



Prof. Dr. R. Kruse, F. Rügheimer

Magdeburg, den 15.02.2007

Klausur zur Vorlesung „Fuzzy-Systeme“

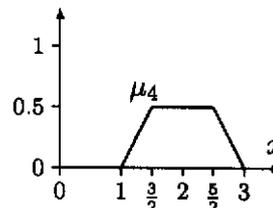
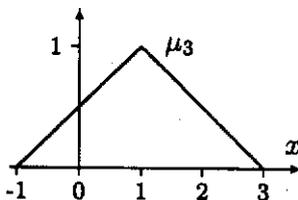
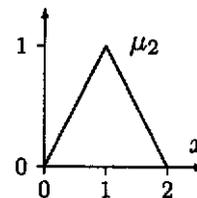
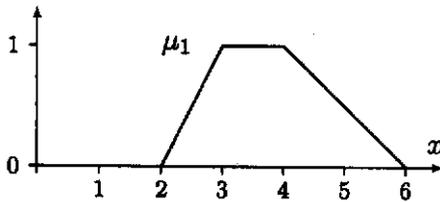
Name, Vorname		Studiengang		Matrikelnummer	
Leistungsnachweis: <input type="checkbox"/> Prüfung <input type="checkbox"/> Benoteter Schein		Unterschrift		Blätter	
Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Summe

Aufgabe 1 Fuzzy Operatoren (6 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Funktionen des Typs $\perp_\lambda(a, b) = \min\{1, (a^\lambda + b^\lambda)^\frac{1}{\lambda}\}$ mit $\lambda > 0$ T-Konormen sind. Welche Bedeutung haben T-Konormen in der Fuzzy-Logik?

Aufgabe 2 Fuzzy-Arithmetik (17 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Fuzzy-Mengen:



Berechnen und skizzieren Sie die Fuzzy-Mengen $\mu_1 - \mu_2$, $\mu_1 \cdot \mu_2$, $\mu_2 + \mu_4$ und $\mu_2 \cdot \mu_3$. Wählen Sie eine geeignete mathematische Beschreibung der jeweiligen Resultate. Die Symbole $+$, $-$ und \cdot stehen dabei für Fuzzy-Erweiterungen der entsprechenden klassischen Operatoren.

Aufgabe 3 Fuzzy-Arithmetik (5 Punkte)

Betrachten Sie die Familie der Fuzzy-Zahlen über \mathbb{R} , deren Zugehörigkeitsfunktion durch

$$\mu_{r,s}(t) = e^{-\left(\frac{t-r}{s}\right)^2},$$

beschrieben werden kann, wobei $r, s, t \in \mathbb{R}$ und $s > 0$ gilt.

Berechnen Sie die Differenz zweier Fuzzy-Zahlen μ_{r_1, s_1} und μ_{r_2, s_2} dieses Typs!

Aufgabe 4 Fuzzy-Relationalgleichungssysteme (8+2 Punkte +2 Zusatzpunkte)

Seien $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{p, q, r, s\}$. Weiterhin seien Fuzzy-Mengen $\mu_i : X \rightarrow [0, 1]$ und $\nu_i : Y \rightarrow [0, 1]$ für $i = 1, 2, 3, 4$ durch ihre Zugehörigkeitsfunktionen gegeben:

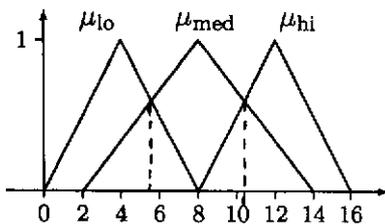
	a	b	c
μ_1	0.8	0.6	0.4
μ_2	0.5	0.9	0.2
μ_3	0.7	0.4	1.0
μ_4	0.8	0.1	0.5

	p	q	r	s
ν_1	0.6	0.6	0.6	0.8
ν_2	0.8	0.5	0.9	0.5
ν_3	0.5	0.9	0.4	0.7
ν_4	0.4	0.5	0.6	0.6

- (a) Gibt es eine Relation R , so dass $\mu_i \circ R = \nu_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt? Geben Sie im Falle der Existenz eine derartige Relation an.
- (b) Gibt es eine Relation S , so dass $\mu_i \circ S = \nu_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt?
- (c) (Zusatzaufgabe) Wie kann man eine kleinste Lösung eines Relationalgleichungssystems bestimmen? Skizzieren Sie die Grundidee!

Aufgabe 5 Fuzzy-Regler (6+6 Punkte +2 Zusatzpunkte)

Betrachten Sie einen Mamdani-Regler mit zwei Eingängen $\xi_1 \in X_1 = [0, 16]$ und $\xi_2 \in X_2 = [0, 16]$ und einem Ausgang $\eta \in Y = [0, 16]$. Alle drei Wertebereiche verwenden die gleichen, in der Grafik angegebenen Zuordnungen von linguistischen Termen und Fuzzymengen. Die Regelbasis ist durch die Regeln R_1, R_2, R_3 und R_4 gegeben.



- R_1 : if ξ_1 is *lo* and ξ_2 is *hi* then η is *lo*
- R_2 : if ξ_1 is *med* and ξ_2 is *hi* then η is *hi*
- R_3 : if ξ_1 is *med* and ξ_2 is *med* then η is *med*
- R_4 : if ξ_1 is *lo* and ξ_2 is *med* then η is *lo*

- (a) Bestimmen Sie die Ausgabe-Fuzzy-Mengen des Reglers für die drei Eingabetupel (4, 8), (6, 14) und (12, 10).
- (b) Bestimmen Sie jeweils die scharfen Ausgabewerte, die sich durch Defuzzifizierung der Ausgabemengen ergeben. Verwenden Sie hierfür die Mean-of-Maxima Defuzzifizierung und die Schwerpunktmethode (Näherungen sind hinreichend).
- (c) Zusatzaufgabe: Wie wirkt sich das Hinzufügen weiterer Regeln auf die Ausgabefuzzymenge von Mamdani-Reglern aus? Welchen Einfluß hat das Hinzufügen weiterer Regeln auf die Ausgabe-Fuzzy-Menge bei Regelung mit Hilfe von Fuzzy-Relationalgleichungen?

Hinweise zu den Aufgaben

Bitte beschriften Sie jedes Blatt wenigstens mit Ihrer Matrikelnummer!

Extensionsprinzip Gegeben seien n Fuzzy-Mengen \underline{A}_i über ihren Trägermengen X_i , $i = 1, \dots, n$, die jeweiligen Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\underline{A}_i} : X_i \rightarrow [0, 1]$ und eine Funktion $\phi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. Das Extensionsprinzip erlaubt es, ϕ auf die Fuzzy-Mengen \underline{A}_i anzuwenden und so eine Fuzzy-Menge \underline{B} über Y zu definieren:

$$\forall y \in Y : \mu_{\underline{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \\ y = \phi(x_1, \dots, x_n)}} \left\{ \min_{i=1 \dots n} \left\{ \mu_{\underline{A}_i}(x_i) \right\} \right\}, & \text{falls } \phi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $\phi^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \mid \phi(x_1, \dots, x_n) = y\}$.

Inferenzprinzip: Gegeben seien eine Fuzzy-Menge \underline{A} über X mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\underline{A}}$ und eine Fuzzy-Relation \underline{R} über $X \times Y$, deren Zugehörigkeitsfunktion durch $\mu_{\underline{R}}$ gegeben ist. Das Inferenzprinzip erlaubt es nun, eine Fuzzy-Menge $\underline{B} = \underline{A} \circ \underline{R}$ über Y abzuleiten, die mit \underline{A} durch \underline{R} assoziiert ist:

$$\forall y \in Y : \mu_{\underline{B}}(y) = \sup_{x \in X} \left\{ \min \left\{ \mu_{\underline{R}}(x, y), \mu_{\underline{A}}(x) \right\} \right\}.$$

Verknüpfung von Fuzzy-Relationen: Die (min-max) Verknüpfung einer Fuzzy-Relation \underline{R}_1 über $X \times Y$ und einer Fuzzy-Relation \underline{R}_2 über $Y \times Z$ resultiert in einer Fuzzy-Relation $\underline{R} = \underline{R}_1 \circ \underline{R}_2$ über $X \times Z$ mit der Zugehörigkeitsfunktion:

$$\forall (x, z) \in X \times Z : \mu_{\underline{R}}(x, z) = \sup_{y \in Y} \left\{ \min \left\{ \mu_{\underline{R}_1}(x, y), \mu_{\underline{R}_2}(y, z) \right\} \right\}.$$

Viel Erfolg!