$$