Anhang 3: Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeiger-Diagramm

PN0509

Für die Darstellung und Berechnung von Wechselstromkreisen sind sogenannte Zeiger-Diagramme sehr von Nutzen. Dies sind instruktive grafische Darstellungen der Momentanwerte der zeitabhängigen Größen Spannung und Strom einerseits sowie der linearen Netzwerke aus OHMschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten andererseits durch zweidimensionale "Zeiger".
Ein Zeiger (engl. Bezeichnung phasor) ist die Darstellung einer komplexen Zahl in der GAUßschen Zahlenebene, in einem sog. ARGAND-Diagramm, d.h. Imaginärteil auf der y-Achse gegen Realteil auf der x-Achse. Da die komplexen Zahlen einen Körper bilden, sind Zeiger keine zweidimensionalen Vektoren, genügen aber ähnlichen Summationsregeln (nämlich denen für komplexe Zahlen).
Spannungen und Ströme werden durch die zeitabhängigen komplexen Zahlen $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ beschrieben. Deren Realteile (und die Imaginärteile) liefern die beobachtbaren sinusförmigen Verläufe. Impedanzen von linearen Netzwerken sind zeitunabhängige komplexe Zahlen.

A3.1 Zusammenhang von Strom und Spannung an linearen Netzwerken aus OHMschem Widerstand, Kondensator und Spule

a) OHMscher Widerstand

Legt man an einen OHMschen Widerstand R eine cosinusförmige Wechselspannung $U = U_0 \cos \omega t$ an, so fließt der Strom $I = I_0 \cos \omega t$ mit $I_0 = U_0/R$.
Die Scheitelwerte U_0, I_0 von Strom und Spannung sind einander proportional, und **die zeitlichen Phasenlagen beider sind gleich.**

b) Kapazität (Kondensator)

Ein Kondensator der Kapazität C trägt die Ladung $Q = CU$. Mit $U = U_0 \cos \omega t$ und $I = dQ/dt$ folgt $I = C\, dU/dt = -\omega C U_0 \sin \omega t$.
Dies formen wir um zu $I = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ mit $I_0 = \omega C U_0$.
Wie beim OHMschen Widerstand sind die Scheitelwerte von Strom und Spannung einander proportional, aber **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode nach.**

Die frequenzabhängige Größe

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

spielt die Rolle eines Widerstandes und wird als **Wechselstromwiderstand einer Kapazität** bezeichnet. Ein Kondensator hat also bei niedrigen Frequenzen einen großen, bei hohen einen kleinen Wechselstromwiderstand.

c) Induktivität (widerstandslose Spule)

Der durch eine Spule fließende Strom I erzeugt in ihrer Windungsfläche den magnetischen Fluss $\Phi = LI$. Der Faktor L heißt die Induktivität der Spule.
Ist I zeitabhängig, so wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung $U_{ind} = -\dot{\Phi} = -L \cdot dI/dt$ induziert.
Nach dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz gilt für die Summe der Spannungen im Kreis $U + U_{ind} = RI$, und wenn wir $R = 0$ setzten (ideale widerstandslose Spule), folgt $U = +L \cdot dI/dt$.
Dies können wir für $U = U_0 \cos \omega t$ durch $I = U_0/\omega L \sin \omega t = I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$ mit $I_0 = U_0/(\omega L)$ erfüllen.
Die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind einander proportional, **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor**. Der **Wechselstromwiderstand einer Induktivität**

$$Z_L = \omega L$$

steigt proportional zur Frequenz an.

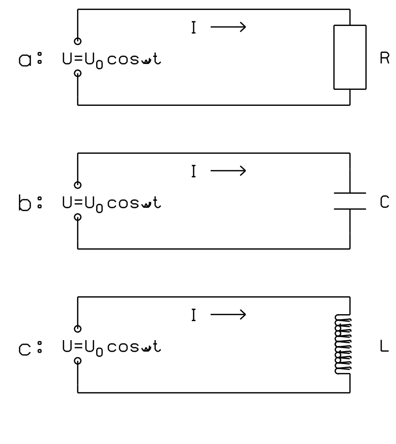


Abb. A 3 1

A3.2 Zeigerdiagramme

Das Zeigerdiagramm bildet ein bequemes und anschauliches Mittel zur Darstellung und Berechnung der Beziehung zwischen Strom und Spannung in Serien- und Parallelschaltungen (sog. linearen Netzwerken). In linearen Netzwerken besteht einerseits **Proportionalität** zwischen einer anliegenden cosinusförmigen Wechselspannung und dem resultierenden Strom, andererseits besteht zwischen Spannung und Strom eine feste, i. a. jedoch von Null verschiedene **Phasenverschiebung**.

Man stellt die Beziehungen zwischen Beträgen und Phasen der Ströme und Spannungen im **Zeigerdiagramm** dar, indem man U und I in der x-y-Ebene durch Zeiger der Länge U_0 bzw. I_0 repräsentiert. [Da U und I in verschiedenen Einheiten gemessen werden, kann für jede der beiden Größen zeichnerisch zunächst ein beliebiger Maßstab gewählt werden. Die Längen verschiedener Stromzeiger (bzw. verschiedener Spannungszeiger) müssen sich jedoch untereinander verhalten wie die zugehörigen Scheitelwerte (Amplituden).] Diese Zeiger rotieren mit der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn. Der von der positiven x-Achse linksherum zum Zeiger gemessene Winkel stellt die jeweilige momentane Phase dar. Die Projektion des Zeigers auf die x-Achse gibt dann den zugehörigen Momentanwert von Strom bzw. Spannung an. Haben U und I feste Phasenverschiebung relativ zueinander, dann bilden die entsprechenden Zeiger ein in sich starres, gleichmäßig rotierendes Gerüst. Für die Darstellung der **relativen** Phasen- und Amplitudenbeziehungen ist es daher gleichgültig, für welchen Zeitpunkt das Zeigerdiagramm gezeichnet wird.

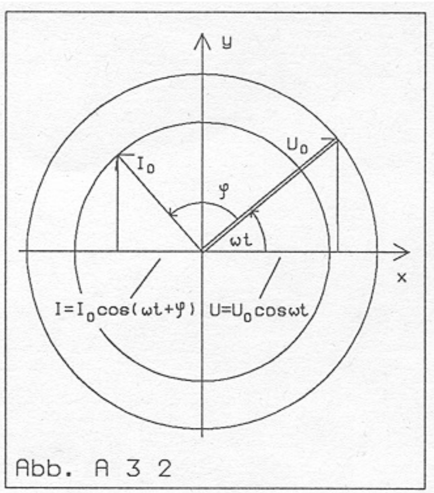


Abb. A3.2: Spannung und Strom in der komplexen Ebene

Die im Abschnitt A3.1 hergeleiteten Zusammenhänge zwischen U und I stellen sich im Zeigerdiagramm folgendermaßen dar:

a) **OHMscher Widerstand**
Strom- und Spannungszeiger sind stets parallel. Der Spannungszeiger ist R-mal so lang wie der Stromzeiger (in den jeweiligen, zeichnerisch beliebigen Einheiten).

b) **Kapazität**
Beide Zeiger bilden dauernd einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **nach**eilt, also z. B. nach unten zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist um den Faktor $Z_C = 1/\omega C$ länger als der Stromzeiger.

c) **Induktivität**
Beide Zeiger bilden ständig einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **vor**eilt, also z. B. nach oben zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist um den Faktor $Z_L = \omega L$ länger als der Stromzeiger.

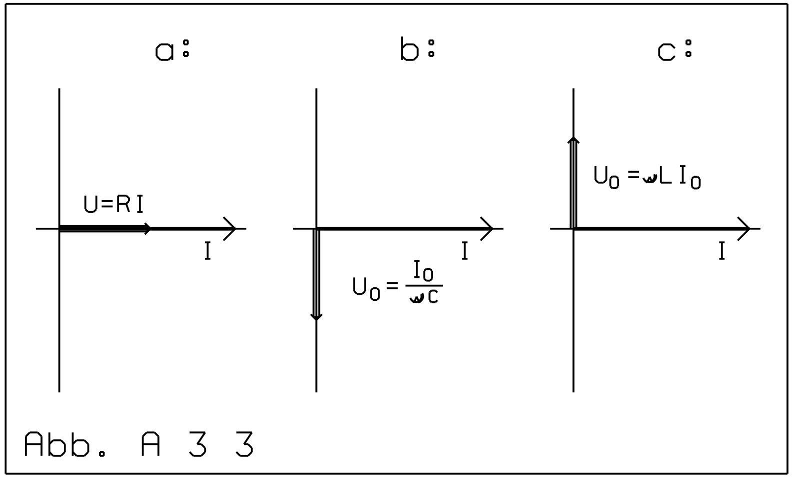


Abb. A3.3: Zeigerdiagramm a) des OHMschen Widerstands, b) der Kapazität, c) der Induktivität. Gezeichnet ist jeweils das Zeigerdiagramm für den Zeitpunkt, in dem I seinen Scheitelwert I_0 annimmt.

A3.2.1 Serienschaltung

Durch alle Elemente einer Serienschaltung fließt derselbe Strom nach Betrag und Phase (sonst müssten sich auf den Leitungen Ladungen zeitweise ansammeln oder von dort verschwinden). Wir können also in **ein** Diagramm den gemeinsamen Stromzeiger und die Spannungszeiger der einzelnen Elemente, deren Relation zum Stromzeiger wir kennen gelernt haben, eintragen. Die über alle in Reihe liegenden Elemente insgesamt abfallende momentane Spannung ist die Summe der Projektionen der einzelnen Spannungszeiger auf die x-Achse. Selbstverständlich dürfen nur gleichartige Größen summiert werden, z.B. Ströme nur zu Strömen. Da die Summe der Projektionen der Zeiger gleich der Projektion ihrer Vektorsumme ist, und zwar für alle ωt, gibt der Summenzeiger nach Länge und Orientierung den Betrag der gesamten Spannung und ihre Phase relativ zum Stromzeiger an. Mit dem ganzen Zeigergerüst rotiert auch der Zeiger der Gesamtspannung gleichmäßig linksherum. Das Diagramm zeigt jeweils einen beliebig herausgegriffenen Augenblick dieser Bewegung (im unten folgenden Beispiel den Moment, wenn I seinen Scheitelwert I_0 annimmt).

Da die Zeiger der Teilspannungen dem Betrage nach sämtlich proportional zu I_0 sind, gilt dies auch für den Betrag des Summenzeigers:

$$|U| = U_0 = Z\, I_0 \,.$$

Z ist der Wechselstromwiderstand der gesamten Reihenschaltung. Z und der Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom lassen sich aus dem Zeigerdiagramm mit Hilfe einfacher trigonometrischer Beziehungen berechnen.

Teilen wir alle Spannungszeiger durch I_0, so erhalten wir das dem Spannungszeigerdiagramm geometrisch ähnliche **Zeigerdiagramm der Wechselstromwiderstände**.

Wir lesen in Abb. A3.4 ab: $Z = \sqrt{R^2+(\omega L)^2} \qquad \tan\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$.

Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus. Die Teilspannungen an R und L sind beide weder miteinander noch mit der gesamten Spannung in Phase.

Beispiel: R und L in Serie (reale Spule)

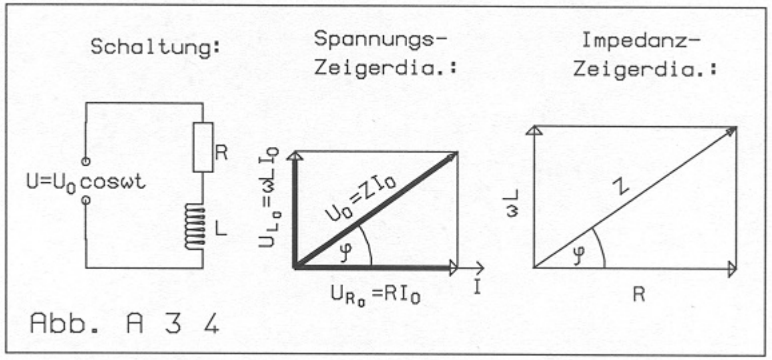


Abb. A 3 4

A3.2.2 Parallelschaltung

An allen parallelen Zweigen der Schaltung liegt dieselbe Spannung. Man kann daher in **ein** Diagramm den gemeinsamen Spannungszeiger und die Stromzeiger der einzelnen Zweige eintragen. Der Zeiger des insgesamt fließenden Stroms ergibt sich durch vektorielle Addition dieser Stromzeiger und liegt damit nach Betrag und Phase relativ zum Spannungszeiger fest.
Dem Stromzeigerdiagramm geometrisch ähnlich ist das **Zeigerdiagramm der Wechselstromleitwerte**, das aus ihm vermöge Division durch U_0 hervorgeht.

Beispiel: Parallelschaltung von R und L

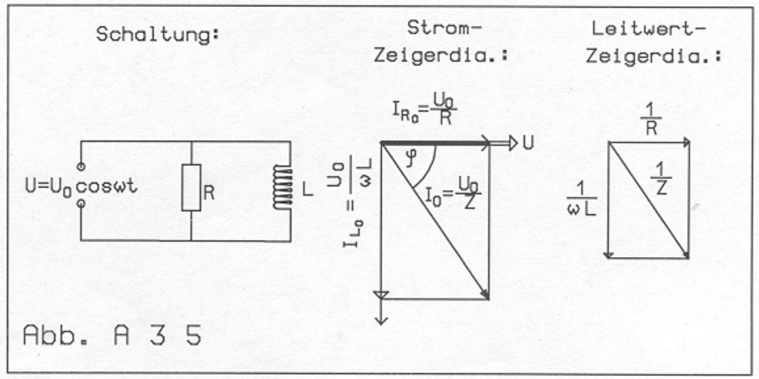
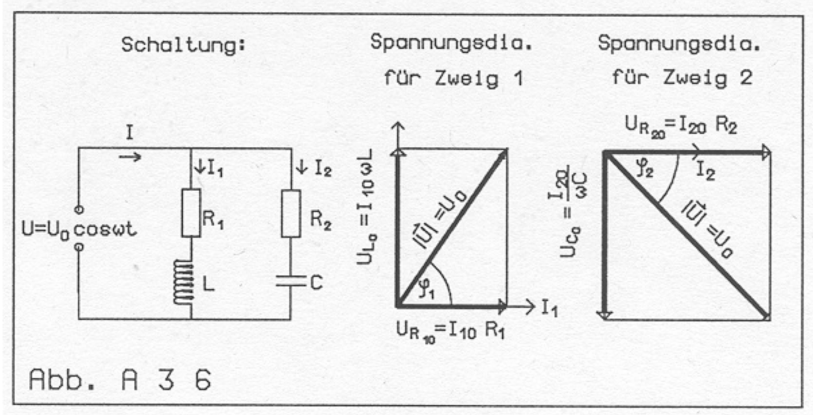


Abb. A 3 5

Aus der Abb. A3.5 ergeben sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \tan\varphi = \frac{R}{\omega L}.$$

Wiederum sind die Teilströme weder untereinander noch mit dem Gesamtstrom in Phase.



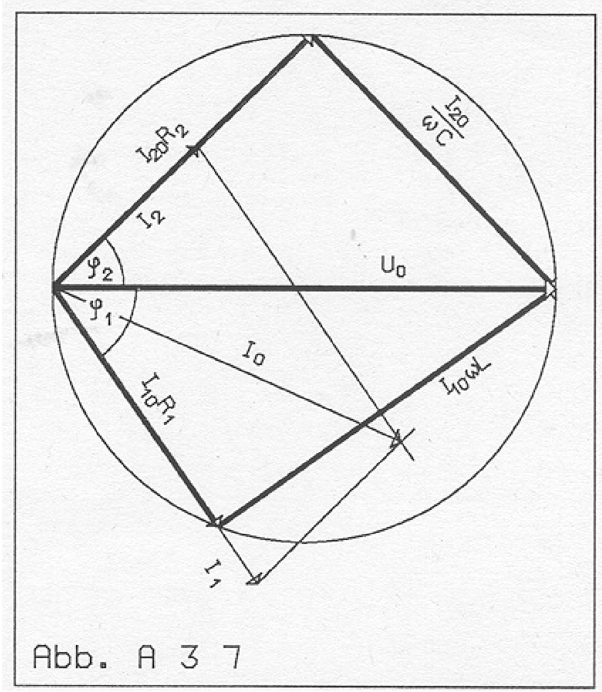
A3.3 Komplizierte Netzwerke

Besteht ein Netzwerk aus Parallel- und/oder Reihenschaltungen von Unterabschnitten, die ihrerseits wieder Parallel- und/oder Reihenschaltung der drei Grund-Schaltelemente sind, so muss man zunächst Zeigerdiagramme solcher Unterabschnitte konstruieren und an ihnen die Beziehungen zwischen den zugehörigen Teilspannungen und -strömen ermitteln. Die hierbei im jeweiligen Diagramm vorzugebenden Größen (bei Reihenschaltung der Strom, bei Parallelschaltung die Spannung) sind vorläufig nach Betrag und Phase relativ zu der die ganze Schaltung treibenden Spannung noch unbekannt. Die Maßstäbe dieser Teildiagramme sind zunächst beliebig und deshalb im allgemeinen verschieden, und auch die dargestellten Zeitpunkte stimmen i. a. nicht überein. Diese Teildiagramme sind nun zum Gesamtdiagramm zusammenzufügen, wobei sie so gedreht (Transformation des Zeitpunkts) und im Maßstab verändert werden müssen, dass durch alle miteinander in Reihe liegenden Teildiagramme derselbe Strom nach Betrag und Phase fließt und an allen parallel liegenden Teilzweigen dieselbe Spannung liegt.

Zwei Beispiele mögen dies verdeutlichen:

A3.3.1 Parallelschwingkreis mit 2 Ohmschen Widerständen

Beide rechten Diagramme in Abb. A3.6 müssen so gedreht und maßstäblich angepasst werden, dass die Zeiger $\vec{U}$ zur Deckung kommen, da an beiden Zweigen dieselbe Spannung liegt. Dabei ergibt sich automatisch die relative Lage und Größe von I_1 und I_2, schließlich auch der Zeiger des gesamten Strom $I = I_1 + I_2$ (Vektorsumme!). Wegen der rechten Winkel in den Teildiagrammen liegen die Eckpunkte auf dem Thaleskreis vom Durchmesser U_0. Mittels trigonometrischer Formeln können I_1, I_2 und deren Phasenwinkel aus der Figur bestimmt werden, (Abb. A3.7).



A3.3.2 LR-Messbrücke

R_1, R_2, R_0 und L_0 in Abb. A3.8 seien vorgegeben. Welche Bedingungen müssen L_x und R_x erfüllen, wenn zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz bestehen soll (Abgleich der Brückenschaltung)?

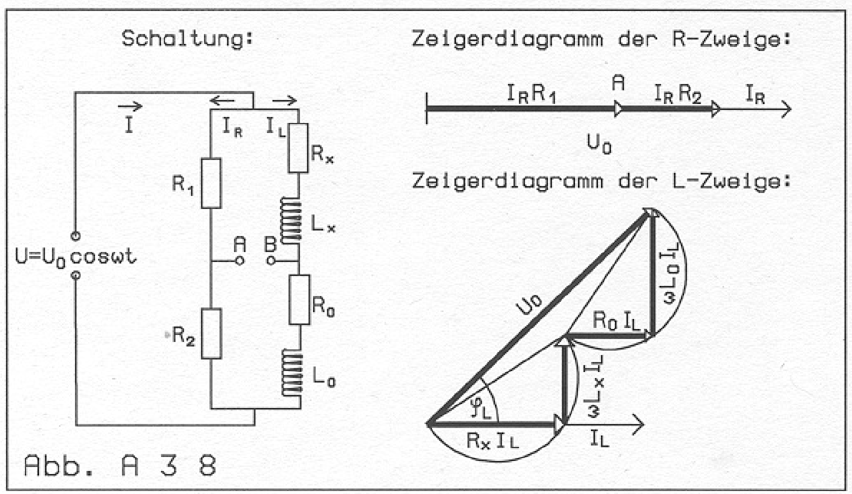


Abb. A 3 8

B liegt nur dann auf dem Zeiger $\vec{U}$, wenn die LR-Dreiecke ähnlich sind, d. h. wenn $L_x/R_x = L_0/R_0$. Da jede **reale** Spule einen (von L grundsätzlich unabhängigen) OHMschen Widerstand hat, ist diese Bedingung i. a. nur durch Einsetzen eines zusätzlichen OHMschen Widerstands R geeigneter Größe in einen der L-Zweige zu erfüllen (Abb. A.3.9). Obendrein fällt B nur dann mit A zusammen, wenn $L_x/L_0 = R_x/(R_0+R) = R_1/R_2$.

Für eine Wechselstrom-Messbrücke gelten also **zwei** Abgleichbedingungen (Abgleich nach Amplitude **und** Phase!).

Der obere Teil in Abb. A3.9 gibt das Zeigerdiagramm der gesamten LR-Brücke (**unabgeglichen**). Entsprechende Katheten der LR-Dreiecke sind stets parallel.

Der untere Teil in Abb. A3.9 gibt das Zeigerdiagramm der **abgeglichenen** LR-Brücke. Zur Erfüllung der einen Abgleichbedingung ist in einen der L-Zweige der zusätzliche Widerstand R eingefügt worden. (Abgleich bei vorgegebenen L_0, R_0, L_x und R_x). Zusätzlich ist auf das Verhältnis R_1/R_2 abgeglichen worden.

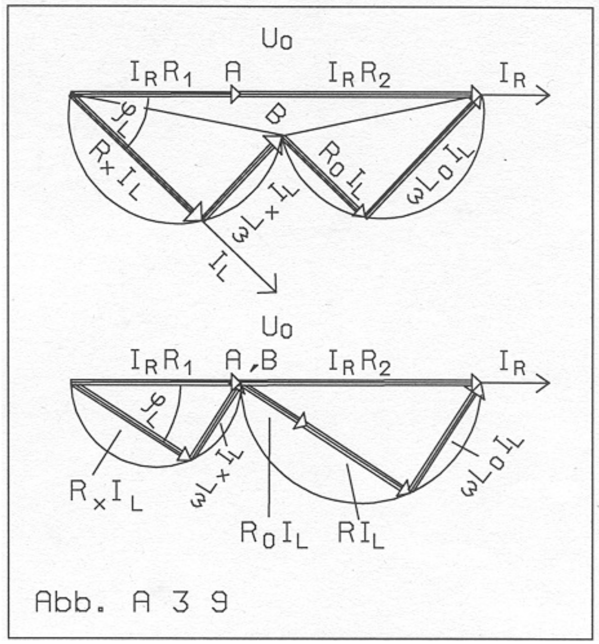


Abb. A 3 9

A3.4 Komplexe Wechselstromgrößen

A3.4.1 Rechnerische Behandlung von Impedanz-Netzwerken

Der grafischen Darstellung im Zeigerdiagramm entspricht rechnerisch die Darstellung von Strömen, Spannungen und Wechselstromwiderständen durch komplexe Zahlen $z = x + iy$ (Punkte in der komplexen Zahlenebene). Hierbei ist das i das Symbol für $\sqrt{-1}$. (In der elektrotechnischen Literatur schreibt man wegen der häufigen Verwendung des Buchstabens i zur Bezeichnung von Strömen meist $j = \sqrt{-1}$).
Aus der Beziehung $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ folgt $|e^{i\omega t}| = 1$, d. h. der Vektor vom Ursprung der Zahlenebene zum Punkt $e^{i\omega t} = (\cos\omega t, \sin\omega t)$ hat die Länge 1 und bildet mit der x-Achse (reellen Achse) den Winkel ωt. Mit wachsendem ωt läuft der Punkt $e^{i\omega t}$ im negativen Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis um.
Entsprechend läuft $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf dem Kreis vom Radius U_0 um, wobei die Projektion auf die x-Achse (der Realteil Re $\hat{U}$) gleich $U_0 \cos\omega t$ ist.

Betrachten wir nun Strom und Spannung an einer Kapazität (Abb. A3.10). Fassen wir die Spannung $U = U_0 \cos \omega t$ also Realteil von $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf, so ergibt sich I als $I = U_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$, was wir als Realteil von $\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = \omega C\, e^{i\pi/2}\, U_0 e^{i\omega t}$ deuten können. Mit $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$ wird daraus

$$\hat{I} = i\omega C\, \hat{U}.$$

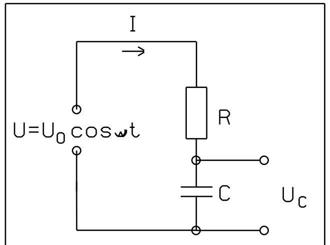


Abb. A 3 10

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung am Kondensator lässt sich also auffassen als **Realteil einer Gleichung zwischen komplexen Größen, die völlig analog dem OHMschen Gesetz I = 1/R U ist**, wobei an die Stelle des OHMschen Widerstandes R der sog. **Scheinwiderstand** (komplexer Widerstand, **Impedanz**) der Kapazität,

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} ,$$

tritt.

Als komplexe Zahl stellt die Impedanz grundsätzlich ein Paar reeller Zahlen dar und kann die Information über den Proportionalitätsfaktor zwischen den Scheitelwerten von Strom und Spannung (Wechselstromwiderstand) wie auch über die Phasenbeziehung aufnehmen. Der Vorteil der komplexen Rechnung liegt genau darin, dass die Phasenkonstante in den **multiplikativen** Faktor Z eingeschlossen ist und nicht mehr explizit gehandhabt zu werden braucht, was wegen der Additionstheoreme für sin und cos die reelle Berechnung selbst einfacher Schaltkreise außerordentlich umständlich machen würde.

Üblicherweise dividiert man beide Seiten der Gleichung $\hat{U} = Z\,\hat{I}$ durch $e^{i\omega t}$, da dieser Faktor lediglich die gleichmäßige Rotation der Vektoren $\hat{U}$ und $\hat{I}$ in der GAUßschen Zahlenebene beschreibt. Wir werden unter $\hat{U}$ und $\hat{I}$ im folgenden also feste Vektoren verstehen, von denen wir einen (z.B. die treibende Spannung einer Schaltung) reell annehmen können.

Ganz analoge Betrachtungen wie bei der Kapazität liefern die Impedanzen der Induktivität und des OHMschen Widerstandes.

Wir erhalten somit die

Impedanzen

des OHMschen Widerstandes $\hat{Z}_R = R$,

der Kapazität $\hat{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$,

der Induktivität $\hat{Z}_L = i\omega L$

und als komplexe Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes

$$\hat{U} = \hat{Z}\,\hat{I} .$$

Z wird als Scheinwiderstand oder Impedanz, sein Realteil als **Wirkwiderstand**, sein Imaginärteil als **Blindwiderstand** bezeichnet. Der Betrag $|Z| = Z$ heißt Wechselstromwiderstand.

Weil diese Beziehung formal dem OHMschen Gesetz gleicht und weil die KIRCHOFFschen Gesetze auch für Wechselströme und -spannungen gelten, erhalten wir für die Reihen- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen dieselben Regeln wie für entsprechende Kombinationen OHMscher Widerstände:

Reihenschaltung: $\hat{Z}_{ges} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$,

Parallelschaltung: $\dfrac{1}{\hat{Z}_{ges}} = \dfrac{1}{\hat{Z}_1} + \dfrac{1}{\hat{Z}_2}$.

Beliebige Netzwerke aus Impedanzen werden daher formal-rechnerisch völlig analog der entsprechenden Schaltung aus OHMschen Widerständen behandelt. Die Zeigerdiagramme für Strom, Spannung, Impedanz oder reziproke Impedanz sich nichts anderes als grafische Darstellung der hierbei auftretenden Operationen mit komplexen Größen in der GAUßschen Zahlenebene

Natürlich ist dieser Formalismus nur eine zweckmäßige, weil vereinfachende Rechenvorschrift. Ströme und Spannungen sind reelle Funktionen, d. h. zu jedem Zeitpunkt durch Angabe jeweils einer reellen Zahl in geeigneten Einheiten messbare Größen. Wir können diese Funktionen erhalten, indem wir am Schluss der komplexen Rechnung $\hat{I}$ und $\hat{U}$ wieder mit dem Faktor $e^{i\omega t}$ multiplizieren und die Realteile dieser komplexen Zahlen bilden. Wir können stattdessen aber auch die eigentlich interessierenden Kenngrößen, nämlich Amplitude und Phase, direkt aus den komplexen Repräsentanten $\hat{I}$ bzw. $\hat{U}$ gewinnen. Setzen wir etwa in $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$ die Spannung reell an (womit wir t festgelegt haben), so ist die **Amplitude** I_0 durch den **Betrag**

$$I_0 = |\hat{I}| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\ \hat{I}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\ \hat{I}\right)^2}$$

und die **Phase** φ durch das **Argument** von $\hat{I}$ gegeben, [Das so berechnete φ ist der Phasenwinkel bezüglich der reellen Achse und stimmt nur dann mit der Phasenverschiebung gegen U überein, wenn U reell angesetzt wird.]

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\ \hat{I}}{\mathrm{Re}\ \hat{I}} \quad .$$

Beispiel: Rechnung beim *RC-Spannungsteiler* (Tiefpass)

$$\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + iR\omega C} = \frac{1 - iR\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$U_{C0} = \left|\hat{U}_C\right| = \left|\frac{1}{1 + iR\omega C}\right| \cdot U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\tan\varphi = -\frac{\omega RC}{1}$$

U_C eilt U um den Winkel -φ nach:

$$U_C = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot U_0 \cos\left(\omega t - \arctan \omega RC\right) \quad .$$

A3.4.2 Leistung in komplexer Schreibweise

Die komplexe Behandlung führt zu Schwierigkeiten bei der Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis weil hierzu quadratische Größen der Repräsentanten gebildet werden. Man muss deshalb vor der Leistungsberechnung zu reellen Größen übergehen oder aber besondere Festsetzungen treffen.

Bezeichnen wir mit $\hat{I}^*$ den zu $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\left|\hat{Z}\right| e^{i\varphi}} = I_0 e^{-i\varphi}$ komplex konjugierten Strom $\hat{I}^* = I_0 e^{+i\varphi}$, so gilt

$$\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}^* = \frac{U_0 I_0}{2} e^{i\varphi} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi + i\frac{U_0 I_0}{2}\sin\varphi$$

$$= U_{eff} I_{eff} \cos\varphi + i\, U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \quad .$$

Hierin sind $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ und $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ die **Effektivwerte** von Spannung und Strom (diese Werte werden üblicherweise von Wechselstrom-Messinstrumenten angezeigt).
Mithin ist

$$\frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\left(\hat{U}\hat{I}^*\right) = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \quad ,$$

d. h. gleich der mittleren Wirkleistung

$$\overline{N_w} = \overline{U_0 \cos\omega t\ I_0 \cos(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi \quad .$$

Die mittlere Wirkleistung berechnet man also in komplexer Schreibweise nach der Vorschrift

$$\overline{N_w} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{U}\hat{I}^*\right) \quad .$$

☺