

## 1. Allgemeine Grundlagen:

### 1.1. logische Aussagen:

**Definition 1.1.:** Eine „*logische Aussage*“ (bezeichnet mit A,B,C, ...) ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist. „*Wahrheitswert*“  $w(A)$  einer Aussage A definiert man:

$$w(A) := \begin{cases} 0, & \text{wenn A falsch ist (Wahrheit ist 0)} \\ 1, & \text{wenn A wahr ist} \end{cases}$$

**Bemerkung:**

- wir betrachten hier nur „**zweiwertige Aussagenlogik**“
- es gibt z.B. auch „*fuzzy logic*“ (fuzzy = trübe), wo  $0 \leq w(A) \leq 1$

**Beispiel:** logische Aussagen sind:

$$A = „3^2 > 2^3“ \rightarrow w(A) = 1$$

$$B = „4“ \text{ ist eine Primzahl} \rightarrow w(B) = 0$$

$$C = „Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, wie z.B. ( 3, 5 ), ( 11, 13 )“ \\ \rightarrow \text{bis heute nicht gelöst}$$

**Verknüpfung von Aussagen:**

Name	Symbolisch	Sprich
Negation	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Alternative	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A äquivalent zu B

- die Wahrheitswerte der Verknüpfungen werden durch eine „**Wahrheitstafel**“ definiert ( 0 = falsch, 1 = wahr)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- die **wahre (richtige) Implikation**  $A \Rightarrow B$  ist Grundlage für mathematische Beweise, denn hierbei gilt:

wenn die Ausgangsaussage A wahr ist so muss Aussage B wahr sein

→ „**direkter Schluss**“

**Beispiel:**  $A = „9 > 8“ \Rightarrow „3 > \sqrt{8}“$

$$w(A) = 1 \Rightarrow w(B) = 1$$

wenn die gefolgerte Aussage B falsch ist so muss Ausgangsaussage A falsch sein

→ „**indirekter Schluss**“

**Beispiel:**  $A = „\sqrt{13} > 4“ \Rightarrow B = „13 > 16“$

$$w(A) = 0 \Rightarrow w(B) = 0$$

**Beachte:** aus falscher Aussage A kann (bei richtiger Schlussfolgerung) eine wahre Aussage B gefolgert werden.

**Beispiel:**  $A = „-1 = 1“ \Rightarrow B = „1 = 1“$

$$w(A) = 0 \Rightarrow w(B) = 1$$

Gleichwertigkeit von Aussagenverknüpfungen:

bedeutet, dass die Aussage: „[Verknüpfung 1]  $\Leftrightarrow$  [Verknüpfung 2]“ **stets war ist.**  
(Wahrheitswerte stimmen überein)

- Beispiel:  $[\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]$  //Regel von de Morgan  
 $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$  //indirekter Beweis  
 $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

Existenz und Universalaussage:

- sei  $A(x)$  eine Aussage, die von einem Parameter abhängt
- „Existenzoperator  $\exists x$ “:

$\exists x : A(x)$  heißt: „es existiert (**mindestens**) ein  $x$ , so dass  $A(x)$  **wahr** ist.“

- „Universaloperator  $\forall$ “ (All-operator):

$\forall x : A(x)$  heißt: „Für **alle**  $x$  gilt, dass  $A(x)$  **wahr** ist.“

Manchmal schreibt man auch:

$A(x) : \forall x$  dass heißt: „Es gilt  $A(x)$  für alle  $x$ .“

1.2. Mengen

- Mengenbegriff nach Georg Cantor (1895):  
„Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte (*Elemente* genannt) zu einem ganzen.“
- „*Menge*“ ist ein Grundbegriff, der sich nicht streng definieren lässt

Bezeichnungen:

$x \in M$  : „ $x$  ist Element der Menge  $M$ “

$x \notin M$  : „ $x$  ist kein Element der Menge  $M$ “

$\emptyset$  : leere Menge

- Definition einer Menge  $M$  über:

a) Aufzählung:  $M := \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$   
 Beispiel:  $M := \{1, 3, 5\}$

b) Charakteristische Eigenschaften:

$M := \{x \mid A(x)\}$  //Menge aller  $x$ , so das  $A(x)$  wahr ist

oder:  $M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$

Beispiel:  $M := \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl} \wedge x^2 - 9 = 0\}$   
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\} = \{-3, 3\}$

Teilmengen und Gleichheit:

$P \leq Q$  : „ $P$  ist Teilmenge von  $Q$ “ (manchmal schreibt man auch  $P < Q$ , d.h.  $P < Q$  ist echte Teilmenge von  $Q$ , d.h.  $P \leq Q \wedge P \neq Q$ ):  $\forall x : x \in P \Rightarrow x \in Q$

$P = Q$  : „Menge  $P =$  Menge  $Q$ “ genau dann wenn:  $\forall x : x \in P \Leftrightarrow x \in Q$

Mengenverknüpfungen:

$P \cup Q := \{x \in P \vee x \in Q\}$  Vereinigung

$P \cap Q := \{x \in P \wedge x \in Q\}$  Durchschnitt

$P / Q := \{x \in P \wedge x \notin Q\}$  Differenz

$P \times Q := \{(x, y) \mid x \in P \wedge y \in Q\}$  kartesisches Produkt (Kreuzprodukt)

Spezialfall:

$P = Q = \mathbb{R} =$  Menge der reellen Zahlen, dann schreibt man:

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

n-dimensionale Euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $n \in \{2, 3\}$

1.3. Reelle Zahlen

Die Menge  $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$  wird Stückweise aus einfacheren Mengen ( $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ) aufgebaut:

(a) natürliche Zahlen  $\mathbb{N}$ :

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, 0\}$ ,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist geeignet zum Abzählen von Objekten
- „Prinzip der vollständigen Induktion“:

sei  $A(n)$  eine Aussage, die von  $n$  abhängt (z.B.:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ )

Induktionsanfang: Man zeigt zunächst:  $A(n_0)$  ist wahr

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n+1$ : man zeigt  $A(n) \Rightarrow A(n+1) \forall n \geq n_0$

*Beispiel: siehe Übungsblatt 2*

- die Operatoren  $+$ ,  $\cdot$  sind stets ausführbar in  $\mathbb{N}$ , d.h.:  
 $p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow p + q \in \mathbb{N} \wedge p \cdot q \in \mathbb{N}$  aber: im Allgemeinen ist  $p - q \notin \mathbb{N}$

(b) ganze Zahlen  $\mathbb{Z}$ :

$\mathbb{Z} := \{0, -1, -2, \dots, -n, -n-1, \dots\} \cup \mathbb{N}$  jetzt: Operationen  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$  stets ausführbar in  $\mathbb{Z}$

(c) rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$ :

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$  jetzt: Operationen  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$ ,  $/$  stets ausführbar in  $\mathbb{Q}$

aber: mit  $r \in \mathbb{Q}$  ist im Allgemeinen  $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$  (Beispiel:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ )

(d) reelle Zahlen  $\mathbb{R}$ :

- die **rationalen Zahlen**  $x \in \mathbb{Q}$  sind genau die **endlichen** oder **periodischen Dezimalbrüche**, d.h.  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x > 0$  gilt ( $x < 0$  analog)

$$x = Z_s, Z_{s-1}, \dots, Z_1.a_1, a_2, \dots, a_k b_1, b_2, \dots, b_n$$

ganzer Teil einer Zahl / nicht periodischer Teil / periodischer Teil

wobei:  $Z_i, a_i, b_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  //Ziffern

Beispiel:  $x = 17/8 = 2.1250$

$$x = 4/3 = 1.\bar{3}$$

- man definiert die irrationalen Zahlen als die nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche

$$x = \pm Z_s, Z_{s-1}, \dots, Z_1.a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$$

sei  $r_n \in \mathbb{Q}$  definiert als  $r_n = \pm Z_s, Z_{s-1}, \dots, Z_1.a_1, a_2, \dots, a_n \approx x$  dann gilt:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$

Beispiel:

- reelle Zahlen:  $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{x \mid x \text{ ist irrationale Zahl (s.o.)}\}$

1.4. Ungleichungen

Zwei beliebige reelle Zahlen  $l, r \in \mathbb{R}$  stehen in „Vergleichsrelation“ (?) man schreibt:

$l (?) r$ , wobei  $(?) \in \{<, >, =, \leq, \geq\}$

Rechnen mit Ungleichungen:

Erklärung hier nur für den Fall  $(?) = <$

- Addition einer Zahl a:  $l < r \Rightarrow l + a < r + a$
- Multiplikation mit Faktor F:
 
$$l < r \Rightarrow \begin{cases} l \cdot F < r \cdot F, & \text{falls } F > 0 \\ l \cdot F > r \cdot F, & \text{falls } F < 0 \\ l \cdot F = r \cdot F, & \text{falls } F = 0 \end{cases}$$
- Anwendung einer streng monotonen Funktion  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$   
 Sei  $l, r \in \mathbb{D}$ , dann:
 
$$l < r \Rightarrow \begin{cases} f(l) < f(r), & \text{wenn } f \text{ streng monoton wachsend ist} \\ f(l) > f(r), & \text{wenn } f \text{ streng monoton fallend ist} \end{cases}$$

Beispiel: - f streng monoton wachsend:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^n, \mathbb{D} = (0, \infty) & 0 < l < r \Rightarrow l^n < r^n \\ f(x) = k\sqrt{x}, \mathbb{D} = (0, 1) & 0 < l < r \Rightarrow k\sqrt{l} < k\sqrt{r} \\ f(x) = \ln x, \mathbb{D} = (0, \infty) & 0 < l < r \Rightarrow \ln l < \ln r \end{array}$$

- f streng monoton fallend:

$$f(x) = 1/x, \mathbb{D} = (0, \infty) \quad 0 < l < r \Rightarrow 1/l > 1/r \quad \text{stürzen}$$

Beispiel: bestimme alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  mit  $1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x - 2} < 2$

- addiere  $a = -1$   $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x - 2} < 1$

- multipliziere mit  $F = (x - 2)$

1. Fall:  $\boxed{x > 2} \rightarrow \boxed{F > 0}$   $\sqrt{x^2 - 2x + 2} < x - 2$   
 - wende  $f(x) = x^2$  an  $x^2 - 2x + 2 < 4x^2 - 4x + 4$   
 $\mathbb{L}_1 = (2, \infty) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$   $2x < 2$   
 $x < 1$

2. Fall:  $\boxed{x < 2} \rightarrow \boxed{F < 0}$   $\sqrt{x^2 - 2x + 2} > x - 2$   
 - wende  $f(x) = x^2$  an  $x^2 - 2x + 2 > 4x^2 - 4x + 4$   
 $\mathbb{L}_2 = (-\infty, 2) \cap (1, \infty) = (1, 2)$   $2x > 2$   
 $x > 1$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 = (1, 2)$

Zur Erläuterung:

$$\begin{array}{ll} ]a, b[ = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, b[ = [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & ]a, b] = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{array}$$

“Betrag“ von  $x \in \mathbb{R}$ :  $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Rechengesetze für | |:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad |x / y| = |x| / |y| \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

## 2. Komplexe Zahlen

Das Lösen einer quadratischen Gleichung ist im Bereich  $\mathbb{R}$  nicht immer möglich:

**Beispiel:**  $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = 1 \pm (2 \cdot \sqrt{(-1)}) \quad \text{Idee: } \sqrt{(-1)} = i$$

**Definition:** Als „*imaginäre Einheit*“ bezeichnen wir die Zahl  $\mathbf{i := \sqrt{-1}}$ , für die gilt  $\mathbf{i^2 = -1}$ .

Die Menge der komplexen Zahlen ist:  $\mathbb{C} := \{x + i \cdot y \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Zu einer komplexen Zahl  $\mathbf{z = x + i \cdot y}$

$\text{Re}(z) := x$     Realteil von  $z$

$$|z| := \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Betrag von  $z$

$\text{Im}(z) := y$     Imaginärteil von  $z$

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

konjugierte komplexe Zahl

Operationen +, -, ·, / für komplexe Zahlen:

sei  $z_k := x_k + i \cdot y_k$ ,  $k := \{1; 2\}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \quad // \text{Prinzip der Add. von Vektoren}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) := \frac{(x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2)}{\text{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i \cdot \frac{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{\text{Im}(z_1 \cdot z_2)}$$

$$z_1 / z_2 = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} \cdot \frac{x_2 - i \cdot y_2}{x_2 - i \cdot y_2} = \frac{(x_1 x_2 - i^2 y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} =$$

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{-x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\text{Re}(z_1 / z_2)}{\text{Im}(z_1 / z_2)}$$

**Beispiele:** siehe Übungsblatt 2

Die komplexe Ebene (Gauß'sche Zahlenebene):

- Addition  $z_1 + z_2$  entspricht einer Vektoraddition  $OP_1 + OP_2$

- Eigenschaften des komplexen Betrages:  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$   
 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$      $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$      $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecksungleichung)

**Polardarstellung komplexer Zahlen:**

$\Rightarrow z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  **Formel 2.1**

Polardarstellung von z

wobei  $r = |z|$  Betrag von z

$\varphi = \arg(z)$  Argument (Phase) von z

$\varphi$  ist nicht eindeutig :

- mit  $\varphi$  ist auch  $\varphi_k = \varphi + 2k\pi ; k := \{ \pm 1, \pm 2, \dots \}$

Argument von z

- für  $z = 0$  ist  $r = 0$  und  $\varphi$  beliebig

Berechnung von (r, φ) aus (x, y):

Gegeben:  $z = x + i \cdot y$  mit  $z \neq 0$  ( $z = 0$  ist trivial)

Gesucht: (r, φ), so dass (2.1) gilt

Es gilt:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ , da  $z \neq 0$  vorausgesetzt
- wir berechnen dasjenige  $\varphi = \arg(z)$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  (ist eindeutig bestimmt)  
 $\rightarrow$  Hauptargument:  $\varphi = \text{Arg}(z)$

$\cos \varphi = (x / r)$  Fall  $y \geq 0 : \Leftrightarrow \varphi \in [0, \pi]$

$\cos -\varphi = (x / r)$  Fall  $y < 0 : \Leftrightarrow \varphi \in [-\pi, 0]$

**Fall:  $y \geq 0$ :**

$\varphi \in [0, \pi] \rightarrow x / r = \cos \varphi \in [-1, 1]$

**Fall:  $y < 0$  :**

$-\varphi \in [0, \pi] \rightarrow -\varphi = \arccos (x / r)$

**Formel:**

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \begin{cases} \arccos (x / r) \in [0, \pi], \text{ falls } y \geq 0 \\ -\arccos (x / r) \in [-\pi, 0], \text{ falls } y < 0 \end{cases}$

**Formel 2.2**

**Rechnen mit der Polardarstellung:**

Sei  $z_k = r_k (\cos \varphi_k + i \cdot \sin \varphi_k)$   $k:=\{1;2\}$

Produktberechnung:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left( \frac{[\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2]}{\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i \cdot \frac{[\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1]}{\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2)} \right)$$

Additionstheoreme:

$= r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$  **Produktformel: Formel 2.3**

für den Betrag gilt:  $r = |z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$  (wobei  $z_1 \cdot z_2 = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ )

Argument:  $\varphi = \arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Speziell:

$$z_1 = z_2 = z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$z^2 = z \cdot z = r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^2 \cdot r \cdot (\cos (2\varphi + \varphi) + i \cdot \sin (2\varphi + \varphi)) = r^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi)$$

analog für  $z^n$ ;  $n \in \mathbb{N}$

sei:  $w = r^{-1} \cdot (\cos (-\varphi) + i \cdot \sin (-\varphi))$  dies wäre  $= z^{-1}$ , wenn gelten würde:

$$z \cdot w = 1 \quad (\rightarrow w = (1 / z) = z^{-1})$$

$$z \cdot w = r \cdot r^{-1} \cdot (\cos (-\varphi + \varphi) + i \cdot \sin (-\varphi + \varphi))$$

$$= 1 \cdot (1 + 0) = 1$$

über vollständige Induktion erhält man die **Potenzformel:**

$z^n = r^n \cdot (\cos (n \cdot \varphi) + i \cdot \sin (n \cdot \varphi)) \quad \forall n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  **Formel 2.4**

wobei:  $r = |z|$ ;  $\varphi = \arg(z)$

Beispiel: berechne  $v = (1 + i)^8$

1. Schritt: schreibe  $z = 1 + i$  als  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = |z|$$

$$\arg(z) = \varphi = + \arccos (x / r) = \arccos(1 / \sqrt{2}) = 45^\circ = \pi / 4$$

weil:  $y > 0$

2. Schritt. Über Formel 2.4

$$w = z^8 = r^8 \cdot (\cos 8\varphi + i \cdot \sin 8\varphi)$$

$$= (\sqrt{2})^8 \cdot (\cos 8(\pi / 4) + i \cdot \sin 8(\pi / 4))$$

$$= 2^4 \cdot (1 + 0) = 16$$

Es gilt die EULER'sche Formel (Beweis über Potenzreihen):

$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi ; \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$  **Formel 2.5**

Lage von  $z = e^{i \cdot \varphi} = 1 \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$   
Polardarstellung

Liegen auf dem Einheitskreis, d. h.:

$$|z| = |e^{i \cdot \varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + i \cdot \sin^2 \varphi} = 1$$

Bemerkung: Beschreibung einer Drehung um  $z = 0$  mit Winkel  $\alpha$

Gegeben:  $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$  es gilt:  $z' = z \cdot e^{i \cdot \alpha}$

denn:  $z' = r \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot e^{i \cdot \alpha} = e^{i \cdot (\varphi + \alpha)}$

$$= r \cdot (\cos (\varphi + \alpha) + i \cdot \sin (\varphi + \alpha))$$

aus Produktformel (2.3):

für  $z_k = r_k \cdot e^{i \cdot \varphi_k}$ ;  $k := \{1;2\}$

**Formel 2.6**

$$\boxed{(r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} \\ z_1 \quad z_2$$

aus Potenzformel (2.4) folgt für  $z = r \cdot e^{i\varphi}$   $\boxed{(r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi n} \quad \forall n \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}}$  **Formel 2.7**

Das heißt es gelten die üblichen Potenzgesetze auch für Terme der Art  $e^{i\varphi}$

Lösen von Polynomgleichungen im Komplexen:

**Satz 2.2:** Die Polynomgleichung n-ten Grades:  $\boxed{P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z^1 + a_0 = 0}$

Mit komplexen Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ ;  $k = \{0; 1; \dots; n\}$ , hat genau n-komplexe Nullstellen  $z_k$   
 $k = \{0; 1; \dots; n\}$ . Es gilt die Produktzerlegung:

$$\boxed{P(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \dots (z - z_n) \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

//Ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der  $z_k$

Bemerkung: einige der Nullstellen  $z_k$  können auch zusammenfallen.

Beispiel: 
$$\begin{aligned} z^4 + 2z^2 + 1 &= (z^2 + 1)^2 \\ &= (z^2 - i^2)^2 = ((z + i) \cdot (z - i))^2 \\ &= (z - (-i)) \cdot (z - (-i)) \cdot (z - i) \cdot (z - i) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$$

n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl a:

Ziel: zu gegeben:  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  finde Zahl(en)  $z = \sqrt[n]{a}$

d.h.: finde  $z \in \mathbb{C}$  derart, dass  $\boxed{z^n = a}$ .

$\rightarrow z^n - a = 0$  //Polynomgleichung n-ten Grades

nach Satz 2.2  $\exists n$  Lösungen  $z_k$

Bestimmung der  $z_k$  über EULER'sche Darstellung von a:

sei:  $a = \rho \cdot e^{i\alpha} = \rho \cdot e^{i(\alpha + 2k\pi)}$

$$\begin{aligned} z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k} &\rightarrow (z_k)^n = r_k^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi_k} = a = \rho \cdot e^{i(\alpha + 2k\pi)} \\ &\rightarrow \boxed{r_k^n = \rho = a} \text{ und } \boxed{n \cdot \varphi_k = \alpha + 2k\pi} \end{aligned}$$

die n-ten Wurzeln von  $a = \rho \cdot e^{i\alpha}$  sind die Zahlen

$$z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k} \text{ mit } r_k = \sqrt[n]{\rho}, \varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad k = 0, \dots, (n - 1)$$

die  $z_k$  liegen auf dem Kreis um  $z = 0$  mit dem Radius

$$\boxed{r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|a|}} \text{ und } \boxed{\varphi_{k+1} = \varphi_k + \delta} \text{ mit } \boxed{\delta := 2\pi / n}$$

Anwendung beim Wechselstromkreis:

Spannung:  $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$

Stromstärke:  $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta)$ , t = Zeit

Werden aufgefasst als Realteile der komplexen Größen

$$U^*(t) = U_0 \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$$

$$I^*(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \beta)}$$

$$R^* = R$$

$$R^* = i \cdot \omega \cdot L$$

$$R^* = 1 / (i \cdot \omega \cdot C) = -(1 / (\omega \cdot C))i$$

$\text{Re}(R^*) = \text{Wirkwiderstand}$

$\text{Im}(R^*) = \text{Blindwiderstand}$

$|R^*| = \text{Scheinwiderstand}$

### 3. Vektorrechnung und analytische Geometrie

#### 3.1. Grundlagen zu Vektoren:

##### „Vektoren“:

- sind gerichtete Größen (Pfeile), z.B. Kraft, Geschwindigkeit oder elektrische Feldstärke
- charakterisiert durch: Länge (Betrag, Norm) und Richtung
- Bezeichnung:  $\vec{v} = AE$

$\vec{A}$  = Anfangspunkt

$\vec{E}$  = Endpunkt

$\vec{v} = AE = A'E' = OP$

- $|\vec{v}| = \|\vec{v}\| := \text{Länge von } \vec{v}$

Betrag von  $\vec{v}$       Norm von  $\vec{v}$

##### Vektoraddition:

Zu gegebenen  $\vec{a} = PQ$  und  $\vec{b} = QR$

heißt der Vektor  $\vec{c} = PR$  Summe von

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$        $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

zu einem gegebenen  $\vec{a} = PQ$  heißt  $-\vec{a} = QP$  der entgegengesetzte Vektor zu  $\vec{a}$

##### Vektordifferenz:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{d} = OQ - OP = \vec{b} - \vec{a}$$

##### Multiplikation mit einem Faktor:

Zu einem gegebenen Vektor  $\vec{a}$  und gegebenem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiert man den Vektor  $\lambda \cdot \vec{a}$  durch:

- Länge von  $\lambda \cdot \vec{a} := |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- Richtung von  $\lambda \cdot \vec{a} := \begin{cases} \text{Richtung von } \vec{a}, & \text{falls } \lambda \geq 0 \\ \text{Richtung von } (-\vec{a}), & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$

##### Regeln für $|\vec{a}|$ (bzw. Norm $\|\vec{a}\|$ ):

- $|\vec{a}| \geq 0$
- $|\vec{a}| = 0$  genau dann wenn  $\vec{a} = 0$  // Nullvektor
- $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- Dreiecksungleichung:  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

##### Koordinatendarstellung:

Kartesisches Koordinatensystem

##### Achtung!:

x-, y-, z-Achse bilden ein Rechtssystem, d.h. nach der Schraubenregel:

x in y-Richtung drehen  $\rightarrow$  Schraube in z-Richtung

Darstellung eines Vektors:

$$OP' = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{v} = OP = OP' + PP' = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

**Formel 3.1**

dabei heißt  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1;2;3$ ,  $i$ -te Komponente von  $\vec{v}$

**Beachte:**  $P = (v_1, v_2, v_3)$  (Koordinaten des Punktes P)

korrespondiert eindeutig mit Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)$   
Transponierte Schreibweise  
 Spaltenvektor

3.2. Skalarprodukt, Vektorprodukt und Spatprodukt:

Winkel zwischen 2 Vektoren a, b:

Voraussetzung: schiebe  $\vec{b}$  so, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  denselben Anfangspunkt haben

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) := \text{der kleinere Winkel zwischen } \vec{a} \text{ und } \vec{b}$$

d. h.: Der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  = Winkel zwischen  $\vec{b}$  und  $\vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) \in [0, \pi]$$

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

$$(-\vec{a}, \vec{a}) = \pi$$

Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (oder  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ):

$$\text{Definition: } \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

**Formel 3.2**

→ Formel zur Winkelberechnung:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

**Formel 3.3**

Projektion von a auf b:

$$\cos \varphi = \frac{s}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

**Formel 3.4**

$$\rightarrow s = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ (Länge der Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b} \text{)}$$

Rechenregeln:

$$(a) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

**Formel 3.5**

$$(b) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$(c) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(d) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ für } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{zu (c): } r = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = p + q = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|}$$

**Formel 3.5c**

da die Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  ( $i = 1; 2; 3$ ) orthogonal sind und  $|\vec{e}_i| = 1$ , gilt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} =: \delta_{ij} \quad \text{Kronecker-Symbol}$$

**Formel 3.6**

Berechnung  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ : Sei  $\vec{a} = \left( \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \left( \sum_{j=1}^3 b_j \cdot \vec{e}_j \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left( \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 b_j \cdot \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i \cdot 1;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

**Formel 3.7**

$$\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \quad \text{Länge eines Vektors: } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{für } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

**Formel 3.8**

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

Offenbar ist  $|\cos \varphi| \leq 1 \quad \forall \varphi = (\vec{a}, \vec{b})$

$$= |(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)| \leq 1 \rightarrow \boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Betrag einer Zahl    Betrag von Vektoren

**Formel 3.9**

3.9 Komponentenweise:

$$\sum_{i=1}^3 |a_i \cdot b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}$$

**Formel 3.10**

Anwendung: Berechnung der Arbeit:

Massepunkt M bewegt sich um den Weg  $\vec{s}$

unter Einwirkung der Kraft  $\vec{f}$

$$W = \vec{f} \cdot \vec{s} = |\vec{f}| \cdot \cos \varphi \cdot |\vec{s}| \rightarrow W = \vec{f} \cdot \vec{s}$$

Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$ :

$\vec{a}$  wird in  $\vec{b}$  reingedreht

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  liegen in einer Fläche

$\vec{a} \times \vec{b}$  kommt aus der Fläche heraus

Rechte-Hand-Regel:

$\vec{a}$  = Zeigefinger

$\vec{b}$  = Mittelfinger

$\vec{a} \times \vec{b}$  = Daumen

Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist definiert durch:

- Richtung: senkrecht auf der Ebene, die  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufspannen
- Richtungssinn: folgt aus der Rechtsschraubenregel oder Recht-Hand-Regel
- Länge:  $|\vec{a} \times \vec{b}| := F =$  Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms

Es gilt:  $\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})}$

**Formel 3.11**

Beispiel:  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3; \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3; \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$

Man kann folgende Rechenregeln beweisen:

$$\begin{aligned} \text{(a) } & \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \\ \text{(b) } & (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \lambda = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Formel 3.12**

(c)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$   
 (d)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , genau dann, wenn  $\vec{a} = \vec{0}$  oder  $\vec{b} = \vec{0}$  oder  $\vec{a} \parallel \vec{b}$   
 (e)  $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

**Berechnungsformel für  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ :**

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \cdot \vec{e}_j$$

$$\rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i \times b_j \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 (a_i \cdot b_j) \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{e}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \vec{e}_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Formel 3.13**

wobei: (Entwicklung nach der 1. Spalte)

$$+ \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = +\vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

streiche 1.  
Zeile +  
1.Spalte

streiche 2.  
Zeile +  
1.Spalte

streiche 3.  
Zeile +  
1.Spalte

und:  $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} := m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}$

**1. Anwendung: Berechnung Flächeninhalt beim Dreieck:**

Fläche von  $\Delta PQR = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

**Formel 3.14**

**2. Anwendung: Drehmoment**  $\vec{D} := \vec{r} \times \vec{f}$

**Formel 3.15**

$\vec{D}$  = Drehmoment = Vektor parallel zur Drehachse

$\vec{r}$  = Hebelarm

$\vec{f}$  = Kraft

**Spatprodukt [a, b, c]:**

**Definition:** das von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  aufgespannt Spat S ist die Menge

$$S := \{ P \mid \vec{OP} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1] \}$$

S = Aufgespanntes Parallelepiped mit dem Volumen V

Das Spatprodukt von den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ist definiert

als die Zahl  $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$

**Formel 3.16**

es gilt:  $V = F \cdot h$  // Volumen = Fläche mal Höhe

mit  $F = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$h = |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{c}| \cdot \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|}$$

$$\rightarrow F \cdot h = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\rightarrow \boxed{V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$

**Formel 3.17**

Für das Volumen des von  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannten Tetraeders gilt:

$$\boxed{V_T = 1/6 \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|}$$

**Formel 3.18**

$$V_T = 1/3 \cdot F_T \cdot h$$

Berechnungsformel: aus Formel 3.13 folgt:

$$\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

**Formel 3.19**

Test auf lineare Unabhängigkeit:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind linear unabhängig, das heißt sie liegen nicht in einer Ebene genau dann, wenn:

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$  // Determinante  $\neq 0 \rightarrow$  Vektoren liegen in einer Ebene

### 3.3 Geraden und Ebenen:

#### Geradengleichungen:

- Punkt-Richtungs-Gleichung einer Geraden g:

Gegeben:

- Punkt  $A \in g$
- Richtungsvektor:  $\vec{r} \parallel g$

Sei  $P = (x_1, x_2, x_3) \in g$  ein beliebiger Punkt auf  $g$  mit dem Ortsvektor  $\boxed{\vec{x} = OP}$  und  $\boxed{\vec{a} := OA}$ ,

dann:  $AP = \vec{x} - \vec{a} \parallel \vec{r} \rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{r}$

Punkt-Richtungs-Gleichung:  $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r}, \lambda \in \mathbb{R}}$

**Formel 3.20**

Jedem  $\lambda \in \mathbb{R}$  entspricht genau ein Punkt  $P$  auf der Geraden mit  $\vec{x} = OP$

- Zwei-Punkt-Gleichung von g:

Gegeben: 2 Punkte  $A, B \in g$

Sei:  $\vec{a} = OA, \vec{b} = OB, \vec{x} = OP$

$\rightarrow \vec{r} := \vec{b} - \vec{a} \rightarrow \boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in \mathbb{R}}$

**Formel 3.21**

#### Ebenengleichungen:

- Die Parameterform einer Ebene E

Gegeben:

- 1 Punkt  $A \in E$
- 2 Richtungsvektoren  $\vec{r}, \vec{s} \parallel E$  (Voraussetzung:  $\vec{r} \parallel \vec{s}$ )

$\forall$  Punkte  $P \in E \exists 2$  Parameter  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

mit  $\boxed{AP = \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{s}}$

jedem Paar  $(\lambda, \mu)$  entspricht genau ein Punkt  $P \in E$

$\rightarrow$  Ebenengleichung in Parameterform:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{s}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

**Formel 3.22**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Formel 3.23**

• Die Normalengleichung von E:

Definition:  $\vec{N}$  heißt „Normalenvektor einer Ebene E“, wenn  $\vec{N} \perp E$  ( $\vec{N}$  senkrecht auf E)

Voraussetzung:  $\vec{N} \neq 0$

Ebene E ist eindeutig festgelegt durch:

1 Punkt  $A \in E$  und 1 Normalenvektor  $\vec{N} \perp E$   
 zu zwei gegebenen Richtungsvektoren  $\vec{r}, \vec{s} \parallel E$   
 mit der Eigenschaft  $\vec{r} \parallel \vec{s}$  liefert  $\boxed{\vec{N} := \vec{r} \times \vec{s}}$

einen Normalenvektor von E

aus  $AP \perp \vec{N} \rightarrow AP \cdot \vec{N} = 0$

$\rightarrow$  Normalengleichung  $\boxed{\vec{N} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0}$

**Formel 3.24**

in Parameterform sei  $\vec{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \boxed{\vec{N} \cdot \vec{x} = \vec{N} \cdot \vec{a} \rightarrow N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = c}$

**Formel 3.25**

Komponentenweise Normalengleichung von E /  
 Koordinatendarstellung

• Die Hesse'sche Normalform von E:

Man definiert folgenden „Normaleneinheitsvektor“  $\vec{n}$  zu  $\vec{N}, \vec{a}$ :

$\vec{n} := \pm \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N}$ ; wobei: +, falls  $C := \vec{N} \cdot \vec{a} \geq 0$   
 -, falls  $C := \vec{N} \cdot \vec{a} < 0$

**Formel 3.26**

Es gilt: -  $|\vec{n}| = 1$  (Einheitsvektor, parallel zu  $\vec{N}$ )

-  $\vec{n} \perp E$  (Normalenvektor)

-  $\vec{n}$  zeigt in den Halbraum von E, in dem 0 nicht enthalten ist

multipliziert man 3.25 mit  $\pm \frac{1}{|\vec{N}|}$ , so erhält man:  $\pm \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} \cdot \vec{x} = \pm \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} \cdot \vec{a}$

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung E:

$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$  oder:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = c$

**Formel 3.27**

mit  $c := \vec{n} \cdot \vec{a} \geq 0$  und  $|\vec{n}| = 1$

Bemerkung: c = Abstand der Ursprungs 0 von E (s. u.)

Lösen von Aufgaben:

Abstand eines Punktes  $P = (x_1, x_2, x_3)$  von E:

Sei: F := Fußpunkt des Lotes von P auf E

d := Abstand von P zu E = Länge PF

$\vec{x} := OP$ ;  $\vec{a} := OA$

dann gilt: d = |PF| = Projektion von PA auf Vektor  $\pm \vec{n}$

= |PA| · cos φ = |PA| · |cos φ| (da cos φ > 0 wegen φ ∈ [0, π/2])

$$= |PA| \cdot \left| \frac{\pm \vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{x})}{|\pm \vec{n}| \cdot |\vec{a} - \vec{x}|} \right| = |\pm \vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{x})| = |-\vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{x})| = |\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a}|$$

= c (3.27)

$\rightarrow \boxed{d = |\vec{n} \cdot \vec{x} - c| = |n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - c|} \rightarrow$  mit  $\vec{n}$  und  $c = \vec{n} \cdot \vec{a}$  aus 3.27 **Formel 3.28**

Gerade als Schnitt zweier Ebenen:

gegeben: - Ebene E mit Normalenvektor  $\vec{N}$   
 - Ebene F mit Normalenvektor  $\vec{M}$

gesucht: - Schnittgerade(n)  $s \in E \cap F$

Fall 1:  $\vec{N} \parallel \vec{M}$ :  $\rightarrow E, F$  sind parallel = entweder  $E = F \rightarrow$  unendlich viele Schnittgeraden  
 oder  $E \neq F \rightarrow \exists s$

Fall 2:  $\vec{N} \not\parallel \vec{M}$ : (dass heißt:  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\vec{N} = \lambda \cdot \vec{M} \rightarrow \vec{N} \times \vec{M} \neq 0$ )

Es existiert genau eine Schnittgerade

$\vec{N} \perp E \rightarrow \vec{N} \perp s$  (da  $s \in E$ )

$\vec{M} \perp F \rightarrow \vec{M} \perp s$  (da  $s \in F$ )

$\rightarrow \vec{N} \times \vec{M} \parallel s$

$\vec{r} := \vec{N} \times \vec{M}$  ist Richtungsvektor von  $s$

Geradengleichung von  $s = E \cap F$ :

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{N} \times \vec{M}), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{wobei: } \vec{x} = OP, \vec{a} = OA, A, P \in s$$

**Formel 3.29**

Bestimmung von einem  $A = (a_1, a_2, a_3) \in s$ :

$A \in E \rightarrow N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 = C$  (Konstante aus Normalengleichung von E)

$A \in F \rightarrow M_1 a_1 + M_2 a_2 + M_3 a_3 = D$  (Konstante aus Normalengleichung von F)

Ziel: - finde eine Lösung  $(a_1, a_2, a_3)$  als Gleichungssystem

Lösung: - setze eine Komponente fest (zum Beispiel  $a_3 = 0$ )

- Löse ein  $2 \times 2$  Gleichungssystem, finde die restlichen Komponenten

Winkel zwischen zwei Ebenen:

- Voraussetzung:  $E \parallel F \rightarrow \exists$  Schnittgerade  $s$

- Sei  $A \in s$  beliebig gewählt

Definition:  $g$  Gerade in E mit  $g \perp s$ ;  $A \in g$

$h$  Gerade in F mit  $h \perp s$ ;  $A \in h$

Damit ist  $\alpha$  der Winkel zwischen E und F definiert als

$$\alpha = \angle(E, F) := \angle(g, h) \quad \text{derjenige Winkel } \alpha \text{ mit } \alpha \in [0, \pi/2]$$

Betrachten der Ebene durch  $g$  und  $h$ :

$$\vec{n} \perp g, \vec{m} \perp h \rightarrow \alpha = \angle(g, h) = \angle(\vec{n}, \vec{m}) \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot (\pm \vec{m})}{|\vec{n}| \cdot |\pm \vec{m}|} = \pm |\vec{n} \cdot \vec{m}|$$

$$\alpha \in [0, \pi/2] = \cos \alpha \geq 0 \rightarrow \cos \alpha = |\vec{n} \cdot \vec{m}| \rightarrow \alpha = \arccos |\vec{n} \cdot \vec{m}|$$

**Formel 3.30**

## 4. Lineare Algebra

### 4.1. Vektorräume

Ziel: allgemeine Beschreibung von Mengen, deren Elemente man addieren und mit einer Zahl multiplizieren kann.

Definition 4.1.: eine Menge  $V$  heißt „Vektorraum über  $\mathbb{R}$ “, wenn auf  $V$  folgende Operationen erklärt sind:

Addition:  $a, b \in V \rightarrow a + b \in V$   
 Skalarmultiplikation:  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Skalar),  $a \in V \rightarrow \lambda \cdot a \in V$

und folgende Rechengesetze (Axiome) gelten:

- (V1)  $a + b = b + a \quad \forall (a, b) \in V$
- (V2)  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall (a, b, c) \in V$
- (V3)  $\exists$  „Nullelement“  $0 [=0_V] \in V$  mit der  $a + 0 = a \quad \forall a \in V$
- (V4)  $\forall a \in V \quad \exists (-a) \in V$  mit  $a + (-a) = 0$
- (V5)  $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$  (spezielle Rolle von  $\lambda = 1$ )
- (V6)  $\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot a \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \quad \forall a \in V$
- (V7)  $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \quad \forall a \in V$
- (V8)  $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \quad \forall a \in V$

Die „Differenz“ von  $a$  und  $b$  ist definiert als:  $a - b := a + (-b) = a + (-1) \cdot b$

Bemerkung: analog definiert man „Vektoren über  $\mathbb{C}$ “, wobei  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}$

Beispiel:

- Zeilenvektorraum  $\mathbb{R}_n$ :

$$\mathbb{R}_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

Mit den Operationen:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}_n$$

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) := (\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n) \in \mathbb{R}_n$$

- Spaltenvektorraum  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{R}^n : \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\} \text{ mit } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ und}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- Vektorraum der Matrizen  $\mathbb{R}^{(m, n)}$ : (oder:  $\mathbb{R}^{(m \times n)}$ ) siehe Abschnitt 4.2

- Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq n$ :  $\mathbb{P}_n$

$$\mathbb{P}_n := \left\{ p(x) \mid p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \right\}, \text{ wobei}$$

$$p(x) + q(x) := \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i \quad \text{und} \quad \lambda \cdot p(x) := \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot a_i) x^i$$

Definition 4.2.: Eine Teilmenge  $U \subseteq V$  eines Vektorraumes  $V$  heißt „Unterraum von  $V$ “, wenn:  $a, b \in U \rightarrow a + b \in U \quad \lambda \in \mathbb{R}, a \in U \rightarrow \lambda \cdot a \in U$

Beispiel: sei E eine Ebene durch den Ursprung 0, sei  $V = \mathbb{R}^3$   
 $U := \{x \in V \mid \text{Punkt P mit } x = OP \text{ liegt in E}\}$   
 Für Unterraum: Ebene muss durch Nullpunkt gehen

Definition 4.3.: Zu Elementen  $v_i \in V$  und Skalaren  $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ , heißt

$$v := \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = \sum_{i=1}^k (\lambda_i \cdot v_i) \in V$$

Linearkombination der  $v_i$  (mit dem Koeffizienten  $\lambda_i$ ). Der von  $v_1, \dots, v_k$  aufgespannte Unterraum U ist definiert als:

$$U = \text{span}(v_1, \dots, v_k) := \{v = \sum_{i=1}^k (\lambda_i \cdot v_i) \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, k\}$$

Beispiel:

Ebene E durch 0 wird von  $a, b \in \mathbb{R}^3 = V$

Aufgespannt  $U = \text{span}(a, b)$

$$= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda \cdot a + \mu \cdot b = OP, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

**Menge der**

**Formel 4.1**

Definition 4.4.:

- Die Elemente  $v_1, \dots, v_k \in V$  heißen „linear abhängig“, wenn es Zahlen (Skalare)  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0$  (dass heißt nicht alle  $\lambda_i = 0$ ) und  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 = 0_v$  (Nullelement in V)
- $v_1, \dots, v_k \in V$  heißen „linear unabhängig“, wenn sie nicht linear abhängig sind, dass heißt:  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0_v \rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$
- „Dimension von V“  $\dim(V) :=$  maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in V

Beispiel:

Linear abhängig	Linear unabhängig
2 parallele Vektoren	2 nicht parallele Vektoren
3 Vektoren in einer Ebene	3 nicht in einer Ebene liegende Vektoren

## 4.2. Matrizen:

Definition 4.5.: Eine „Matrix vom Typ (k, n)“ ist ein rechteckiges Zahlenschema aus k Zeilen und n Spalten

Dass heißt:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(k,n)}$  (Elemente von A)

wobei  $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$ . Die Menge aller reeller Matrizen vom Typ (k, n) bezeichnet man mit  $\mathbb{R}^{(k,n)}$  oder  $\mathbb{R}^{k \times n}$ , die Menge aller komplexen Matrizen vom Typ (k, n) mit  $\mathbb{C}^{(k,n)}$  oder  $\mathbb{C}^{k \times n}$  wobei  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ .

Zwei Matrizen  $A = (a_{ij})_{(k,n)}$  und  $B = (b_{ij})_{(l,m)}$  heißen „gleich“, dass heißt:

$A = B$ , wenn: -  $k = l$  und  $n = m$  (gleiches Format)

-  $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, n$  (Elemente stimmen überein)

Definition 4.6.:

- Matrizen-Addition

Zu  $A, B \in \mathbb{R}^{(k,n)}$  wird die Matrix  $A + B \in \mathbb{R}^{(k,n)}$  definiert als:

$$A + B := (c_{ij})_{(k,n)} \text{ mit } c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \text{ wobei } A = (a_{ij})_{(k,n)}, B = (b_{ij})_{(k,n)}$$

**Formel 4.2**

• Skalarmultiplikation für Matrizen:

Zu  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Skalar) und  $A \in \mathbb{R}^{(k,n)}$  und  $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{(k,n)}$  definiert als:

$\lambda \cdot A := (c_{ij})_{(k,n)}$  mit  $c_{ij} := \lambda \cdot a_{ij}$ , wobei  $A = (a_{ij})_{(k,n)}$

**Formel 4.3**

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A                      B                      C = A + B

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\lambda \cdot A$                        $\lambda \cdot A$

- Die Menge  $\mathbb{R}^n$  aller Matrizen vom Typ  $\mathbb{R}^{(k,n)}$  ist ein Vektorraum mit dem Nullelement:  $0 = 0_{\mathbb{R}^{(k,n)}}$  = einer Matrix voller Nullen mit k-Spalten und n-Zeilen

Definition 4.7.: Zu einer Matrix  $A = (a_{ij})_{(k,n)} \in \mathbb{R}^{(k,n)}$  und  $B = (b_{ij})_{(n,r)} \in \mathbb{R}^{(n,r)}$  wird das Ergebnis  $A \cdot B \in \mathbb{R}^{(k,r)}$  definiert als:

$$A \cdot B := (c_{ij})_{(k,r)} \text{ mit } c_{ij} := \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

**Formel 4.4**

**Beachte:** Spaltenanzahl von A = Zeilenanzahl von B

(i-ter Zeilenvektor von A) · (j-ter Spaltenvektor von B) =  $c_{ij}$

Schema für das Matrix-Produkt:

$$c_{ij} = \text{Zeile}(i) \cdot \text{Spalte}(j) = a_{i1} \cdot b_{1j} \dots a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

Beispiel:    A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$                       B =  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 11 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & 25 & 23 \end{pmatrix}$$

Vektoren sind spezielle Matrizen

Spaltenvektor:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  = Matrix vom Typ (n, 1)

Zeilenvektor:  $\vec{x} = x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  = Matrix vom Typ (1, n)

Matrix mal Vektor:

Gegeben: Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(k,n)}$ , Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{(n,1)} = \vec{c} = Ax \in \mathbb{R}^{(k,1)} \leftrightarrow \mathbb{R}^k$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \text{ -- Zeile } i = \vec{c}$$

wobei:  $c_i = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot x_l \quad \forall i = 1 \dots k$

$a_i \cdot x$  ( $a_i$  = i-te Zeilenvektor von A)

**Matrix-Vektor-Schreibweise für Gleichungssysteme:**

Beispiel: finde 3 Unbekannte  $x_1, x_2, x_3$ , so dass

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

ist äquivalent zu Finde Vektor  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , so dass

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  Koeffizient Matrix ( $n = 3$ )  
 $x \in \mathbb{R}^3$  Lösungsvektor  
 $b \in \mathbb{R}^n$  Rechte-Seite-Vektor

dass heißt allgemeine Form:  $A \cdot x = b$

Rechenregeln für Matrix-Produkte:

Definition 4.8.: „Einheitsvektor“  $I_n \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  wird definiert als

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{(n,n)} \text{ wobei: } \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \quad //\text{Kronecker-Symbol}$$

- Die Typen von A, B, C seien so, dass die Produkte erlaubt, dann gilt:

(a) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (d) $A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ (e) Für $A \in \mathbb{C}^{(k,n)}$ gilt: $A \cdot I_n = A$ $I_k \cdot A = A$	<b>Formel 4.5</b>
---	-------------------

**Beachte:** im Allgemeinen gilt:  $A \cdot B \neq B \cdot A$

Beispiel:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A$ 
 $B$ 
 $A \cdot B$ 
 $B$ 
 $A$ 
 $B \cdot A$

Definition 4.9.: Sei  $A \in \mathbb{C}^{(k,n)}$  mit den Elementen  $A = (a_{ij})_{(k,n)}$ , dann ist die „transponierte Matrix“  $A^T \in \mathbb{C}^{(n,k)}$ :  $A^T = (c_{ij})_{(n,k)}$  mit  $c_{ij} := a_{ji}$  //Zeilen und Spalten werden vertauscht

Die „adjungierte Matrix“  $A^* \in \mathbb{C}^{(n,k)}$ :  $A^* = (c_{ij})_{(n,k)}$  mit  $c_{ij} := a_{ji}^*$

Seien  $a_1, \dots, a_k$  Zeilenvektoren von A  $\rightarrow a_1^T, \dots, a_k^T =$  Spaltenvektoren von  $A^T$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrix-Produkte:

(a) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (b) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ (c) $(A^T)^T = A$ (d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ //wichtig!!!	<b>Formel 4.6</b>
---	-------------------

Definition 4.10.: eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{C}$  heißt:

„symmetrisch“, wenn  $A = A^T$

„hermitisch“, wenn  $A = A^*$  (Hermite 1822 – 1901)

„unitär“, wenn  $A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n$

„orthogonal“, wenn  $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$

Bemerkung: im Reellen ist *hermitisch* = *symmetrisch* und *unitär* = *orthogonal*

4.3. Determinanten:

Ziel:

- zu einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  wird eine Zahl **det(A)** zugeordnet
- beschränken uns auf den reellen Fall (der Fall  $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  geht analog)
- behandeln nur Berechnungsverfahren und Rechengesetze
- (Definition über „Determinanten“ siehe Literatur)

Definition 4.11.: „n-reihige Determinanten“ von  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

- Fall  $n = 1$ :  $A=(a_n) \in \mathbb{R}^{(1,1)}$ , dann  $\boxed{\det(A) := a_{11}}$
- Fall  $n = 2$ :  $A=(a_{ij})_{(n,n)} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$   
 „Untermatrix“  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1,n-1)}$  entstehe aus A durch streichen von Zeile i und Spalte j

Entwicklung von det(A) nach der 1. Spalte von A:

$$\det(A) := + a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{21} \cdot \det(A_{21}) + a_{31} \cdot \det(A_{31}) - \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot \det(A_{n1}) \quad \text{Formel 4.7}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+1)} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

Dass heißt: Berechnung der n-reihigen Determinante durch (n-1) reihige Determinante  $\det(A_{ij}) \rightarrow$  rekursive Definition

Die  $\det(A_{ij})$  werden wieder nach der 1. Spalte entwickelt

Schreibweise für  $n \geq 2$ :  $\det(A) = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Fall  $n = 2$ :  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = + a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{21} \cdot \det(A_{21})$  **Formel 4.8**

$$= + a_{11} \cdot \det(a_{22}) - a_{21} \cdot \det(a_{12})$$

$$= \boxed{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Produkt der Hauptdiagonalen
Produkt der Nebendiagonalen

Beispiel:  $n = 4$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = +6 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} + 14 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} \dots \rightarrow d = 0$$

Satz 4.12.: (Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte)

Entwicklung nach Spalte j von  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ :  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+j)} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

Entwicklung nach Zeile i von  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ :  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(i+j)} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

Beispiel: Wähle für die Entwicklung von A eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ = (-5) \cdot (4 \cdot 3 - 5 \cdot 2) = -10$$

Eigenschaften und Rechengesetze:

- Zeilentausch: sei  $a_i \in \mathbb{R}_n$  i-ter Zeilenvektor von A

$$\det \begin{vmatrix} \dots a_k \dots \\ \dots a_l \dots \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots a_k \dots \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow l\text{-te Zeile} \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{array} \quad \text{Formel 4.9}$$

*Spezialfall*: falls  $a_k = a_l$ , so folgt  $\det(A) = 0$

- Ausklammern eines Faktors  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots \lambda \cdot a_k \dots \\ \dots a_n \dots \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots a_k \dots \\ \dots a_n \dots \end{vmatrix} \quad \text{Formel 4.10}$$

- Linearkombination in einer Zeile k: sei  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots \lambda \cdot a_k + \mu \cdot a_k \dots \\ \dots a_n \dots \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots a_k \dots \\ \dots a_n \dots \end{vmatrix} + \mu \cdot \det \begin{vmatrix} \dots a_l \dots \\ \dots a_k \dots \\ \dots a_n \dots \end{vmatrix} \quad \text{Formel 4.11}$$

- Addiere vielfaches von Zeile k und Zeile l:

$$\det \begin{vmatrix} \dots a_k \dots \\ \dots a_l \dots \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \dots a_k \dots \\ \dots a_l + \lambda \cdot a_k \dots \end{vmatrix} \quad \text{Formel 4.12}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - 2a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - 3a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = +1 \cdot (-1) = (-1)$$

Determinante von  $A^T$ : man kann beweisen:  $\det(A^T) = \det(A)$  Formel 4.13

Die Zeilen von A sind die Spalten von  $A^T$

Die Zeilen von  $A^T$  sind die Spalten von  $(A^T)^T = A$

→ alle Rechenregeln für Determinanten für Zeilen von A Formel 4.14  
gelten sinngemäß auch für die Spalten von A

Produktformel: sei  $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ , dann gilt:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$  Formel 4.15

Cramer'sche Regel zur Lösung von Gleichungssystemen (GLS):

GLS: finde  $x \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $Ax = b$  zu gegebener  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

**Satz 4.13.:**

Voraussetzung:

- $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  mit  $\det(A) \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$
- Sei  $a^j = j$ -ter Spaltenvektor von A

Behauptung: das GLS  $Ax = b$  hat genau eine Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$

- Für die k-te Komponenten von  $x_k$  von x gilt:

$$x_x = \frac{\det \begin{pmatrix} a^1, \dots, a^{k-1}, b, a^{k+1}, \dots, a^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \quad \text{Formel 4.16}$$

**Beispiel:**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \det(A) = -2$

$$x_1 = \frac{1}{-2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{8}{-2} = -4 \qquad x_2 = \frac{1}{-2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-9}{-2} = 4,5$$

**4.4. Lineare Gleichungssysteme (GLS):**

Problem: Finde alle Lösungen  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  des LGS

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$ $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$	m-Gleichungen n-Unbekannte	<b>Formel 4.17</b>
---	-------------------------------	--------------------

dass heißt:  $Ax = b$  mit gegebenen Daten  $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{R}^{(m,n)}, b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$

- Das Gleichungssystem wird eindeutig repräsentiert durch die „erweiterte Matrix“ (A|b)
- Es kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen geben
- Die Lösungen über Cramer'sche Regel geht nur für m = n und det(A) ≠ 0 und ist im allgemeinen (für größere n) zu aufwendig

Lösung nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

**Schritt 1:** „Vorwärtselimination“

Überführe GLS  $Ax = b$  in ein äquivalentes LGS  $A'x = b'$  mit besserer Struktur (Zeilenstufen-Form)

$$(A'|b') = \left( \begin{array}{cccccc|c} \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right) \begin{array}{l} r - \text{„Pivotzeilen“} \\ \\ \\ (m-r) - \text{Nullzeilen} \end{array}$$

- Dabei bedeutet:
- \* transformiertes Element
  - „Pivotelement“ ≠, links davon und unterhalb sind lauter Nullen

wodurch erreicht man die Zeilenstufen-Form von A':

- Addiere das λ-fache (λ ≠ 0) von Gleichung „k“ zu Gleichung „i“, dass heißt addiere in (A|b) das λ-fache von Zeile „k“ zu Zeile „i“
- Vertausche die Reihenfolge von Gleichungen, dass heißt tausche zwei Zeilen von (A|b)
- Prinzip: Gehe spaltenweise vor und erzeuge Nullen unterhalb jedes Pivotelementes

**Beispiel:**

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \quad 2 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 1 \\ (-2) \cdot Z_1 \quad 2 \quad 4 \quad -4 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad 2 \\ -1 \quad -2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad | \quad 3 \\ \hline 3 \quad 6 \quad -7 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad \beta \\ \boxed{1} \quad 2 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad | \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \boxed{1} \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -2 \quad | \quad \beta-3 \end{array} = (A|b), \beta \in \mathbb{R}$$

wähle Pivotelement in Spalte 3, da Spalte 2 fertig!

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c|c}
 \boxed{1} & 2 \ -2 \ -1 \ 1 \ 1 \\
 0 & 0 \ \boxed{1} \ 2 \ 5 \ 4 \\
 0 & 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \\
 +1 \cdot Z_2 & 0 \ 0 \ -1 \ 4 \ -2 \ \beta-3 \\
 \hline
 \boxed{1} & 2 \ -2 \ -1 \ 1 \ 1 \\
 0 & 0 \ \boxed{1} \ 2 \ 5 \ 4 \\
 0 & 0 \ 0 \ \boxed{2} \ 1 \ 0 \\
 +3 \cdot Z_3 & 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 3 \ \beta+1 \\
 \hline
 \boxed{1} & 2 \ -2 \ -1 \ 1 \ 1 \\
 0 & 0 \ \boxed{1} \ 2 \ 5 \ 4 \\
 0 & 0 \ 0 \ \boxed{2} \ 1 \ 0 \\
 0 & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta+1
 \end{array}
 \end{array}$$

sei  $r :=$  Anzahl der Pivotelemente in  $A \hat{=}$  Anzahl der Pivotzeilen

**Formel 4.18**

**Schritt 2:** Lösbarkeitsentscheidung: nur für  $\beta + 1 = 0$  existiert eine Lösung, das heißt nur für  $\beta = -1$ , sonst existiert keine Lösung

**Schritt 3:** „Rückwärtssubstitution“:

- Für Spalte  $j$  mit Pivotelement ist  $x_j$  eine abhängige Variable  
ohne Pivotelement ist  $x_j$  eine unabhängige Variable („freie Variable“)
- Das heißt unabhängige Variable sind  $x_2 = \alpha_1$  und  $x_5 = \alpha_2$ , wobei  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  frei wählbar sind
- In jeder Pivotzeile kann man nach der entsprechenden abhängigen Variablen  $x_j$  umstellen:

3. Gleichung:  $2x_4 + 1x_5 = 0 \rightarrow x_4 = -1/2\alpha_2$

2. Gleichung:  $1x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 4 \rightarrow x_3 = 2 \cdot (-1/2\alpha_2) + 5\alpha_2 + 4 = 4 - 4\alpha_2$

1. Gleichung:  $1x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 + 1x_5 = 1$

$\rightarrow x_1 = -2\alpha_1 + 8 - 8\alpha_2 - 1/2\alpha_2 - \alpha_2 + 1 = 9 - 2\alpha_1 - 8,5\alpha_2$

allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -9,5 \\ 0 \\ -4 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Definition 4.14.: Unter dem „**Rang einer Matrix**“  $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$  versteht man die Zahl:

$\text{Rang}(A) :=$  Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von  $A$

Man spricht auch vom „**Zeilenrang** von  $A$ “.

**Satz 4.15.:** Es gilt:

- $\text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang}$ , das heißt  $\text{Rang}(A) =$  Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren
- $\text{Rang}(A) = r$   $r =$  Anzahl der Pivotelemente in  $A \hat{=}$  (aus 4.18.)

**Allgemein zur Lösbarkeitsentscheidung**

$$(A|b') = \left( \begin{array}{cccccc|c} \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

**Satz 4.16.:** Das GLS  $Ax = b$  ist lösbar

- wenn alle Komponenten  $(\delta_1, \dots, \delta_{m-r})$  in den  $(m - r)$ -Restzeilen von  $b'$  Null sind
- wenn der  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$
- $b \in \text{Spannung}(a^1, \dots, a^n)$  wobei  $a^j := j$ -ter Spaltenvektor von  $A$

**Bemerkung:** zu  $b \in \text{span}\{a^j : j = 1, \dots, n\} : A = (a^1, \dots, a^n) \rightarrow Ax = a^1x_1 + \dots + a^nx_n = \sum_{j=1}^n a^j x_j$

Struktur der allgemeinen Lösung von  $Ax = b$ :

$$x = x_p + \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j x_j, \text{ wobei } \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

**Formel 4.19**

partikuläre Lösung  $x_p =$  allgemeine Lösung des homogenen GLS  $x_h =$

$$\boxed{A \cdot x_p = b} \quad \boxed{A \cdot x_h = 0}, \text{ dass heißt speziell } \boxed{Ax^{(j)} = 0}$$

**Beachte:** Wenn gilt:  $r = n$  ( $\text{Rang}(A) = n$ ), so ist die  $\sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j x_j$  definiert als 0 (dass heißt  $x = x_p$ )

**Definition 4.17.:** Unter dem „*Kern einer Matrix*“  $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$  versteht man folgenden

Unterraum:  $\text{Kern}(A) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$

Unter der „*Basis eines Unterraumes*  $U \in \mathbb{R}^n$ “ versteht man eine Menge von linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_d \in U$  mit  $U = \text{span}(v_1, \dots, v_d)$

Die Zahl  $d$  (= Anzahl der Basisvektoren) heißt „*Dimension von U*“,  $m$  Zeichen „*dim(U)*“

Für die Vektoren  $x^{(1)}, \dots, x^{(n-r)}$  der allgemeinen Lösung (4.19.) aus dem Gauß'schen-

Eliminationsverfahren kann man beweisen, dass gilt  $\boxed{\text{Kern}(A) = \text{span}(x^{(1)}, \dots, x^{(n-r)})}$

**Formel 4.20**

Und  $x^{(1)}, \dots, x^{(n-r)}$  sind linear unabhängig  $\rightarrow$  es gilt also:  $\boxed{\text{dim}(\text{Kern}(A)) = n - \text{Rang}(A)}$

**Formel 4.21**

Der Fall einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ :

**Definition 4.18.:** Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  heißt „*regulär*“, wenn der  $\text{Rang}(A) = n$ , „*singulär*“, wenn  $\text{Rang}(A) < n$

Fall „*A ist regulär*“:

$(A|b) \rightarrow (A'|b')$   $r =$  Anzahl der Pivotelemente  $= n \rightarrow$  nur abhängige Variablen  $x_j$

$\rightarrow$  für beliebige Vektoren  $b$  existiert eine eindeutige Lösung vom GLS  $\boxed{Ax = b}$

Nach den Rechenregeln für Determinanten gilt:

$$\boxed{\det(A) = \det(A') \cdot (-1)^t}, \text{ wobei } t := \text{Anzahl der Zeilenvertauschungen im Gauß-Verfahren}$$

$$\boxed{= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \cdot (-1)^t} \text{ (//Produkt aller Pivotelemente } \neq 0)$$

**Formel 4.22**

**Satz 4.19.:** Für  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  sind äquivalent  $A$  ist regulär, dass heißt  $\text{Rang}(A) = n$

$\leftrightarrow \det(A) \neq 0 \leftrightarrow$  GLS  $\boxed{Ax = b}$  hat für beliebiges  $b \in \mathbb{R}^n$  eine eindeutige Lösung  $x \leftrightarrow$

homogene GLS  $\boxed{Ax = 0}$  hat nur die triviale Lösung  $x = 0$

Fall „*A ist singulär*“:

$(A|b) \rightarrow (A'|b')$  es gibt  $n - r \geq 0$  freie Variablen  $x_j \rightarrow$  das homogene GLS  $Ax = 0$  (dass heißt  $b = 0 \rightarrow b' = 0$ ) hat unendlich viele Lösungen  $\rightarrow \det(A) = 0$  denn wäre

$\det(A) \neq 0 \rightarrow Ax = 0$  hat nur die Lösung  $x = 0$  (Satz 4.19.)

**Satz 4.20.:** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  sind äquivalent:  $A$  ist singular, dass heißt  $\text{Rang}(A) < n$   
 $\leftrightarrow \det(A) = 0 \leftrightarrow$  homogenes GLS hat unendlich viele Lösungen

4.5.: Inverse Matrix:

**Definition 4.21.:** eine Matrix  $X \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  heißt „Inverse Matrix“ zu einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ , wenn gilt  $A \cdot X = X \cdot A = I_n$

Für diese Matrix  $X$  schreibt man  $A^{-1}$  (das bedeutet  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ )

$A^{-1}$  kann nur existieren, wenn  $\det(A) \neq 0$ :

**Formel 4.23**

**Beweis:**  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

$A^{-1} = X : A \cdot X = X \cdot A = I_n$

Wie berechnet man  $A^{-1}$ ?

• Sei  $A^{-1} = X = (x^1 \dots x^n)$  wobei  $x^j = j$ -ter Spaltenvektor von  $X = A^{-1}$

• Man kann zeigen (siehe Übung):  $A \cdot X = (Ax^1 \dots Ax^n) = I_n = (e^1, \dots, e^n)$  **Formel 4.24**

Wobei  $e^j = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T \leftarrow j$ -te Zeile  $j$ -ter Einheitsvektor =  $j$ -ter Spaltenvektor von  $n$

$\rightarrow x^j \in \mathbb{R}^n$  ist Lösung des GLS  $Ax^j = e^j, j = 1, \dots, n$ , falls  $\det(A) \neq 0$  **Formel 4.25**

**Satz 4.22.:** Für  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  existiert  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  genau dann, wenn  $\det(A) \neq 0$ .

Der Gauß-Jordan-Algorithmus zur Berechnung von  $A^{-1}$ :

**Schritt 1:** für Gleichungssysteme  $Ax^j = e^j, j = 1, \dots, n$  führt man die Vorwärtselimination simultan mit allen rechten Seiten  $e^1, \dots, e^n$  durch:

**Schritt 2:** dividiere in jeder Zeile durch das Pivotelement (Skalierung)

**Schritt 3:** erzeuge rückwärts (dass heißt von Spalte  $n$  bis Spalte  $1$ ) Nullen oberhalb der Hauptdiagonalen  $\rightarrow$  Rückwärtselimination

	1 * * *	1 0 0 *
Skalierung:	0 1 * *	Rückwärtselimination: 0 1 0 *
	0 0 1 *	0 0 1 *

dass heißt: in  $i$ -ter Gleichung  $1 \cdot x_i = *$

**Beispiel:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 9 & 18 \end{pmatrix}$  Schritt 1:  $(A|I_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 18 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+2 \cdot z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 18 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3 \cdot z_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot z_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot z_2$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} -z_3 \\ -2 \cdot z_3 \\ \end{matrix}$$

Schritt 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2,5 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) - z_2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1,5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2,5 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) - z_2$$

$$\begin{aligned} Ax &= c \\ A \cdot A^{-1} \cdot x &= A^{-1} \cdot c \\ x &= A^{-1} \cdot c \end{aligned}$$

Rechenregeln für inverse Matrizen:

(M1)  $(A^{-1})^{-1} = A$  **Formel 4.26**  
 (M2)  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$   
 (M3)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Determinantenformel für  $A^{-1}$ :

Es gilt:  $A^{-1} = (x_{ij})_{(m,n)}$   $x_{ij} = 1/\det(A) \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$  **Formel 4.27**  
 $A_{ji}$  = Untermatrix von A durch Streichen von Zeile j und Spalte i

4.6. Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität:

Definition 4.23.: Unter einem „*Skalarprodukt auf den Vektorraum V*“ versteht man eine Abbildung die jedem paar von Elementen  $u, v \in V$  eine Zahl  $(u, v) \in \mathbb{R}$  zuordnet mit folgenden Eigenschaften:

- (S1)  $(u, v) = (v, u) \quad \forall (u, v) \in V$
- (S2)  $(\lambda \cdot u + \mu \cdot v, w) = \lambda \cdot (u, w) + \mu \cdot (v, w) \quad \forall (u, v, w) \in V; \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$
- (S3)  $(u, v) \geq 0 \quad \forall (u) \in V$  und  $(u, u) = 0$  genau dann, wenn  $u = 0_V$

speziell: ist auf  $V \in \mathbb{R}^n$  das sogenannte „*Euklidische Skalarprodukt*“ definiert als:

$$(u, v) = u^T \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \forall u = (u_1, \dots, u_n)^T = v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$$
 **Formel 4.28**

Bemerkung: später zum Beispiel bei Fourier-Reihe, sind  $u, v \in V$  Funktionen über  $[a, b]$

Eigenschaften von  $(\cdot, \cdot)$ :

„Cauchy-Schwarz-Ungleichung“: (gilt im allgemeinen Vektorraum)

$$|u, v|^2 \leq (u, u) \cdot (v, v) \quad \forall (u, v) \in V$$
 **Formel 4.29**

für das Euklidische Skalarprodukt (4.28.) und eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  gilt:

$$(Au, v) = (u, A^T v) \quad \forall (u, v) \in V$$
 **Formel 4.30**

Definition 4.24.: Unter der „*Norm auf einen Vektorraum*“ versteht man eine Abbildung, die jedem Element  $u \in V$  eine Größenzahl  $\|u\| \in \mathbb{R}$  (sprich: „*Norm von u*“) zuordnet mit folgenden Eigenschaften:

- (N1)  $\|u\| \geq 0 \quad \forall (u, v) \in V$  und  $\|u\| = 0$  genau dann, wenn  $u = 0_V$
- (N2)  $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\| \quad \forall (u, v) \in V \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (N3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall (u, v) \in V$  (Dreiecksungleichung)

speziell: auf  $V = \mathbb{R}^n$  ist die „*Euklidische Norm*“ definiert als:

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad \forall u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$$
 **Formel 4.31**

Normen sind wichtig für Fehlerabschätzungen:

Beispiel: GLS  $Ax = b$   
 $A \tilde{x} = \tilde{b}$  wobei  $\tilde{b} = b + \delta b$

Man kann zeigen:  $\|x - \tilde{x}\| \leq C_A \cdot \|\delta b\| \quad // \|\delta b\| = \text{Grad der Störung}$

Definition 4.25.: Zwei Elemente  $u, v \in V$  heißen „*orthogonal*“ (bezüglich  $(\cdot, \cdot)$ ), wenn  $(u, v) = 0$  Ein System von Elementen  $w_1, \dots, w_d \in V$  heißt „*Orthonormalbasis (ONB)*“ von V, wenn:

ortho:  $(w_i, w_k) = 0 \quad \forall i \neq k$

normiert:  $\|w_i\| = \sqrt{(w_i, w_i)} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$

Basis:  $V = \text{span}(w_1, \dots, w_d)$

Bemerkung: Die lineare Unabhängigkeit von  $w_1, \dots, w_d$  folgt aus der Orthogonalität, denn:

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i w_i = 0_v \quad |(\cdot, w_k) \text{ (Lineare Abhängigkeit)} \quad \sum_{i=1}^d \lambda_i (w_i, w_k) = (0_v, w_k) = 0$$

$$= \lambda_k (w_k, w_k) \quad \lambda_k = 0 \quad \forall k$$

Wie bestimmt man die ONB?

Gegeben:  $a_1, \dots, a_d$  sei eine Basis von  $V$ , das heißt  $V = \text{span}(a_1, \dots, a_d)$  und die  $a_i$  sind linear unabhängig

Gesucht: ONB  $w_1, \dots, w_d$  von  $V$

Das Gram-Schmidt-Verfahren:

Idee: bestimme die  $w_i$  rekursiv, so dass  $\boxed{\text{die } w_1, \dots, w_i}$  eine ONB  $\boxed{\text{span}(a_1, \dots, a_i)}$

Start: setze  $w_1 := \frac{1}{\|a_1\|} a_1$

**Formel 4.32**

Bestimmung von  $w_i; i \geq 2$  (aus:  $w_1, \dots, w_{i-1}$  und  $a_i$ ):

Sei bereits:  $w_1, \dots, w_{i-1}$  eine ONB von  $\text{span}(a_1, \dots, a_{i-1})$

Ansatz:  $\tilde{w}_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j w_j$ , wobei  $c_j \in \mathbb{R}$  zu bestimmen Konstanten sind

Ziel:  $c_j$  so, dass  $\tilde{w}_i \perp w_k, k = 1, \dots, i-1 \leftrightarrow 0 = (\tilde{w}_i, w_k) = (a_i, w_k) - \sum_{j=1}^{i-1} c_j (w_j, w_k)$

$$= (a_i, w_k) - c_k (w_k, w_k) \rightarrow c_k = (a_i, w_k) \quad \forall k = 1, \dots, i-1$$

$$\rightarrow \tilde{w}_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, w_j) \cdot w_j$$

**Formel 4.33**

Normierung von  $w_i$  heißt  $\tilde{w}_i = \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$

**Formel 4.34**

**Beachte:**  $\tilde{w}_i = 0_v$  heißt  $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_j w_j \in \text{span}(a_1, \dots, a_{i-1})$

das heißt:  $a_i$  ist linear unabhängig von  $a_1, \dots, a_{i-1}$ , das heißt  $a_1, \dots, a_i$  nicht linear unabhängig!

Vorteile einer ONB:

- Sei  $w_1, \dots, w_d$  eine ONB von  $V$
- Dann hat ein beliebiges Element  $v \in V$  eine Basisvorstellung

$$v = \sum_{i=1}^d (v, w_i) w_i \quad \text{denn: } v = \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot w_i \quad |(\cdot, w_k) \rightarrow (v, w_k) = \lambda_k (w_k, w_k)$$

- Weiterhin gilt:  $\|v\| := \sqrt{(v, v)} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \lambda_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d (v, w_i)^2}$

- Einfache Berechnung der Projektion eines Elementes  $u$  auf  $V = \text{span}(w_1, \dots, w_d)$  für ONB

$$\text{gilt: } p_u = \sum_{i=1}^d (u, w_i) w_i$$

4.7. Eigenwerte und Eigenvektoren:

Definition 4.26.: Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt **„Eigenwert (EW)“** der Matrix  $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ , wenn

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x \text{ und } x \neq 0_v}$$

**Formel 4.35**

Jeder derartige Vektor  $x$  heißt **„Eigenvektor (EV)“** von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Die Menge der Eigenwerte einer Matrix  $A$  heißt **„Spektrum von  $A$ “**

Bestimmung der Eigenwerte von  $A$  über das charakteristische Polynom:

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $A \leftrightarrow \exists x \neq 0 : Ax - \lambda x = 0_v = (A - \lambda \cdot I_n) \cdot x$

$\leftrightarrow$  das homogene GLS  $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$  hat nicht triviale Lösung  $x \neq 0_v$

$$\leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0}$$

Polynom in  $\lambda$

**Formel 4.36**

Definition 4.27.: Zu einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  heißt das Polynom:

$$\boxed{p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0}$$

das charakteristische Polynom von  $A$ .

**Satz 4.28.:** Die Eigenwerte von  $A$  sind genau die Nullstellen von  $p_A(\lambda)$ .

Nullstellen von  $p_A(\lambda)$ :

- Sei  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  die  $j$ -te Nullstelle von  $p_A(\lambda)$   $j = 1, \dots, k$ , mit der Vielfachheit  $\alpha_j \geq 1$ , dass heißt

- $\rightarrow p_A(\lambda)$  kann zerlegt werden als:

$$\boxed{p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}} \text{ mit } \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$$

**Formel 4.37**

Definition: unter der **„algebraischen Vielfachheit“** des EW  $\lambda_j$  versteht man die Zahl  $a(\lambda_j) := \alpha_j$

Und unter der **„geometrischen Vielfachheit“** des EW  $\lambda_j$  die Zahl:

$$\boxed{g(\lambda_j) := \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Lösungen } x \neq 0 \text{ des GLS: } (A - \lambda_{jn})x = 0 = \dim(\text{Kern}(A - \lambda \cdot I_n))}$$

**Formel 4.38**

Man kann zeigen, dass  $\boxed{1 \leq g(\lambda_j) \leq a(\lambda_j) \quad \forall j = 1, \dots, k}$

dass heißt speziell gilt:  $\boxed{g(\lambda_j) = 1, \text{ falls } a(\lambda_j) = 1}$

Beispiel zur Berechnung des EW und EV:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda)\{- (2+\lambda) - (4-\lambda) + 8\} =$$

$$(-1) \cdot (\lambda-1) \cdot \lambda \cdot (\lambda-2) = (-1)^3 \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-0) \cdot (\lambda-2)$$

$\rightarrow$  EW:  $\lambda_1 = 1$  mit  $a(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 0$  mit  $a(\lambda_2) = 1 \quad \rightarrow g(\lambda_{1,2,3}) = 1$

$\lambda_3 = 2$  mit  $a(\lambda_3) = 1$

EW  $\lambda =$  Nullstellen von  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \lambda^3 + \dots \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

EV zu  $\lambda_1 = 0$ : dass heißt bestimme die Lösung von  $(A - \lambda_1 I_n)x = 0_v$

$$(A - 0 \cdot I_n) = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \text{freie Variable}$$

Bemerkung:  $\boxed{\text{Die Anzahl der freien Variablen} = \text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_1 = g(\lambda_1) = \dim(\text{Kern}(A - \lambda_1 I_n))}$

$x_2 = \alpha_1 \rightarrow \text{EV} : (x_1, x_2, x_3)^T = \alpha_1(-4, 1, 0)^T, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ , wähle speziell  $\alpha_1 = 1 \rightarrow \text{EV} : x = (-4, 1, 0)^T$

EV zu  $\lambda_2 = 1$  : bestimme die Lösung von  $(A - \lambda_2 I_n)x = 0_v$

$$(A - 1 \cdot I_n) = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \text{freie Variable}$$

spezielle Wahl:  $x_3 = \alpha_1 = 1 \rightarrow \text{EV} : (x_1, x_2, x_3)^T = (-4, 0, 1)^T$

EV zu  $\lambda_3 = 3$  : bestimme die Lösung von  $(A - \lambda_3 I_n)x = 0_v$

$$(A - 2 \cdot I_n) = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \text{freie Variable}$$

spezielle Wahl:  $x_2 = \alpha_1 = 1 \rightarrow \text{EV} : (x_1, x_2, x_3)^T = (-2, 1, 0)^T$

### Diagonalisierbarkeit einer Matrix A:

Definition 4.29.: Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  heißt „*diagonalisierbar*“, wenn eine reguläre Transformationsmatrix  $S \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  existiert, so dass folgendes gilt:

$$S^{-1}AS = D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

### EW und EV der Diagonalmatrix D:

$$\det(D - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} d_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & d_n - \lambda \end{vmatrix} = (d_1 - \lambda) \cdot (d_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (d_n - \lambda) = 0$$

Die EW von  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  sind  $\lambda_i = d_i \quad i = 1, \dots, n$

Der EV zu  $\lambda_i = d_i$  ist  $x = e_i$  (Einheitsvektor)

### Rückschluss auf EW und EV von A:

Es gilt:  $D \cdot e_i = \lambda_i e_i \quad \text{mit } \lambda_i = d_i$

$$S^{-1}AS e_i = \lambda_i e_i \quad | \cdot S(\dots)$$

$$\leftrightarrow AS e_i = \lambda_i S e_i$$

$$\leftrightarrow \boxed{Ax_i = \lambda_i x_i \quad \text{mit } x_i = S e_i = i\text{-ter Spaltenvektor von } S}$$

dass heißt:  $x_i$  EV zu  $\lambda_i \quad x_i \neq 0_v$ , sonst wäre  $0 = S e_i \rightarrow \det(S) = 0$

$\rightarrow$  die Diagonalelemente von D sind die EW  $\lambda_i$  von A die Spaltenvektoren von S sind die EV  $x_i$  zu  $\lambda_i$

### **Satz 4.30.:**

- (a)  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  ist diagonalisierbar genau dann, wenn A n linear unabhängige EV hat
- (b) Die EV  $x_1, \dots, x_k$  zu paarweise verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  linear unabhängig sind
- (c) Jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  mit n verschiedenen EW  $\lambda$ , ist diagonalisierbar

### Anwendung der Diagonalisierung im Differentialgleichungssystem:

Aufgabe: Finde einen Vektor aus n Funktionen:  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  als Lösung des folgenden DGL-Systems:  $x(t) = Ax(t)$

Idee: transformiere auf ein einfacheres DGL-System (Voraussetzung: A diagonalisierbar)

$$\boxed{D = S^{-1}AS} \rightarrow SD = AS \rightarrow \boxed{SDS^{-1} = A}$$

$$x(t) = SDS^{-1}x(t) \quad | \cdot S^{-1}(\dots)$$

$$\begin{matrix} \boxed{S^{-1}x(t)} \\ \dot{y}(t) \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{DS^{-1}x(t)} \\ =:y(t) \end{matrix} \leftrightarrow \dot{y}(t) = Dy(t) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrizen  $A = A^T$ :

Im Allgemeinen sind die EW und EV einer reellen Matrix A komplex (siehe Übung)

Bemerkung: Im Fall einer komplexen Matrix  $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  ersetze  $A^T$  durch  $A^* = A^T$  und „symmetrisch“ durch „hermitisch“ (dass heißt  $A = A^*$ )

**Satz 4.31.:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  symmetrisch, dass heißt  $A = A^T$ , dann gilt:

- (a) alle EW  $\lambda_i$  von A sind reell
- (b) EV zu verschiedenen EW sind orthogonal  
( $x_i, x_j$ ) = 0 falls  $\lambda_i \neq \lambda_j \rightarrow$  sie sind auch linear unabhängig
- (c)  $\exists$  reelle Diagonalisierung  $\exists D, Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  mit  $\boxed{D = Q^T A Q, Q = Q^T}$  **Formel 4.39**

wobei:  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_i =$  EW von A,  $Q = x_1, \dots, x_n$ ,  $x_i =$  EV zu EW  $\lambda_i$  von A

wobei  $\|x_i\| = 1$  (normiert),  $(x_i, x_j) = 0 \quad \forall i \neq j$  (orthogonal)

Bemerkung:  $Q^T = Q^{-1}$  heißt  $Q^T * Q = I_n = Q * Q^T$ , dass heißt Q ist orthogonale Matrix, dass heißt für die Spaltenvektoren  $x_i$  von Q gilt:

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ dass heißt } x \text{ bilden ONS des } \mathbb{R}^n$$

Anwendung bei Untersuchung von quadratischen Formen:

„quadratische Form“: ist eine spezielle Abbildung, die jedem Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  eine Zahl

$$q(x) \in \mathbb{R} \text{ zuordnet mit } \boxed{q(x) := x^T A x \text{ mit } A = (a_{ij})_{(n,n)} \in \mathbb{R}^{(n,n)}} \quad \text{Formel 4.40}$$

$\rightarrow$  treten in der Extremwerttheorie auf

Komponentenweise Darstellung von  $q(x)$ :

Sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , dann gilt

$$q(x) = x^T(Ax) = \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \rightarrow \boxed{q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j} \quad \text{Formel 4.41}$$

Definition 4.32.: Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  heißt

„positiv definit“, wenn  $q(x) = x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

„negativ definit“, wenn  $q(x) = x^T A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

„indefinit“, wenn  $q(x) = x^T A x$  positive und negative Werte annimmt

Wann ist eine symmetrische Matrix positiv definit? („A ist s.p.d. Matrix“)

Idee: Diagonalisierung, dass heißt  $\exists$  orthogonale Matrix Q (dass heißt  $Q^T Q = Q Q^T = I_n$ ) mit

$$Q^T A Q = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow A Q = Q D$$

$$\rightarrow A = Q D Q^T = q(x) = x^T Q D Q^T x = (x^T Q) D (Q^T x) = (Q^T x)^T D (Q^T x) = y^T D y \quad (\text{sei } y := Q x^T)$$

$$\rightarrow \boxed{q(x) = y^T D y = \sum_{i,j=1}^n D_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n D_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}$$

- $\boxed{x \neq 0 \rightarrow y \neq 0}$ , denn wäre:  $y = 0 = Q^T x \mid Q \rightarrow Q 0 = 0 = x$

- analog gilt:  $y \neq 0 \rightarrow x \neq 0$  dass heißt  $\boxed{q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0} \leftrightarrow \boxed{q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0 \quad \forall x}$

$\neq 0$

**Satz 4.33.:** Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  ist

„positiv definit“, genau dann wenn alle EW  $\lambda$  von A **positiv** sind

„negativ definit“, genau dann wenn alle EW  $\lambda$  von A **negativ** sind

„indefinit“, genau dann wenn  $\exists$  EW  $\lambda_i > 0$  und EW  $\lambda_j < 0$  man kann zeigen:

**Satz 4.34.:** Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  mit  $A = (a_{ij})_{(n,n)}$  ist positiv definit, genau dann wenn für alle sogenannten „Hauptmatrizen“  $H_k$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) mit  $H_1 = (a_{11})$ ,  $H_2 = |a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}|$ , ...,  $H_k = |a_{11} \dots a_{kk}|$ , ...,  $H_n = |a_{11} \dots a_{nn}| = A$  gilt, dass  $\det(H_k) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

**Formel 4.42**

**Die Jordan'sche Normalform**

Im allgemeinen Fall  $A \neq A^T$  kann A nur in abgeschwächter Form diagonalisiert werden

Definition 4.35.:

Die Matrix  $J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  im Fall  $m \geq 2$  und  $J_1(\lambda) := (\lambda)$  heißt „Jordan-Kasten“ der Größe m zu  $\lambda$

**Satz 4.36.:** (Jordan, 1870)

Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$  kann auf Jordan'sche Normalform J transferiert werden, dass heißt  $\exists$  reguläre Transformationsmatrix  $T \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ , so dass

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} = \text{blockdiag}(J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_r}(\lambda_r))$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  Eigenwerte von A sind (nicht notwendig verschieden!)

und  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$

Bemerkung: Falls alle  $m_i = 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ), so ist  $J = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r = \lambda_n)$  Diagonalisierung von A

Genauere Beschreibung von J:

- seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit  $a(\lambda_i) =$  algebraische Vielfachheit der EW  $\lambda_i$   
 $g(\lambda_i) =$  geometrische Vielfachheit der EW  $\lambda_i$  ( $\dim(\text{Kern}(A - \lambda_i I_n))$ )
- dann gibt es  $g(\lambda_i)$ -viele Jordan-Kästen zu  $\lambda_i$ :  
Bezeichnung:  $J_{n_j^{(i)}}(\lambda_i)$  mit  $j = 1, \dots, g(\lambda_i)$
- dass heißt zu jedem der  $g(\lambda_i)$ -vielen linear unabhängigen EV  $x_j^{(i)}$ ,  $j = 1, \dots, g(\lambda_i)$ , gibt es einen Jordan-Kasten  $J_{n_j^{(i)}}(\lambda_i)$  der Größe  $n_j^{(i)}$  zum EW  $\lambda_i$  von A mit  $n_j^{(i)} \geq 1$  und  $n_1^{(i)} + n_2^{(i)} + \dots + n_{g(\lambda_i)}^{(i)} = a(\lambda_i)$  falls:  $g(\lambda_i) = a(\lambda_i) \quad \forall k = 1, \dots, n$ , so folgt:  
 $n_j^{(i)} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, g(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \rightarrow A$  ist diagonalisierbar

allgemeine gilt also:

$$T^{-1}AT = J = \text{blockdiag}(J_{n_1^{(1)}}(\lambda_1) + \dots + J_{n_{g(\lambda_1)}^{(1)}}(\lambda_1), \dots, J_{n_1^{(k)}}(\lambda_k) + \dots + J_{n_{g(\lambda_k)}^{(k)}}(\lambda_k))$$

$g(\lambda_1)$  viele Jordan-Kästen  $\lambda_1$        $g(\lambda_k)$  viele Jordan-Kästen  $\lambda_k$

Bemerkung: die Spalten von T sind entsprechend zum Jordan-Kasten  $J_{n_j^{(i)}}(\lambda_i)$  Ketten von Hauptvektoren zum EW  $\lambda_i$  beginnend mit dem EV  $x_j^{(i)}$

## 5. Konvergenz von Folgen und Reihen

### 5.1. Folgen

Definition 5.1.: eine „reelle (bzw. komplexe) Zahlenfolge“  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung, die jedem Index  $n \in \mathbb{N}$  ein Folgenglied  $a_n \in \mathbb{R}$  (bzw.  $a_n \in \mathbb{C}$ ) zuordnet  $n \rightarrow a_n$

Beispiel:  $a_n = \frac{3n}{4+n^2} \in \mathbb{R}$  (reelle Zahlenfolge)

$$a_n = \frac{4n-2}{3+n} - i \frac{7n}{5+n} \in \mathbb{C} \text{ (komplexe Zahlenfolge)}$$

rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = 1, a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \rightarrow \text{dient zur Berechnung von } \sqrt{2}$$

Definition 5.2.: Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  „konvergiert gegen einen Grenzwert  $g$ “, in Zeichen:

$$\boxed{g = \lim a_n}, \text{ wenn } \boxed{\forall \varepsilon < 0 \exists \text{ Indexschränke } N_0(\varepsilon): |a_n - g| < \varepsilon \quad \forall n > N_0(\varepsilon)}$$

= Abstand von  $a_n$  zu  $g$

**Formel 5.1**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt „konvergent“, wenn ein Grenzwert  $g$  existiert mit  $\boxed{g = \lim a_n}$ ; ansonsten heißt sie „divergent“

In  $\mathbb{R}$ :

In  $\mathbb{C}$ :

Beispiel:  $a_n = \frac{2n+7}{n+2} = \frac{2+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 0$  Vermutung  $g = \lim a_n = 2$

Nachweis von 5.1.: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben; Ziel: zeige:  $|a_n - 2| < \varepsilon \quad \forall n > N_0(\varepsilon)$

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n+7}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n+7-2n-4}{n+2} \right| = \left| \frac{3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2}$$

$$|a_n - 2| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon - 2} < n \quad N_0(\varepsilon) := \frac{3}{\varepsilon - 2} < n$$

Bemerkung: die logische „Richtung  $\leftarrow$ “ ist ausreichend.

Nachteile der Definition 5.1.:

- Man muss  $g$  schon kennen (ist z. B. bei Näherungsverfahren nicht so!)
- Nachweis ist oft aufwendig

Einen Ausweg liefern: Konvergenzkriterien für Folgen:

Satz 5.3.: Eine reelle oder komplexe Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent genau dann wenn sie eine „Cauchy-Folge“ ist. Dass heißt.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Indexschränke } N_0(\varepsilon): |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_0(\varepsilon)}$$

**Formel 5.2**

Dass heißt: Folge  $a_n$  zieht sich in sich zusammen (wichtig für Näherungsverfahren)

Satz 5.4.: Eine komplexe Zahl  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\boxed{a_n = x_n + i \cdot y_n}$ , wobei  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ , konvergiert genau dann, wenn Realteilfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die Imaginärteilfolge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent sind. Es gilt dann:  $g = \lim a_n = \lim x_n + i(\lim y_n)$   
 $\quad \quad \quad = \text{Re}(g) \quad \quad \quad = \text{Im}(g)$

Monotone beschränkte Folgen:

Definition 5.5.: Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ , heißt „beschränkt“, wenn:

$$\exists \text{ Konstante } M: |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

„monoton wachsend“, wenn  $a_n \leq a_{n+1}$

„monoton fallend“, wenn  $a_n \geq a_{n+1}$

**Satz 5.6.:** Jede beschränkte, reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die monoton verläuft, ist konvergent.

//Am Grenzwert/Maximum tritt eine Häufung auf

Beispiel:  $a_n = (1 + 1/n)^n$  ist beschränkt (z.B. mit  $M = 3$ ) und monoton wachsend.

**Satz 5.7.:** (Grenzwertsätze)

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente (reelle oder komplexe) Folgen von Zahlen mit  $a = \lim a_n$  und  $b = \lim b_n$ , dann gilt:  $\lim(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \lim(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ,  $\lim(a_n / b_n) = a / b$  falls  $b \neq 0$

Beispiel: 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 2n^2 + 1}{7n^3 + 3n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3}} = \frac{6}{7}$$

Definition 5.8.: („uneigentliche Grenzwerte  $\pm \infty$ “)

$$\lim a_n = +\infty, \text{ wenn } \forall K > 0 \quad \exists N_0(K) : a_n \geq K \quad \forall n > N_0(K)$$

$$\lim a_n = -\infty, \text{ wenn } \forall K > 0 \quad \exists N_0(K) : a_n \leq -K \quad \forall n > N_0(K)$$

Modifikation der Grenzwertsätze für  $\pm \infty$ :

Sei  $a = \lim a_n = \pm \infty$  und  $b = \lim b_n$  dann ist Satz 5.7. zu ersetzen:

$\alpha \cdot a + \beta \cdot b :=$	$\begin{matrix} +\infty, \text{ falls } \alpha > 0 \\ -\infty, \text{ falls } \alpha < 0 \end{matrix}$	$(+\infty) \cdot b :=$	$\begin{matrix} +\infty, \text{ falls } b > 0 \\ -\infty, \text{ falls } b < 0 \end{matrix}$	$b / \pm \infty := 0$
-------------------------------------	--	------------------------	--	-----------------------

**Beachte:** „unbestimmte Ausdrücke“ der Form  $\infty - \infty$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0/0$ ,  $0 \cdot \infty$  erlauben **nicht** die Anwendung der Grenzwerte.

Beispiel: „ $\infty - \infty$ “ Idee: erzeuge einen Bruch

$$A_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) \cdot (\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$= \frac{(n^2 + n) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{2}$$

5.2. Reihen:

Motivation: ein Ziel wäre zum Beispiel: eine Funktion  $f(x)$  immer besser durch Polynome

darzustellen:  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = p_n(x)$  Polynom n-ten Grades

Was passiert für  $n \rightarrow \infty$ ?

Definition 5.9.:

- Unter einer „Reihe“  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (mit  $a_k \in \mathbb{C}$ ) versteht man eine „Partiellsammenfolge“  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$

- Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt „konvergent“, wenn  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert  $s$  hat, dass heißt:

$\exists s \in \mathbb{C} : s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right)$  man schreibt:  $s = \sum a_k$

- eine nicht konvergente Matrix heißt „divergent“

- eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt „absolut konvergent“, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

- unter  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  versteht man die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  mit  $a_k := 0$  für  $k = 0, \dots, k_0-1$

Beispiel: „geometrische Reihe“  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  mit  $q \in \mathbb{C}$

bekannt ist die Formel  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  für  $q \neq 1 \rightarrow s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$  falls  $|q| < 1$

im Fall  $|q| > 1$  ist  $s_n$  unbeschränkt  $\rightarrow (s_n)$  ist divergent

Zusammenfassung:  $s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$  für  $|q| \geq 1$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergent **Formel 5.3**

Satz 5.10.: (Konvergenz-Kriterien)

(a) **notwendiges Konvergenzkriterium (KK):**  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent,  $\lim a_k = 0$

dass heißt wenn  $\lim a_k \neq 0$ , so ist die  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent

(b) **absolut konvergent  $\rightarrow$  konvergent:**

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent  $\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent

(c) **Quotienten-Kriterium:** Annahme: zu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  existiert der Grenzwert  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$

dann gilt:  $q < 1 \rightarrow$  Reihe ist absolut konvergent, damit auch konvergent

$q > 1 \rightarrow$  Reihe ist divergent

$q = 1 \rightarrow$  keine Aussage mit Quotientenkriterium möglich

(d) **Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen:**

Voraussetzung:

- alternierende reelle Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$  mit  $b_k \geq 0$

-  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei monoton fallend (dass heißt  $b_{k+1} \leq b_k \forall k$ ) und Nullfolge (dass heißt  $\lim b_k = 0$ )

Behauptung:  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$  ist konvergent

**(e) Wurzelkriterium:**

Gilt für die Glieder einer Reihe ab einem bestimmten Index  $n_0$

$$n \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \forall n \geq n_0 \rightarrow \text{Reihe konvergent}$$

$$n \cdot \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \forall n \geq n_0 \rightarrow \text{Reihe divergent}$$

Bemerkung zum Beweis:

Zu (a): Folge der Partialsummen  $(s_n)$  mit  $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  muss konvergent sein

$\rightarrow (s_n)$  ist Cauchy-Folge

dass heißt  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon): |s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall m, n > N_0(\varepsilon)$

$$\text{Spezielle Wahl: } m := n - 1 > N_0(\varepsilon) : |s_n - s_{n-1}| < \sum_{k=0}^n |a_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = |a_n| < \varepsilon \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$\rightarrow (s_n)$  ist Cauchy-Folge  $\rightarrow (s_n)$  konvergent  $\rightarrow$  Reihe  $\sum a_k$  konvergent

$$\text{Zu (b): } n > m \quad |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \sum_{k=m+1}^n |a_k| = \sum_{k=0}^n |a_k| - \sum_{k=0}^m |a_k| = |\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| < \varepsilon$$

$(s_n)$  ist Cauchy-Folge  $\rightarrow (s_n)$  konvergent  $\leftrightarrow$  Reihe  $\sum a_k$  konvergent

Zu (c): Sei  $\boxed{q < 1}$

$$\rightarrow \varepsilon := \left\{ \frac{1-q}{2} ; \frac{q}{2} \right\} \text{ gilt } (q - \varepsilon, q + \varepsilon) < (0, 1)$$

außerdem  $q_\varepsilon := q + \varepsilon < 1 \quad q = \lim |a_{k+1}|/|a_k| \rightarrow \exists N_0(\varepsilon) : |a_{k+1}|/|a_k| \leq q_\varepsilon \quad \forall k > k_0 > N_0(\varepsilon)$

$$\leftrightarrow |a_{k+1}| \leq q_\varepsilon \cdot |a_k|$$

$$\rightarrow |a_k| \leq q_\varepsilon \cdot |a_{k-1}| \leq q_\varepsilon^2 \cdot |a_{k-2}| \leq \dots \leq q_\varepsilon^m \cdot |a_{k-m}| \quad \forall k \text{ mit } k-m \geq k_0 \quad k \geq k_0 + m$$

Ziel: sei  $\tilde{s}_n := \sum_{k=0}^n |a_k|, (\tilde{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend  $\rightarrow (\tilde{s}_n)$  konvergent  $\rightarrow (s_n)$  mit  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &:= \sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n |a_k| \\ &=: C_1 \leq |a_{k_0}| + q_\varepsilon \cdot |a_{k_0}| + q_\varepsilon^2 \cdot |a_{k_0}| + \dots + q_\varepsilon^{n-k_0} \cdot |a_{k_0}| \\ &\leq |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q_\varepsilon^j < |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{\infty} q_\varepsilon^j = \frac{|a_{k_0}|}{1 - q_\varepsilon} \text{ gilt } \forall n \text{ und ist endlich} \end{aligned}$$

Fall  $\boxed{q > 1}$ : man zeigt:  $\lim a_k \neq 0$

Beispiel:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right) \frac{1-k^2}{100k^2+3}$  Quotienten-Kriterium liefert  $q = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right) \right) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1-k^2}{100k^2+3} \right) = \cos(0) \cdot \frac{0-1}{100+0} = 1 \cdot \frac{-1}{100} = -\frac{1}{100} \neq 0$$

$\rightarrow$  Reihe ist divergent

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k!} \cdot z^k$ , wobei  $z \in \mathbb{C}$  Parameter

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1} \cdot \frac{k!}{k+1!} \cdot \frac{|z^{k+1}|}{|z^k|} \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^2 + \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{(1 \cdot 2 \dots \cdot k)}{(1 \cdot 2 \dots \cdot k \cdot (k+1))} \cdot \frac{|z^{k+1}|}{|z^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot |z^k| = |z^k| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

→  $\forall z \in \mathbb{C}$  gilt  $q = 0 < 1$  → Reihe ist absolut konvergent  $\forall z \in \mathbb{C}$

3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  ist alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot b_k$  mit  $b_k = \frac{1}{k}$

-  $b_k$  ist Nullfolge -  $b_k$  ist monoton fallend, dann  $b_{k+1} = \frac{1}{k+1} < b_k = \frac{1}{k}$

→ Reihe ist konvergent

**Satz 5.11.: (Vergleichskriterien)**

(a) Majoranten-Kriterium

Voraussetzung:  $\exists$  konvergente Majorante  $\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k$  zur Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ , dass heißt:

-  $|a_k| \leq M_k \quad \forall k \geq k_0$  ( $k_0$  ist frei wählbar, aber fest)

-  $\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k$  ist konvergent

Behauptung:  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent

(b) Minoranten-Kriterium

Voraussetzung:

-  $\sum_{k=0}^{\infty}$  hat reelle positive Glieder  $a_k$

-  $\exists$  divergente Minorante  $\sum_{k=k_0}^{\infty} m_k$  zu  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ , dass heißt

-  $0 \leq m_k \leq a_k \quad \forall k \geq k_0$

-  $\sum_{k=k_0}^{\infty} m_k$  ist divergent

Behauptung: Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  ist divergent

oft verwendete Majoranten/Minoranten sind:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ ist	Konvergent für $p > 1$ (als Majorante nutzbar) Divergent für $p < 1$ (als Minorante nutzbar)
---	---

**Formel 5.4**

Bemerkung: die Reihe für  $p = 1$  heißt harmonische Reihe und ist divergent, denn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{1 + 2k^4} \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x), \quad x \in \mathbb{R}$$

→ Quotienten-Kriterium liefert  $q = 1$  //grob gekürzt kommt  $p = 2$  raus → Majorante

Konstruktion einer Majorante:

$$|a_k| = \frac{(-1)^k \cdot k^2}{1 + 2k^4} \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) \leq \frac{k^2}{1 + 2k^4} \leq \frac{k^2}{2k^4} = \frac{1}{2k^2} =: M_k$$

$a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$  ist konvergente Majorante  $\rightarrow$  Reihe ist konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$

**Satz 5.12.: (Rechnen mit Reihen)**

Linearkombination:

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k)$  ist konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

**Formel 5.5**

Produkt:

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent

$\rightarrow$  Cauchy'sche Produktformel:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (a_k \cdot b_{n-k}) \right)$$

**Formel 5.6**

*konkret:*

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 && \leftarrow n = 0 \\ & + a_0 b_1 + a_1 b_0 && \leftarrow n = 1 \\ & + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 && \leftarrow n = 2 \\ & + \dots \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot y^k \right) = \dots(5.6)\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x + y)^n$$

$$= e^x \qquad = e^y \qquad = e^{x+y}$$

## 6. Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Gegeben: Intervall  $I$ , Punkt  $a \in I$   
 Funktion  $f: I \setminus \{a\}$   
 Gesucht: Verhalten von  $f(x)$  an der Stelle  $a$

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ ,  $I = (1, \infty)$   $a = 2 \rightarrow f(2)$  ist nicht definiert

Definition 6.1.:

- $f(x)$  hat an der Stelle  $a$  den „rechtsseitigen Grenzwert  $g_+$ “ in Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g_+$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $I$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $a < x_n \forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g_+$
  - $f(x)$  hat an der Stelle  $a$  den „linksseitigen Grenzwert  $g_-$ “ in Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g_-$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $I$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $x_n < a \forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g_-$
  - $f(x)$  hat an der Stelle  $a$  den „Grenzwert  $g$ “  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ , wenn gilt:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$
- Bemerkung: Definition 6.1. gilt sinngemäß auch für die Fälle  $a = \pm\infty$  und  $g = \pm\infty$

### Grenzwertsätze zur Berechnung der Grenzwerte

Voraussetzung: es existieren die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = g_1$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = g_2$

Behauptung: dann gilt mit beliebigen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow a} \{\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x)\} = \alpha_1 \cdot g_1 + \alpha_2 \cdot g_2$ ,
  - $\lim_{x \rightarrow a} \{f_1(x) \cdot f_2(x)\} = g_1 \cdot g_2$
  - $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)/f_2(x) = g_1/g_2$ , falls  $g_2 \neq 0$
- $\rightarrow$  es gilt auch sinngemäß für die eindeutigen Grenzwerte

Beispiele:

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x}$$

$$\text{aus } \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \text{ folgt nach Grenzwertsatz } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, I = (0, 4) \quad a = 1, \text{ „Polstelle“}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), I = (-1, 1), a = 0$$

$$1. \text{ Folge: } x_n := 1/n > a = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$$

$$f(x_n) = \sin(\pi/(1/n)) = \sin(n \cdot \pi) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

$$2. \text{ Folge: } x_n' = 1/(2n + 1/2) > a = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = a = 0$$

$$f(x_n') = \sin((2n + 1/2) \cdot \pi) = \sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = 1$$

$\rightarrow$  der rechtsseitige Grenzwert existiert nicht!!!

Bemerkung: analog für  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Definition 6.2.:

- Sei  $I \in \mathbb{R}$  ein Intervall und  $x_0 \in I$  eine spezielle Stelle. Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt „stetig in  $x_0$ “, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (Grenzwert = Funktionswert)

$$\text{Stetig: } g = f(x_0) = g_+$$

Ist  $x_0$  ein Randpunkt von  $I$ , so ist der entsprechende einseitige Grenzwert zu nehmen.

- Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt „stetig auf  $I$ “, wenn sie für jedes  $x_0 \in I$  stetig in  $x_0$  ist.

- Stetige Funktionen haben keine Lücken oder Sprünge.

Beispiele für Unstetigkeiten:

- Sprung:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & ; x \in [0, 1) \\ 1 & ; x \in [1, 2] \end{cases} \quad I = [0, 2]$$

$f(x)$  ist eindeutig in  $x_0 = 1$ , da  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0,5 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(x_0)$

- Ungedämpfte Oszillation:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/x) & ; x \in I \setminus \{0\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$  unstetig in  $x_0 = 0$ , da  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  nicht existiert //Stetigkeit: Grenzwert = Funktionswert

### Stetigkeit von Elementarfunktionen

- Polynome:  $f(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n$   $a_i \in \mathbb{R}$  } Stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R}$   
 $\sin(x), \cos(x), e^x$
- rationale Funktionen:  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + \dots + a_0}{b_kx^k + \dots + b_0}$  stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $q(x_0) \neq 0$
- $\tan(x), \cot(x), \ln(x), x^p$  ( $p \in (0, 1)$ )  $\rightarrow$  stetig auf ihrem Definitionsbereich
- Umkehrfunktionen:  $\arcsin(x), \arctan(x), \dots \rightarrow$  stetig auf ihrem Definitionsbereich

### Eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist wieder stetig

a) seien  $f(x), g(x)$  stetig in  $x_0 \rightarrow f(x) + g(x); f(x) \cdot g(x); f(x)/g(x)$  mit  $g(x) \neq 0$  sind auch stetig in  $x_0$

b)  $h(x) = f(g(x))$  ist stetig in  $x_0$ , wenn;

- $g(x)$  ist stetig in  $x_0$
- $f(x)$  ist stetig auf dem Intervall  $I$  mit  $g(x_0) \in I$  (dass heißt:  $f(x)$  ist stetig in  $g(x_0)$ )

Beispiel:

$$h(x) = \ln \left( 1 + 2 \left( \frac{e^x - x}{x^2 + 1} \right) \right) = f(g(x)), \text{ wobei } f(x) = \ln(x)$$

$$\quad \quad \quad =: g(x)$$

$$g(x) = 1 + 2 \left( \frac{e^x - x}{x^2 + 1} \right) \geq 1 \text{ ist nach (a) stetig in allen } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ stetig in } I = (0, \infty) \rightarrow g(x_0) \in I \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften stetiger Funktionen:

**Satz 6.3.:** Voraussetzung:

- $I = [a, b]$  abgeschlossenes und beschränktes Intervall [kompakt]
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I$

Behauptung:

- (a)  $f(x)$  ist beschränkt auf  $I = [a, b]$ , dass heißt:  $\exists$  Konstante  $K : |f(x)| \leq K \quad \forall x_0 \in [a, b]$
- (b) Maximum und Minimum von  $f(x)$  werden angenommen, dass heißt:

$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ , so dass

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

- (c) Zwischenwertsatz: jeder Wert  $c$  zwischen dem Min und Max von  $f(x)$  wird angenommen, dass heißt:  $\forall c \in [f(x_{\min}), f(x_{\max})] \quad \exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = c$

Bemerkung: Die Voraussetzung können im allgemeinen nicht abgeschwächt werden. Beispiel siehe Übungsaufgaben

Folgerung:

Voraussetzung:

- $f$  stetig auf  $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$  }  $\rightarrow \exists$  Nullstellen:  $x^*(a, b)$  mit  $f(x^*) = 0$
- dies ist die Grundlage des folgenden "Bischoffsverfahren":

Ziel: berechne Intervallschachtelung für Nullstellen  $x^*$

$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$  // Intervalllängen halbieren sich von Intervall zu Intervall

Start: finde  $[a_0, b_0]$  mit  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

$k \rightarrow k + 1$ : setze  $x_k := (a_k + b_k)/2 \in [a_k, b_k]$

$$w_k := f(x_k)$$

wenn  $(|w_k| < \text{Toleranz})$  dann  $x^* := x_k$

sonst  $[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, x_k] & \text{wenn } f(a_k) \cdot w_k < 0 \\ [x_k, b_k] & \text{wenn } w_k \cdot f(b_k) < 0 \end{cases}$

Fehlerabschätzung:  $|x_k - x^*| \leq (b_k - a_k) \leq (1/2)^{k+1} \cdot (b_0 - a_0)$

## 7. Differentialrechnung für Funktionen in einer Variablen

### 7.1.: Differenzierbarkeit:

#### Differenzierbarkeit:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan(\alpha(x))$$

→ Anstieg der Sekante durch  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$

→ Anstieg der Tangente =  $\tan(\alpha_0)$

#### Definition 7.1.:

- Eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt „differenzierbar in  $x_0 \in (a, b)$ “, wenn folgender Grenzwert existiert und endlich ist:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{Formel 7.1}$$

- $f(x)$  heißt „differenzierbar auf  $(a, b)$ “, wenn sie differenzierbar ist in jedem Punkt  $x_0 \in (a, b)$ . die Abbildung  $x \rightarrow f'(x)$  heißt „Ableitung von  $f(x)$ “

- den Übergang von  $f(x) \rightarrow f'(x)$  nennt man „differenzieren“

Schreibweisen sind:  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot f(x)$

- unter der „links-“, bzw. „rechtsseitigen Ableitung“  $f'(x_0^-)$  bzw.  $f'(x_0^+)$  versteht man die einseitigen Grenzwerte:

$$f'(x_0^\pm) := \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{Formel 7.2}$$

Beispiel:  $f(x) = |x|$ ,

$$x_0 = 0 \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$f(x)$  ist differenzierbar in  $x_0 = 0$ , da linksseitig GW  $\neq$  rechtsseitiger GW aber die links- und rechtsseitigen Ableitung existiert

#### geometrischen Bedeutung der Ableitung:

Tangente an die Kurve  $y = f(x)$

im Punkt  $P = (x_0, f(x_0))$  hat den

Anstieg  $\tan \alpha_0 = f'(x_0)$

$$\rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

**Formel 7.3**

#### Tangentengleichung

#### Notwendige Bedingungen für die Differenzierbarkeit von $f(x)$ im Punkt $x_0$ :

- $f(x)$  muss stetig sein in  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- linksseitige Ableitung = rechtsseitige Ableitung, dass heißt  $f(x)$  hat keinen „Knick“ oder „Spitze“

7.2. Differentiationsregeln:

**Ableitungen wichtiger Grundfunktionen:**

$f(x) = c = \text{const.}$	$f'(x) = 0$		<b>Formel 7.4</b>
$f(x) = x^p$	$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$	für $p \in \mathbb{R}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$		
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$		
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$		
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$		

**Satz 7.2.: (Ableitung zusammengesetzter Funktionen)**

- seien  $u(x)$ ,  $v(x)$  differenzierbare Funktionen
- dann gilt:  $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$      $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$  **Produktregel**

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$  **Quotientenregel** ( $v(x) \neq 0$ )

$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) = (du/dz) \cdot (dz/dx)$  **Kettenregel**  
äußere Ableitung    innere Ableitung

Beispiel 1:

Polynom :  $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 7 \rightarrow p'(x) = 15x^2 - 4x + 3$

Beispiel 2:

Rat. Funktion :  $r(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} \rightarrow$   
 $r'(x) = \frac{3(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1) - (x^3 - 2x) \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2}$

Beispiel 3:

$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + [\tan x]^2$

Beispiel 4:

$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 5x} = (x^4 - 3x^2 + 5x)^{1/2}$   
 $f'(x) = 1/2(x^4 - 3x^2 + 5x)^{-1/2} \cdot (4x^3 - 6x + 5) = 1/2 \cdot \frac{4x^3 - 6x + 5}{x^4 - 3x^2 + 5x}$

Beispiel 5:

$f(x) = 2 \sin^2(3x + 1) = u(\sin(3x + 1))$  mit  $u(z) = 2z^2$   
 $f'(x) = 4 \sin(3x + 1) \cdot (\sin(3x + 1))' = 4 \sin(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1) \cdot 3$   
 $= 12 \sin(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1)$

**Logarithmische Differentiation:**

Ziel: differenzieren Funktionen der Art  $f(x) = (p(x))^{q(x)}$      $|\ln \dots$

- Weg: 1) Logarithmieren:  $\ln f(x) = q(x) \cdot \ln p(x)$   
 2) linke und rechte Seite nach  $x$  ableiten / differenzieren  
 3) nach  $f'(x)$  umstellen

Beispiel:  $f(x) = (\cos x)^{\sin x} \quad |\ln$   
 $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln(\cos x)$

$1/f(x) \cdot f'(x) = \underbrace{\cos x}_{u'(x)} \cdot \ln(\underbrace{\cos x}_{v(x)}) + \underbrace{\sin x}_{u(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{v'(x)}}$   
 $\rightarrow f'(x) = (\cos x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x})$

**Ableitung von Umkehrfunktionen:**

$g: D \rightarrow W$  heißt „Umkehrfunktion“ der Funktion  $f: W \rightarrow D$ , wenn  $f(g(x)) = x \quad \forall x \in D$  und  $g(f(x)) = x \quad \forall x \in W$

Beispiel 1:

$g(x) = \ln x \quad D = (0, \infty), W = (-\infty, \infty)$   
 ist Umkehrfunktion zu  $f(x) = e^x \quad f: W \rightarrow D$   
 $y = e^x \leftrightarrow x = \ln y \leftrightarrow x = \ln e^x$

Beispiel 2:

$f(x) = \sin x \quad g(x) = \arcsin x$   
 $g: D := [-1, 1] \rightarrow W = [-\pi/2, \pi/2]$   
 $f: W := [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow D = [-1, 1]$   
 $y = \sin x \leftrightarrow x = \arcsin y \leftrightarrow x = \arcsin(\sin x)$

**Existenz und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion**

Voraussetzung:

- $f: W \rightarrow D$  sei differenzierbar auf  $W$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in W$  oder  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in W$  dass heißt  $f'(x) \neq 0$   
 $f(x)$  monoton wachsend       $f(x)$  monoton fallend

Behauptung: es existiert eine Umkehrfunktion  $g: D \rightarrow W$  und  $g$  ist differenzierbar

Ableitung von g:

$$f(g(x)) = x \quad |dx/d$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

//Formel zur Ableitung der Umkehrfunktion

**Formel 7.5**

Beispiel:

$$g(x) = \arcsin x, \rightarrow f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Ziel: stelle  $(\cos y)$  dar durch  $\sin y = \sin(\arcsin x) = x$

es gilt:  $\cos y = \sqrt{1 - (\sin y)^2} = \sqrt{1 - x^2} \quad \rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Höhere Ableitungen: ...werden rekursiv definiert:  $f^{(2)}(x) = f''(x) = (f'(x))'$   
 $(k + 1)$ . Ableitung:  $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$

7.3. Lokales Maximum und Minimum einer Funktion:

Definition 7.3.: Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  hat in einem Punkt  $x_0 \in D$  ein

- „globales Maximum“, wenn  $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$
- „globales Minimum“, wenn  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$
- „lokales Maximum“, wenn  $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$
- „lokales Minimum“, wenn  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$

wobei  $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  ein hinreichend kleines Intervall um  $x_0$  ist.

Unter „Extremum“ versteht man ein Maximum oder Minimum

**Satz 7.4.:** (notwendiges Kriterium für einen lokalen Extremwert)

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar im inneren Punkt  $x_0 \in (a, b)$
- $f(x)$  hat in  $x_0$  ein lokales Extremum  $\rightarrow f'(x_0) = 0$

Beweis: (für lokale Maxima)

- es existiert  $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in [a, b]$  mit  $f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in I$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \{ \geq 0 \text{ für } \forall x < x_0; \leq 0 \text{ für } \forall x > x_0 \}$$

$$\rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ und } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\rightarrow f'(x_0) = 0$$

- Punkte  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$  heißen „stationäre Punkte“, sie sind „verdächtige Punkte“ (Kandidaten) für lokale Extrema, müssen aber keine Extremstellen sein.

Beispiel:  $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

$\rightarrow$  Nullstellen sind:  $x_0 = 0$   
(ist keine Extremstelle)

Kandidaten für globale Extrema von  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind:

- Alle stationären Punkte  $x_k \in (a, b)$  mit  $f'(x_k) = 0$
- Randpunkte  $a, b$
- Punkte  $x_k$ , wo  $f(x)$  nicht differenzierbar ist

#### 7.4. Der Mittelwert und seine Anwendungen:

##### Satz 7.5.: (Mittelwertsatz)

Voraussetzung:

- $f(x)$  ist stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$
- $f(x)$  ist differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, b)$

Behauptung: es existiert eine Stelle  $x_0 \in (a, b)$

$$\text{mit } \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(x_0)$$

Sekantenanstieg      Tangentenanstieg

Beweis: wir definieren die Hilfsfunktion:

$$\varphi(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \cdot (x - a) \right]$$

$$:= f(x)$$

$\varphi(x)$  ist stetig auf  $[a, b] \rightarrow$  globales Maximum und globales Minimum werden angenommen:

Fall 1:  $\varphi(x) = 0 \forall x \in [a, b] \rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$  mit  $\varphi'(x_0) = 0$

Fall 2:  $\exists x_1 \in (a, b)$  mit  $\varphi(x_1) > 0, \exists x_0 \in [a, b]$  mit  $\varphi'(x_0) = \max_{x \in [a, b]} \varphi(x) \geq \varphi'(x_1) > 0$

$\rightarrow x_0 \in [a, b]$  da  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$\exists \varphi'(x_0) \rightarrow \varphi'(x_0) = 0$

Fall 3:  $\exists x_1 \in (a, b) : \varphi'(x_0) < 0 \rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : \varphi'(x_0) = 0$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \left\{ 0 + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \cdot 1 \right\} = 0 \rightarrow \text{Beweis}$$

##### Satz 7.6.: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Voraussetzung:

- $f(x), g(x)$  stetig auf  $[a, b]$
- $f(x), g(x)$  differenzierbar auf  $(a, b)$
- $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Behauptung: es  $\exists x_0 \in (a, b)$  mit  $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(x_0)/g'(x_0)$

Spezialfall:  $g(x) = x$  liefert Mittelwertsatz

Beweisidee: nutze die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \cdot \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \text{ nutze MWS}$$

$$\exists x_0 \in (a, b), \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = 0 = \varphi'(x_0)$$

**1. Anwendung:** (Regel von l'Hospital)

nach dem Marquie de l'Hospital (1661 – 1704)

**Satz 7.7.:** (Regel von l'Hospital für Grenzwerttyp 0/0; ∞/∞)

Voraussetzung:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  oder bei Grenzwerte sind  $\pm\infty$
- $f(x), g(x)$  differenzierbar auf  $(a, b) \setminus \{x_0\}$  wobei  $x_0 \in (a, b)$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$

**Behauptung:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert

Formel gilt sinngemäß auch für  $x_0 = \pm\infty$  und für einseitige Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$

**Beweisidee für Typ 0/0:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad \xi_x \rightarrow x_0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi_x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

**Beispiel 1:**  $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x - 8} := \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 0 \quad \rightarrow \text{Typ 0/0}$$

$$\rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2}{2x - 2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

**Beispiel 2:**  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Typ 0/0                      Typ 0/0

**Beispiel 3:**  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$  Typ  $\infty \cdot 0 \rightarrow$  umformen auf 0/0

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \frac{(x-1) - (x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2 \quad // \text{alle } \lim x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**2. Anwendung:** (Monotonieuntersuchung von f(x))

- sei f(x) auf [a, b] monoton wachsend, dass heißt  $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$  mit  $x_1, x_2 \in [a, b]$

bei streng monoton wachsend ersetze „ $\leq$ “ durch „ $<$ “, dass heißt  $f(x_1) < f(x_2)$

- nach dem Mittelwertsatz gilt für  $x_1 < x_2$  (Voraussetzung: f differenzierbar)

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \text{ mit } (f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) = f'(x_0)$$

$$\text{dass heißt } f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) \rightarrow 0$$

$$\text{also } f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \geq 0$$

wäre  $f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0 \in (a, b)$ , so wäre f(x) monoton wachsend

**Satz 7.8.:** (Monotonieverhalten)

Sei f(x) stetig auf [a, b] und differenzierbar auf (a, b), dann gilt:

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \rightarrow f$  ist monoton wachsend auf [a, b]

$f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \rightarrow f$  ist streng monoton wachsend auf  $[a, b]$

$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \rightarrow f$  ist monoton fallend auf  $[a, b]$

$f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \rightarrow f$  ist streng monoton fallend auf  $[a, b]$

$f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \rightarrow f$  ist konstant auf  $[a, b]$

Beispiel:  $f(x) = 4x^5 - 5x^4 - 40x^3$   
 $f'(x) = 20x^4 - 20x^3 - 120x^2 \rightarrow f'(x) = 20x^2 \cdot (x^2 - x - 6)$   
 $\rightarrow \forall x \neq 0 \boxed{f'(x) \neq 0} \rightarrow \boxed{\varphi(x) \neq 0} \quad \geq 0 \quad =: \varphi(x)$

Bestimme Nullstellen von  $\varphi$ :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

$$f'(x) = 20x^2 \cdot \varphi(x)$$

Nullstellen von  $f'(x)$  sind:

$$\boxed{x_1 = -2} \quad \boxed{x_2 = 3} \quad \boxed{x_3 = 0} \quad \text{stationäre Punkte}$$

Vorzeichen von  $f'(x)$

Rückschluss auf Monotoniebereiche von  $f(x)$

$f(x)$  hat in  $x_1 = -2$  ein lokales Maximum  $f(x)$  hat in  $x_2 = 3$  ein lokales Minimum  
 hat in  $f'(x)$  an  $x = x_k$  einen Vorzeichenwechsel mit  $f'(x_k) = 0$ , so liegt in  $x = x_k$  ein lokales Extremum vor

### 7.5. Die Taylor-Entwicklung einer Funktion:

Ziel: approximiere eine gegebene Funktion  $f(x)$  in Umgebung eines „Entwicklungspunktes  $x_0$ “ durch ein Polynom  $T_n$  vom Grad  $\leq n$ , so dass  $f(x) = T_n + R_n(x)$ , wobei  $|R_n|$  klein für

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Idee: bestimme  $T_n(x)$  so, dass

$$\boxed{\begin{array}{l} T_n(x_0) = f(x_0) \\ T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 1, 2, \dots, n \end{array}}$$

Herleitung von  $T_n(x)$ :

- geschickter Ansatz:  $T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$
- gesucht:  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , so dass gilt:

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$T_n'(x_0) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

$$T_n''(x_0) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$T_n''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$$

$$T_n^n(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n(x - x_0)^{n-n}$$

$$T_n^n(x_0) = n! \cdot a_n = f^n(x_0)$$

$$a_0 = f(x_0) \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 1, 2, \dots \quad (0! = 1)$$

**Satz 7.9.: (Taylorsche Satz)**

Voraussetzung: alle Ableitungen  $f'(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$  existieren auf  $(a, b)$  und sind dort stetig

Behauptung: für das Taylorpolynom n-ten Grades  $T_n(x)$  zum Entwicklungspunkt  $x_0 \in (a, b)$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \text{ gilt die Restgliedformel nach Langraige}$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \text{ mit } R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \quad \xi = x_0 + v(x - x_0) \quad v \in (a, b)$$

wobei  $\xi = x_0 + v(x - x_0)$  mit  $v \in (0, 1)$  ein Zwischenpunkt zwischen  $x_0$  und  $x$  ist.

Bemerkung: Es gibt weitere Restglieddarstellungen:

$$\text{z.B.: } R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = m \cdot x + n$$

$$T_1'(x) = f'(x_0)$$

Beispiel: Bestimme Taylorpolynom  $T_4(x)$  vom Grade  $\leq 4$  zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  für  $f(x) = \sin x$

$$T_4 = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} \cdot x^4$$

$$\begin{array}{llllll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x & f'''(x) = -\cos x & f^{(4)}(x) = \sin x \\ f(0) = 0 & f'(0) = 1 & f''(0) = 0 & f'''(0) = -1 & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

$$T_4 = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 + -\frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{0}{24} \cdot x^4 = -\frac{1}{6} x^3 + x$$

$$\sin x = T_4(x) + R_n(x)$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - x_0)$$

$$x_0 = 0, \xi = x_0 + v(x - x_0)$$

$$R_4(x) = \frac{\cos \xi}{5!} \cdot x^5$$

$$|f(x) - T_4(x)| = |R_4(x)| = \left| \frac{\cos \xi}{5!} \cdot x^5 \right| \leq \frac{1}{120} \cdot (1/2)^5 = 0,261 \cdot 10^{-3}$$

// Fehler für  $x \in [-1/2; 1/2]$

Bemerkung: der Übergang  $n \rightarrow \infty$  bei  $T_4(x)$  führt zur Taylorreihe

$$T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Sie ist konvergent, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  dann  $\sin x = T_n(x)$

7.6. Hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte:

Sei  $x_0 \in (a, b)$  stationärer Punkt von  $f(x)$ , dass heißt  $f'(x_0) = 0$

Taylorentwicklung  $n = 1$ , Entwicklungsstelle  $x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + f''(\xi)/2 \cdot (x - x_0)^2$$

$$f(x) - f(x_0) = f''(\xi)/2 \cdot (x - x_0)^2$$



### 7.7. Konvexität und Wendepunkte:

Die Begriffe „*konvex*“ und „*konkav*“ erfassen das Krümmungsverhalten der Graphen einer Funktion.

Definition 7.11.:

- Eine Funktion  $f(x)$  heißt „*konvex auf  $[a, b]$* “, wenn für beliebige  $x_1, x_2, x \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$  gilt:

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

**Formel 7.6**

$f(x)$  heißt „*streng konvex auf  $[a, b]$* “, wenn „ $<$ “ in Ungleichung 7.6. gilt

- Eine Funktion  $f(x)$  heißt „*konkav auf  $[a, b]$* “, wenn „ $\geq$ “ in 7.6. gilt  $x_1, x_2, x \in [a, b]$  mit  $x_1 < x < x_2$

Frage: Welche Bedingung an  $f(x)$  sichern dieses Verhalten?

**Satz 7.12.: (Tangenten-Kriterium)**

Voraussetzung:  $f'(x)$  existiert auf  $(a, b)$

Behauptung:  $f(x)$  ist konvex auf  $[a, b]$  genau dann wenn der Graph von  $f(x)$  oberhalb der Tangente  $T_{x_0}(x)$  an  $f(x)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  für jedes  $x_0 \in (a, b)$  liegt

$$f(x) \geq T_{x_0}(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall x_0 \in (a, b)$$

**Formel 7.7**

wobei:  $T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f(x)$  ist konkav auf  $[a, b]$  g. d. w.

der Graph unterhalb der Tangente liegt,

dass heißt „ $\leq$ “ in 7.7.

Beweis: (zeigt nur „*Tangenten-Bedingung*“ für  $f(x) = \text{konvex}$ )

Sei  $x_0$  beliebig gegeben mit  $x_1 < x < x_2$

Tangenten-Bedingung  $\rightarrow$  die Punkte

$(x_i, f(x_i)) = P_i, i = 1, 2$  liegen oberhalb der Tangente

$\rightarrow$  ganze Sekante  $S(x)$  liegt oberhalb von  $T_{x_0}(x)$

$\rightarrow f(x_0) = T_{x_0}(x_0) \leq S(x_0) \rightarrow f$  konvex

Bemerkung: aus strenger Tangenten-Bedingung, das heißt „ $>$ “ in 7.7.  $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ , folgt analog, dass  $f(x)$  auch streng konvex auf  $[a, b]$

**Satz 7.13.: ( $f''$ -Kriterium)**

Voraussetzung:

- $f(x)$  ist stetig auf  $[a, b]$
- $f'(x)$  und  $f''(x)$  existieren und sind stetig auf  $(a, b)$

Behauptung:

- $f(x)$  konvex auf  $[a, b]$ , genau dann wenn  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f(x)$  konkav auf  $[a, b]$ , genau dann wenn  $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \rightarrow f(x)$  ist streng konvex auf  $[a, b]$
- $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \rightarrow f(x)$  ist streng konkav auf  $[a, b]$

Beweis: (zeigt nur „ $f(x) > 0 \rightarrow f$  ist streng konvex“)

Taylor-Entwicklung in einem festen, beliebigen Punkt  $x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\xi) \cdot (x - x_0)^2$$

$\rightarrow f(x) > T_{x_0}(x) \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$  dass heißt die strenge Tangenten-Bedingung ist erfüllt

$\rightarrow$  streng konvex

Definition 7.14.: Ein Punkt  $x_0 \in (a, b)$  heißt „*Wendepunkt*“ von  $f(x)$ , wenn ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass gilt:

- $f(x)$  streng konvex in  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$

- $f(x)$  streng konkav in  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

oder:

- $f(x)$  streng konkav in  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$
- $f(x)$  streng konvex in  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

**Satz 7.15.: (notwendiges Kriterium für Wendepunkt)**

Voraussetzung:  $f'(x)$  und  $f''(x)$  existieren und sind stetig auf  $(a, b)$

Behauptung:  $x_0 \in (a, b)$  ist Wendepunkt von  $f(x) \rightarrow f''(x_0) = 0$

Beweis:

- $f(x)$  streng konvex  $(x_0 - \varepsilon, x_0) \xrightarrow{\text{Satz 7.13.}} f''(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \rightarrow f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) \geq 0$
- analog zeigt man:  $f(x_0) \leq 0$

**Beachte!: ein Punkt  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f''(x_0) = 0$  muss kein Wendepunkt sein!**

Beispiel 1:  $f(x) = x^4$

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0 \forall x \rightarrow f(x) \text{ konvex } \forall x \in (-\infty, \infty)$$

$$f''(x_0) = 0 \text{ wenn } x_0 = 0 \text{ Wendepunkt-verdächtig,}$$

aber  $x_0 = 0$  ist kein Wendepunkt

Beispiel 2:  $f(x) = \sin x, x \in [-\pi, \pi]$

$$f''(x) = -\sin x \begin{cases} > 0 \forall x \in (-\pi, 0) \text{ streng konvex} \\ < 0 \forall x \in (0, \pi) \text{ streng konkav} \end{cases}$$

$$f''(x_0) = \sin(x_0) = 0 \text{ wenn } x_0 = 0 \text{ in } (-\pi, \pi)$$

WP-verdächtig  $\rightarrow x_0 = 0$  ist WP

7.8. Polstellen und Asymptoten:

Definition 7.16.: Eine Stelle  $x_0$  heißt „Polstelle“ einer Funktion  $f(x)$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  ( $x_0$  gehört im allgemeinen nicht zum Definitionsbereich von  $f(x)$ )

Beispiel 1:  $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$ , Polstelle:  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} \begin{matrix} \rightarrow 2 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} = +\infty$$

Definition 7.17.: Eine „Asymptote von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ “

ist eine Gerade  $y = \alpha \cdot x + \beta$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

mit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\alpha \cdot x + \beta)] = 0$

(analog für  $x \rightarrow -\infty$ )

Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$  für  $x \rightarrow +\infty$  (analog für  $x \rightarrow -\infty$ ):

- $(7.8.) \rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x) - (\alpha \cdot x + \beta)}{x} \right] = \delta(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\alpha \cdot x + \beta}{x} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - \alpha \right] \rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

falls  $\lim\{\dots\}$  nicht existiert, so gibt es keine Asymptote

- mit diesem  $\alpha$  folgt aus 7.8.

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \alpha \cdot x] - \beta \rightarrow \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \alpha \cdot x]$$

Beispiel:  $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} \forall x \in (-\infty, \infty)$

$$\rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = 2$$

$$\rightarrow \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \alpha \cdot x] = \dots = \frac{1}{4}$$

## 8. Integralrechnung in einer Variablen:

Einleitung:	$\int f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx$
	<u>unbestimmtes Integral</u>	<u>bestimmtes Integral</u> <u>uneigentliches Integral</u>
		- f(x) beschränkt    - f(x) unbeschränkt
		- a, b beschränkt    - a, b unbeschränkt

### 8.1. das unbestimmte Integral:

#### 8.1.1. Definitionen:

Definition 8.1.: Eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt „Stammfunktion“ einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn:

- $F$  ist differenzierbar auf  $[a, b]$
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- Ist  $F_0(x)$  Stammfunktion von  $f(x)$ , so gilt:
  - 1.) dann sind auch alle Funktionen  $F(x) = F_0(x) + C$ ,  $C$  beliebige Komponente der Stammfunktion von  $f(x)$
  - 2.) Jede Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$  hat die Darstellung  $F(x) = F_0(x) + C$  (dass heißt es existiert eine solche Konstante  $C$ )

Beweis: sei  $\delta(x) := F(x) - F_0(x) \rightarrow \delta'(x) = F'(x) - F_0'(x) = 0$

MWS:  $\delta(x) - \delta(a) = \delta'(\xi) \cdot (x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0$      $\delta(x) = \delta(a)$   
 $\rightarrow \delta(x) = \delta(a) \rightarrow F(x) = F_0(x) + \delta(a) \rightarrow \delta(a) = C$

$\rightarrow$  mit **einer** Stammfunktion  $F_0(x)$  hat man **alle** Stammfunktionen

Definition 8.2.: Unter dem „unbestimmten Integral“  $\int f(x) dx$  versteht man die Menge aller Stammfunktionen  $F(x)$  von  $f(x)$ . Man schreibt dafür  $\int f(x) dx = F(x) + C$  g. d. w.  $F'(x) = f(x)$ .

Unbestimmte Integration und Differentiation sind Umkehrfunktionen, dass heißt

$\int F'(x) dx = F(x) + C$  und  $(\int f(x) dx)' = f(x)$

#### Einige Grundintegrale (die man wissen sollte):

- $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + C$ , fall  $p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$  und  $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- weitere Grundintegrale können nachgeschlagen werden

### 8.2. Integrationsregeln:

#### 8.2.1. Linearität:

aus der Linearität der Differentiation folgt:

#### **Formel 8.1**

$\int (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx$  //Für beliebig viele Summanden erweiterbar

Beispiel:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 3) dx = 2 \cdot \int x^3 dx - 5 \cdot \int x^2 dx + 3 \cdot \int 1 dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x + C \quad //\text{so kann man alle Polynome integrieren!}$$

### 8.2.2. Partielle Integration:

Produktregel der Differentialrechnung:  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad | \int \dots dx$   
 $u(x) \cdot v(x) + C = \int(u'(x) \cdot v(x)) dx + \int(u(x) \cdot v'(x)) dx$

→  $\int(u'(x) \cdot v(x)) dx = u(x) \cdot v(x) - \int(u(x) \cdot v'(x)) dx$  **Formel 8.2**

Beispiel:

Beispiel 1:  $\int(\frac{x}{v} \cdot \frac{e^x}{u}) dx = \frac{x}{v} \cdot \frac{e^x}{u} - \int(\frac{e^x}{u} \cdot \frac{1}{v}) dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x - 1) \cdot e^x - C$

Beispiel 2:  $\int(x^2 \cdot e^x) dx = x^2 \cdot e^x - \int(2 \cdot x \cdot e^x) dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int(x \cdot e^x) dx$   
 $x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x) + 2 \cdot C$

Beispiel: Rückführungstechnik

Idee: durch 2-malige Anwendung der partiellen Integration versucht man auf das ursprüngliche Integral zurückzukommen

$I = \int((\sin x) \cdot e^x) dx \quad u = -\cos x \quad v' = e^x$   
 $= -(\cos x) \cdot e^x - \int((- \cos x) \cdot e^x) dx = -(\cos x) \cdot e^x + \int((\cos x) \cdot e^x) dx$   
 $= I_1$

$I_1 = \int(\frac{\cos x}{u} \cdot \frac{e^x}{v}) dx = (\sin x) \cdot e^x - \int((\sin x) \cdot e^x) dx \quad u = \sin x$

Einsetzen:  $I = -(\cos x) \cdot e^x + \{(\sin x) \cdot e^x - I\}$  (ignorieren zunächst die Konstante C)  
 →  $I = 1/2 \{(\cos x) \cdot e^x + (\sin x) \cdot e^x\} + C$

Beispiel:  $u' = 1$

$\int \ln x dx = \int \frac{1}{u'} \cdot \frac{\ln x}{v} dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot 1/x dx = x \cdot \ln x - x + C \quad u = x$   
 $v' = 1/x$

### 8.2.3. Substitution:

gegeben : Substitution:  $x = g(t)$ , bzw. Über die Umkehrfunktion  $g = \varphi(x)$

→ eindeutige Abbildung zwischen x und t

Ziel: überführe x-Integral  $\int f(x) dx$  in t-Integral  $\int h(t) dt$

$\int f(x) dx = F(x) + C$ , dass heißt  $F'(x) = f(x)$

$d/dt (F(g(t))) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \quad | \cdot \int dt$

$F(g(t)) + C = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$

→ Substitutionsregel:  $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$  **Formel 8.3**

formales Umrechnen auf t-Integral:

1.) ersetze „f(x)“:  $f(x) = f(g(t))$

2.) ersetze „dx“ durch t-Ausdruck:  $x = g(t) \rightarrow dx/dt = g'(t) \rightarrow dx = g'(t) dt$

Beispiel:  $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , Substitution:  $x = \sin t \rightarrow dx/dt = \cos t \rightarrow dx = \cos t dt$   
 $\rightarrow t = \arcsin x$

$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\sin t)^2}} \cdot \cos t dt = \int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t dt = \int 1 dt = t + C$   
 $= \cos^2 t$

→  $I = \arcsin(x) + C$

Substitution in der Form  $t = \varphi(x)$

Man muss die Funktion  $x = g(t)$  nicht explizit kennen, denn:

$x = g(t) \Leftrightarrow t = \varphi(x) \rightarrow dt/dx = \varphi'(x) \rightarrow dx = 1/\varphi'(x) dt$

Begründung: Ableitung der Umkehrfunktion:  $g'(t) = 1/\varphi'(g(t)) dt$

Damit gilt:  $\int f(x) dx = \int f(x) \cdot 1/\varphi'(x) dt$

Kann oft als t-Ausdruck geschrieben werden, ohne  $dx = g(t)$  zu kennen

Beispiel:  $I = \int \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x^4 - 4x + 5}} dx$

Substitution:  $t = (x^4 - 4x + 5) \rightarrow dt/dx = 4x^3 - 4 \rightarrow dx = 1 / (4x^3 - 4)$

$$I = \int \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{4(x^3-1)} dt = \frac{1}{4} \int t^{-1/3} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{8} \cdot t^{2/3} + C$$

$$I = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(x^4 - 4x + 5)^2} + C$$

### 8.3. Integration rationaler Funktionen:

#### 8.3.1. Partialbruchzerlegung:

gegeben: rationale Funktion  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ , wobei  $Z(x)$ ,  $N(x)$  Polynome in  $x$  sind

Schritt 1: Spalte den ganzrationalen Teil ab (Polynomdivision)

$F(x) = g(x) + Z(x) / N(x)$ , wobei  $\text{Grad}(Z(x)) < \text{Grad}(N(x)) =: n$

Beispiel:  $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} \rightarrow f(x) = (3x - 10) + \frac{(24x + 21)}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\tilde{Z}(x)}{N(x)}$

Ziel: Schreibe  $\frac{\tilde{Z}(x)}{N(x)}$  als Summe elementarer Brüche, die einfach integriert werden können

Schritt 2: Produktzerlegung des Nennerpolynoms  $N(x)$

- die reellen Nullstellen seien:  $x_k, k = 1, \dots, r$ , wobei Nullstelle  $x_k$  habe die Vielfachheit  $l_k$
- die komplexen Nullstellen seien:  $z_k = a_k + i \cdot b_k, k = 1, \dots, s$ , mit Vielfachheit  $m_k$  und  $\bar{z}_k = a_k - i \cdot b_k, k = 1, \dots, s$  mit Vielfachheit  $m_k$   
mit der komplexen Nullstelle  $z_k = a_k + i \cdot b_k$  ist auch  $\bar{z}_k = a_k - i \cdot b_k$  Nullstelle mit gleicher Vielfachheit

$$(x - z_k) \cdot (x - \bar{z}_k) = x^2 - (z_k + \bar{z}_k) \cdot x + z_k \cdot \bar{z}_k = x^2 + p \cdot x + q$$

mit  $p_k = -(a_k + i \cdot b_k + a_k - i \cdot b_k) = -2a_k$  reell

$q_k = (a_k + i \cdot b_k) \cdot (a_k - i \cdot b_k) = a_k^2 - i^2 \cdot b_k^2 = a_k^2 + b_k^2$  reell

→ Produktzerlegung

$N(x) = a_n \cdot \underbrace{(x - x_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{l_r}}_{\text{reelle Nullstellen}} \cdot \underbrace{(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_s \cdot x + q_s)^{m_s}}_{\text{komplexe Nullstellen}}$	<b>Formel 8.4</b>
--	-------------------

Schritt 3: Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\frac{\tilde{Z}(x)}{N(x)} = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{A_{k,1}}{x - x_k} + \frac{A_{k,2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,l_k}}{(x - x_k)^{l_k}} \right\} + \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{B_{k,1} + C_{k,1}}{x^2 + p_k x + q_k} + \frac{B_{k,2} + C_{k,2}}{(x^2 + p_k x + q_k)^2} + \dots + \frac{B_{k,m_k} + C_{k,m_k}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}} \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der Koeffizienten (sind reell):

- 1.) Multipliziere den Ansatz mit  $N(x)$  durch (danach keine Brüche mehr)
- 2.) Setze geeignete Werte für  $x$  ein, z.B.  $x = x_k, x \neq z_k$
- 3.) Bestimme die Koeffizienten aus dem entstehenden Gleichungssystem

Beispiel:  $f(x) = \frac{1-x}{x^4+x^2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$   $N(x) = x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$

→ Nullstellen:  $x_1 = 0$  Vielfachheit  $l_1 = 2$

$\begin{matrix} z_1 = +i \\ z_1 = -i \end{matrix}$  Vielfachheit  $m_1 = 1$

$N(x) = (x - 0)^2 \cdot (x^2 + 1)$  das heißt:  $p_1 = 0 \quad q_1 = 1$

→ Ansatz:

$$\frac{1-x}{x^4+x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad | \cdot x^2 \quad | \cdot (x^2+1)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 1 - x = A_1 \cdot x \cdot (x^2 + 1) + A_2 \cdot (x^2 + 1) + x^2 \cdot (Bx + C) \\ x = 0: & \quad 1 = 0 + A_2 + 0 \\ x = i: & \quad 1 = 0 + 0 + (bi + C) \cdot (-1) \\ & \quad 1 - i = -C - Bi \quad \rightarrow C = -1 \quad B = 1 \\ x = 1: & \quad 0 = A_1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (1 - 1) \quad \rightarrow a_1 = -1 \end{aligned}$$

Schritt 4: integriere jeden Anteil der PBZ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-x}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1} \\ \rightarrow I &= \int f(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} - \arctan x \\ \rightarrow I &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan x + C \end{aligned}$$

### 8.3.2. Integration rationaler Ausdrücke von $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ :

Typ:  $\int R(e^x) dx$ , wobei  $R(t)$  = rationaler Ausdruck in « t » =  $Z(t)/N(t)$

Substitution :  $t = e^x \rightarrow dt/dx = e^x = t \rightarrow dx = dt/t \rightarrow \int R(e^x) dx = \int R(t) \cdot (1/t) dt$   
 =  $R(t)$  rat. Fkt.  $\rightarrow$  lösen mit PBZ

Beispiel:  $\int \frac{e^{2x}}{e^{3x} - 4e^{2x} + 1} dx = \int \frac{t^2}{t^3 - 4t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} dt$

Typ:  $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Substitution:  $x = 2 \arctan(t) \Leftrightarrow t = \tan(x/2) \quad dx/dt = 2/(1+t^2) \rightarrow dx = 2/(1+t^2) dt$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 \cdot (\sin(\frac{x}{2})/\cos(\frac{x}{2}))}{1 + (\sin(\frac{x}{2})/\cos(\frac{x}{2}))^2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - (\sin(\frac{x}{2})/\cos(\frac{x}{2}))^2}{1 + (\sin(\frac{x}{2})/\cos(\frac{x}{2}))^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Beispiel :  $\int \frac{3 \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 12 \cdot \int \frac{t}{-(t^2 - 2t - 1) \cdot (1+t^2)} dt = \dots$  PBZ

### 8.4. Das bestimmte Integral:

#### 8.4.1. Definition und Existenz:

gegeben: Intervall  $[a, b]$  beschränkt

Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

Zerlegung  $Z_n$  von  $[a, b]$ :  $Z_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

„Feinheit von  $Z_n$ “:  $\delta(Z_n) := \max(x_i - x_{i+1})$  max. Intervall-Länge ( $1 \leq i \leq n$ )

Wahl von Zwischenpunkten

$P_n := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  mit  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Rieman'sche Zerlegungssumme:

$$\sigma(Z_n, P_n) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

= Summe von Rechteckenflächen

≈ Fläche unter  $f(x)$

Definition 8.3.:  $f(x)$  heißt auf  $[a, b]$  „integrierbar“, wenn eine Zahl  $I$  existiert, so dass gilt:

$$I = \lim \sigma(Z_n, \ddot{U}_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Für ein beliebige Folge von Zerlegungen  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  mit der Eigenschaft  $\delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

Und für eine beliebige Wahl  $P_n$  von Zwischenprodukten. Die Zahl  $I$  heißt „bestimmtes

Integral von  $f(x)$  über  $[a, b]$ “.

Schreibweise:  $I = \int_a^b f(x) dx$

Bemerkung: Bezeichnung der Integrationsvariablen ist egal, das heißt  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

**Satz 8.4.: (Integrierbarkeit)**

Voraussetzung:

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt
- $f(x)$  sei stetig auf  $[a, b]$  mit Ausnahme endlich vieler Stellen

Behauptung:

- $f(x)$  ist integrierbar auf  $[a, b]$ , das heißt es existiert  $I = \int_a^b f(x) dx$
- damit bleiben nur noch wenige „*exotische*“ Funktionen übrig, die nicht integrierbar sind
- Zur Erweiterung der Varianten von  $a, b$  wir definiert

$$\int_a^b f(x) dx := 0, \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{für } a < b)$$

**Formel 8.5**

- Interpretation von  $I = \int_a^b f(x) dx$  als Fläche

aus der Definition ergibt sich:

**8.4.2. Eigenschaften integrierbarer Funktionen:**

**Satz 8.5.:** Voraussetzung:  $f(x), g(x)$  integrierbar über  $[a, b]$ ,  $a < b$

Behauptung: (a)  $f(x)$  ist integrierbar auf jedem Teilintervall  $[a_1, b_1] < [a, b]$

(b) integrierbar sind auch  $f(x) + g(x), \alpha \cdot f(x)$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$   $f(x) \cdot g(x), |f(x)|$

(c) Linearität:  $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$

(d)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall c \in (a, b)$

(e) Abschätzungen:  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  **Formel 8.6**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$
 **Formel 8.7**

Beweis:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Satz 8.6.: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

Voraussetzung: - f(x), g(x) sind stetig auf [a, b]  
 - g(x) ≥ 0     ∀x ∈ [a, b]

Behauptung: es existiert ξ ∈ [a, b] mit  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$  **Formel 8.8**

Beweis: - f(x) stetig → es existiert Min und Max, das heißt:

m := min f(x), M := max f(x)   x ∈ [a, b]

→ m ≤ f(x) ≤ M   |·g(x) ≥ 0 → m · g(x) ≤ f(x) · g(x) ≤ M · g(x)   ∀x ∈ [a, b]

→  $m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$

          := G                    := I                    := G

dass heißt: m·G ≤ I ≤ M·G → ∃γ ∈ [m, M]: I = γ·G

- f(x) stetig, existiert ξ ∈ [a, b] mit f(ξ) = γ → I = f(ξ) · ∫<sub>a</sub><sup>b</sup> g(x) dx

Anwendung: mit Hilfe des obigen MWS kann man Formeln für da Restglied der Taylor-Entwicklung beweisen (siehe Übung)

Spezialfall: g(x) = 1: ∫<sub>a</sub><sup>b</sup> f(x) dx = f(ξ) · (b - a)

**Satz 8.7.: (Hauptsatz der Differential-Integralrechnung)**

Voraussetzung: f(x) sei stetig auf [a, b]

Behauptung:

(a) die Funktion  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$  ist eine Stammfunktion von f(x), das heißt:

$F_a'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

(b) Sei F(x) eine beliebige Stammfunktion, dann gilt:  $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$  **Formel 8.9**

Beweis: (a):  $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$

=  $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi) \cdot \int_x^{x+h} 1 dt = f(\xi) \cdot h$

→  $F_a'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$

(b): sei  $F(x)$  Stammfunktion von  $f(x) \rightarrow \exists$  Konstante  $C$  mit  $F(x) = F_a(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$

$$\rightarrow F(b) - F(a) = (F_a(b) + C) - (F_a(a) + C) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

Bemerkung: Formel (8.9) zeigt einen Weg zur Berechnung von  $\int_a^b f(x) dx$ .

Aus (8.9) folgt z.B. Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

**Formel 8.10**

Beweis:  $u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) dx \rightarrow$  Formel 8.10

### 8.4.3. Numerische Integration:

Ziel: berechne Näherungswert:  $I_n(f) \approx I(f) := \int_a^b f(x) dx$

1.) Zerlegung von  $[a, b]$  in  $n$  gleichlange Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$x_0 = a, \quad x_i = a + i \cdot h, \quad i = 1, 2, \dots, \quad h = \frac{b-a}{n}$  Zerlegungseigenschaft:  $I(f) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$   
 $:= I_i^{\text{ex}}(f)$

2.) Näherungsformel für  $I_i^{\text{ex}}(f)$

$$I_i^{\text{ex}}(f) \approx I_i^{\text{Trapez}}(f) := \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

3.) Gesamtformel:  $I_n(f) := \sum_{i=1}^n I_i^{\text{Trapez}}(f) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$

**Formel 8.11**

Man kann folgende Fehlerabschätzung beweisen:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}$$

Durch sogenannte „Extrapolation“ kann man aus den Näherungen  $I_n(f), I_{2n}(f), I_{4n}(f), \dots$  bessere

Näherungen berechnen. z.B. hat  $I_n^{(1)}(f) := \frac{4I_{2n}(f) - I_n(f)}{3}$  einen Fehler  $\leq C \cdot h^4$

### 8.5. Uneigentliche Integrale:

#### 8.5.1. Definitionen:

Definition 8.8: Sei  $f(x)$  integrierbar auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilintervall des Integrationsbereiches, so definiert man als „uneigentliches Integral“:

1.) Im Fall „ $[a, b]$  ist unbeschränkt“:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{r_1 \rightarrow -\infty} \int_{r_1}^a f(x) dx + \lim_{r_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{r_2} f(x) dx$$

wobei  $\lim_{r_1 \rightarrow -\infty}$ ,  $\lim_{r_2 \rightarrow +\infty}$  unabhängige Grenzwerte sind, die einzeln existieren müssen, a ist beliebig

2.) Im Fall „f(x) ist unbeschränkt am Rande von [a, b]“:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{r_1 \rightarrow a^+} \int_{r_1}^c f(x) dx + \lim_{r_2 \rightarrow b^-} \int_c^{r_2} f(x) dx \quad c \in (a, b) \text{ ist beliebig}$$

3.) Im Fall „f(x) ist unbeschränkt im Punkt  $x_0 \in [a, b]$ “:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{r_1 \rightarrow x_0^-} \int_a^{r_1} f(x) dx + \int_{r_2}^b f(x) dx$$

Falls die entsprechenden Grenzwerte existieren und endlich sind, so heißt das uneigentliche Integral „konvergent“, ansonsten „divergent“.

Beispiel 1:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} [2x^{\frac{1}{2}}]_r^1 = 2 \lim_{r \rightarrow 0^+} (1 - r^{\frac{1}{2}}) = 2 \cdot (1 - 0) = 2$$

Dass heißt, das uneigentliche Integral ist konvergent

Beispiel 2: Laplace-Transformierte einer Funktion

- Einer gegebenen Funktion  $f(t)$ ,  $t \in (0, \infty)$  wird zugeordnet die Funktion  $F = L \cdot f$

Laplace-Transformierte von  $f(t)$ , definiert als:  $F(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$ ,  $s \in (0, \infty)$

**Formel 8.12**

- gesucht:  $F = L \cdot f$  zur Funktion  $f(t) = t$

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r t \cdot e^{-st} dt := I(r)$$

Nebenrechnung:

$$I(r) = \int_0^r t \cdot e^{-st} dt = \left[ t \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \right]_0^r + \int_0^r \frac{1}{s} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} (r \cdot e^{-sr} - 0) + \frac{1}{s} \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^r$$

$$I(r) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{r}{e^{-sr}} - \frac{1}{s^2} (e^{-sr} - 1) \quad \text{beachte } s > 0$$

$$F(s) = \lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = -\frac{1}{s} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{e^{sr}} - \frac{1}{s^2} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} + \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{s \cdot e^{sr}} + \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s^2} \cdot 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$\rightarrow \text{Laplace-Transformierte von } f(t) = t \text{ ist } F(s) = \frac{1}{s^2}$$

8.5.2. Konvergenzkriterien:

Ziel: untersuche ob  $\int_a^\infty f(x) dx$  konvergiert oder divergiert, ohne es zu berechnen!

**Satz 8.9.:** (a) Majorantenkriterium

$\exists$  Funktion  $g(x)$  mit  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, \infty)$  und  $\int_a^\infty g(x) dx$  konvergent  $\rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$  konvergent und  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  konvergent.

(b) Minorantenkriterium

$\exists$  Funktion  $g(x)$  mit:  $0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, \infty)$  und  $\int_a^\infty g(x) dx$  divergent  $\rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$  divergent.

Bemerkung: Satz 8.9. gilt sinngemäß auch für uneigentliche Integrale vom Typ  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ,

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$  und  $\int_a^b f(x) dx$  mit  $f(x)$  unbeschränkt.

Fakt: Eine Vergleichsfunktion für  $\int_a^\infty f(x) dx$ ,  $a > 0$ , ist z. B.  $g(x) = \frac{1}{x^p}$  es gilt:

$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{konvergiert für } p > 1 \\ \text{divergiert für } p \leq 1 \end{cases}$
---

**Formel 8.13**

Beispiel:  $\int_a^\infty \frac{5\sqrt{x} \sin x}{x^2 + 3} dx$  Ziel: schätze  $|f(x)|$ - ab auf  $g(x) = \frac{C}{x^p}$  für  $x \in [1, \infty)$

$$|f(x)| = \frac{5x^{1/2}}{x^2 + 3} \cdot |\sin x| \leq \frac{5x^{1/2}}{x^2} \cdot 1 = \frac{5}{x^{3/2}} =: g(x)$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$  ist konvergente Majorante  $\rightarrow \int_1^\infty f(x) dx$  konvergent

8.6. Anwendung der Integralrechnung:

8.6.1. Flächeninhalt zwischen Kurven:

**Satz 8.10.:** Voraussetzung:  $f(x), g(x)$  stetig auf  $[a, b]$ ;  $g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$

Behauptung: für den Inhalt  $F$  der Fläche zwischen den Kurven  $y = g(x)$  und  $y = f(x)$  über dem Intervall  $x \in [a, b]$  gilt:

$F = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
---------------------------------

Beweisidee:

**Formel 8.14**

8.6.2. Volumen von Rotationskörpern:

Zylinderscheibe  $S_i$  mit Radius  $r_i = f(x_i)$

$$\text{Volumen } S_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot \Delta x_i \rightarrow V \approx \sum_{i=1}^n V(S_i) = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i \rightarrow \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

**Satz 8.11.:** Der Rotationskörper, der durch Drehung der stetigen Funktion  $f(x)$

(über  $x \in [a, b]$ ) um die  $x$ -Achse entsteht, hat das Volumen  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

**Formel 8.15**

8.6.3. Länge von Kurven:

Parameterdarstellung einer Kurve:

Kurve := Menge aller Punkte  $(t)$ ,  $t \in [a, b]$

$P(t) = (x(t), y(t))$ , zwei Funktionen,  
die die Kurve beschreiben

Ortsvektor:  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $t \in [a, b]$

Beispiel: Kreisbogen

$$\begin{matrix} x(t) = r \cdot \cos t \\ y(t) = r \cdot \sin t \end{matrix}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

- Man definiert:  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt} x(t)$ ,  $\dot{y}(t) := \frac{d}{dt} y(t)$ ,  $\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

*Bemerkung:*  $\dot{\gamma}(t)$  ist Tangentenvektor an die Kurve im Punkt  $P(t)$

- Eine Kurve heißt „regulär“, wenn  $x(t)$ ,  $y(t)$  stetig differenzierbar auch  $[a, b]$  und  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

**Satz 8.12.:** Für die Länge  $L$  einer regulären Kurve  $K = \{x(t), y(t) : t \in [a, b]\}$  gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$$

**Formel 8.16**

## 9. Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL):

Die Modellierung vieler Prozesse aus:

- Physik
- Technik
- Biologie, Ökonomie

Führt auf DGL, das heißt Gleichungen, in denen eine gesuchte Funktion und ihre Ableitungen vorkommen, das heißt  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ ,...

### 9.1. Einführende Beispiele:

#### 1.) Freier Fall mit Luftwiderstand:

gesucht:  $v(t)$  = Geschwindigkeit des fallenden Körpers (Masse  $m$ ) zur Zeit  $t$

$$\begin{aligned} F_1 &= m \cdot g && \text{Schwerkraft} \\ F_2 &= -k \cdot v^2 && \text{Luftwiderstand} \\ &&& (\text{k - Reibungskoeffizient}) \end{aligned}$$

$$\text{Gesamtkraft } F = F_1 + F_2 = m \cdot g - k \cdot v^2$$

Newton'sche Grundgesetz:  $F = m \cdot a$ , wobei  $a = \frac{dv}{dt} v'(t)$  Beschleunigung des Körpers

→ DGL:

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} m \cdot v'(t) &= m \cdot g - k \cdot [v(t)]^2 \\ v'(0) &= 0 \end{aligned}$$

**Formel 9.1**

#### 2.) Elektrischer Schwingkreis:

Gegeben:

$U_a(t)$  = angelegt Spannung zur Zeit  $t$

$I(t)$  = Stromstärke zur Zeit  $t$

Man erhält die DGL: 
$$I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{L \cdot C} I(t) = \frac{1}{L} U_a(t)$$

**Formel 9.2**

#### 3.) Wachstum einer Population:

- Sei  $p(t)$  = Größe einer Population (z. B. in Mio. Individuen) zur Zeit  $t$
- Für die Zuwachsrates  $\lambda$  (= Geburten-/Sterberate) macht man eine Modellannahme:

$$\lambda = a - b \cdot p(t) \quad a, b - \text{Modellparameter}$$

d.h. sinkende Zuwachsrates bei wachsender Population

- aus  $p'(t) \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lambda \cdot p$  folgt für  $\Delta t \rightarrow 0$

DGL: 
$$p'(t) = (a - b \cdot p(t)) \cdot p(t)$$

**Formel 9.3**

Anfangsbed.:  $p(0) = p_0$

### 9.2. Grundbegriffe:

- Ordnung einer DGL := Grad der höchsten vorkommenden Ableitung
- Eine DGL heißt „linear“, wenn sie die Form hat:

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

Linearkombination von  $y^{(n)}$ ,  $y^{(n-1)}$ , ...,  $y'$ ,  $y$

Ansonsten heißt sich „nicht linear“

- Beispiel: 1.)  $m \cdot v'(t) = m \cdot g - v^2(t) \rightarrow$  nicht linear, 1. Ordnung  
 2.)  $I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{L \cdot C}I(t) = \frac{1}{L}U_a(t) \rightarrow$  linear, 2. Ordnung  
 3.)  $y''(x) = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \rightarrow$  nicht linear, 2. Ordnung

- Eine Lösung  $y(x)$  einer DGL n-ter Ordnung, die frei wählbare Konstanten enthält und damit alle Lösungen erfasst, heißt „allgemeine Lösung der DGL“

Beispiel:  $y''(x) + 9y(x) = 9$  hat die allgemeine Lösung  
 $y(x) = 1 + c_1 \cdot \sin(3x) + c_2 \cdot \cos(3x)$

Anfangswertproblem (AWP):

- Um die Konstante der allgemeinen Lösung zu bestimmen, benötigt man in der Regel n weitere Zusatzbedingungen

- AWP n-ter Ordnung: Finde Funktion  $y(x)$ ,  $x \in I$ , so dass:

**Formel 9.4**

DGL:  $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

AB:  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ , wobei  $x_0, y_0, y_1, \dots$  bekannt sind

9.3. DGL 1. Ordnung:

meist kann man nach  $y'(x)$  umstellen, dann hat man die sogenannte „explizite DGL 1. Ordnung“  $y'(x) = f(x, y(x))$  ( $\rightarrow$  behandeln im weiteren in 9.3. nur noch diesen Typ)

**Formel 9.5**

Beispiel:  $y'(x) = \frac{x^2 + e^x + 2y(x)}{\sin x - [y(x)]^2}$

9.3.1. Trennung der Variablen (TdV):

- anwendbar auf den DGL-Typ

$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$

**Formel 9.6**

Beispiel:  $y'(x) = \sin x \cdot (y(x) - 1)$

- man muss die Fälle  $g = 0$  und  $g \neq 0$  unterscheiden

1. Fall:  $g(y) = 0$ :

angenommen, man findet eine Nullstelle  $y_0$  von  $g(y)$ , dass heißt  $g(y_0) = 0$ , dann ist  $y(x) = y_0$

$\forall x \in \mathbb{R}$  eine Lösung von (9.6)

Probe:  $y'(x) = 0$

$f(x) \cdot g(y(x)) = f(x) \cdot g(y_0) = 0$

2. Fall  $g(y) \neq 0$ :

(9.6)  $\rightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$

Substitution:  $y = y(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) \rightarrow dx = \frac{1}{y'(x)} dy$

$\rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y)} \cdot \frac{1}{y'(x)} dy = \int f(x) dx \rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$

$\rightarrow$  Vorgehen bei TdV:

Ausgangspunkt:  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

1.) TdV: dass heißt y-Terme nach links, x-Terme nach rechts

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$

2.) Integrieren und Stammfunktion finden:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad G(y) = F(x) + C$$

3.) Nach y umstellen

Beispiel 1:  $y'(x) = \sin x \cdot \frac{y(x)}{g(x)} - 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin x \cdot (y - 1)$

1. Fall:  $g(y) = 0$  dass heißt:  $y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$  Nullstelle  $\rightarrow$  Lösung ist  $y(x) = 1$

2. Fall:  $g(y) \neq 0 \rightarrow \frac{dy}{y-1} = \sin x dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx$

$$\ln|y - 1| = -\cos x + C \quad |e^{(\dots)}$$

$$\rightarrow y - 1 = \pm e^c \cdot e^{-\cos x}$$

$$\rightarrow \text{allgemeine Lösung } y(x) = 1 + c_1 \cdot e^{-\cos x}$$

wobei  $c_1 := \pm e^c$  alle Zahlen  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  im Fall 2 durchläuft und  $c_1 = 0$  der Lösung  $y(x) = 1$  im Fall 1 entspricht.

Beispiel:  $y'(x) - e^x = [y(x)]^2 \cdot e^x$

Idee: Produkt erzeugen für  $y'(x)$ !

$$\rightarrow y'(x) = e^x \cdot (1 + [y(x)]^2)$$

1. Fall:  $g(y) = 0$  dass heißt:  $1 + y^2 = 0 \rightarrow$  es existieren keine reelle Nullstellen!

2. Fall:  $g(y) \neq 0$  d.h. hier keine Lösung

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot (1 + y^2) \rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int e^x dx$$

$$\arctan(y) = e^x + C \quad |\tan(\dots)$$

$$\rightarrow \text{allgemeine Lösung : } y = y(x) = \tan(e^x + C)$$

9.3.2. Linear DGL 1. Ordnung:

betrachten den Typ:  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$

**Formel 9.7**

für  $f(x) = 0$  heißt die DGL „homogen“, ansonsten „inhomogen“

**Satz 9.1.:** Die allgemeine Lösung der DGL hat die Darstellung:  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Dabei ist  $y_h(x)$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL, dass heißt:

$y'_h(x) + a(x) \cdot y_h(x) = 0$  und  $y_p(x)$  eine „partikuläre“ (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL (9.7)

Beweis:

$$y'_h + a(x) \cdot y_h = 0$$

$$y'_p + a(x) \cdot y_p = 0$$

$$y'_h + y'_p + a(x) \cdot (y_h + y_p) = f(x)$$

Bestimmung von  $y_h(x)$ :

$$Y'_h + a(x) \cdot y_h = 0 \Leftrightarrow y'_h = -a(x) \cdot y_h \Leftrightarrow \frac{dy_h}{dx} = -a(x)y_h$$

1. Fall:  $g(y) = y = 0$  Nullstelle ist  $y_0 = 0 \rightarrow$  Lösung:  $y_h(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

2. Fall:  $g(y) = y \neq 0$

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = \int -a(x) dx, \text{ sei } A(x) \text{ Stammfunktion von } a(x) \quad A(x) := \int a(x) dx$$

$$\ln |y_h| = -A(x) + C \quad |e^{(\dots)}$$

$$|y_h| = e^{-A(x)} \cdot e^C$$

$$y_h = \pm e^c \cdot e^{-A(x)} \rightarrow \text{allgemeine Lösung lautet: } \boxed{y_h(x) = c_1 \cdot e^{-A(x)}}, c_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

**Formel 9.8**

Beachte:  $c_1 = 0$  heißt die triviale Lösung!

Bestimmung von  $y_p(x)$ :

Idee: Ansatz durch „Variation der Konstanten“ Von  $y_h(x)$   $\boxed{y_p(x) = c_1(x) \cdot e^{-A(x)}}$

**Formel 9.9**

wobei  $c_1$  geeignet zu bestimmen ist.

- Einsetzen in die inhomogene DGL (9.7) liefert:
- $\{c_1 \cdot e^{-A(x)} + c_1(x) \cdot (-A'(x)) \cdot e^{-A(x)}\} + a(x) \cdot c_1 \cdot e^{-A(x)} = f(x) \quad | \cdot e^{+A(x)}$

$$c_1'(x) + c_1(x) \cdot [-A'(x) + a(x)] = f(x) \cdot e^{A(x)} \quad \text{wegen: } A'(x) = a(x)$$

$$\rightarrow c_1'(x) + = f(x) \cdot e^{A(x)} \quad \rightarrow c_1(x) = \int f(x) \cdot e^{A(x)} dx \quad \rightarrow y_p(x) = e^{-A(x)} \cdot \int f(x) \cdot e^{A(x)} dx$$

**Satz 9.2.:** Die allgemeine Lösung der DGL  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$  ist **Formel 9.10**  
 $y_p(x) = e^{-A(x)} \cdot \{c_1 + \int f(x) \cdot e^{A(x)} dx\}$  wobei  $c_1 \in \mathbb{R}$  frei wählbar und  $A(x) := \int a(x) dx$  (ohne Integrationskonstante)

Beispiel:  $y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) = x^3 \quad x \in (0, \infty) \quad \frac{1}{x} = a(x) \rightarrow A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

$$\rightarrow y(x) = e^{-\ln x} \cdot \{c_1 + \int x^3 \cdot e^{\ln x} dx\} = \frac{1}{e^{\ln x}} \{c_1 + \int x^4 dx\} = \frac{1}{x} \left\{ c_1 + \frac{x^5}{5} \right\}$$

$$\rightarrow \text{allgemeine Lösung: } y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{x^4}{5}$$

9.4. Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

- DGL-Typ ist:  $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$  wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  **Formel 9.11**  
 $:= Ly(x) \rightarrow$  Differentialoperator

DGL in Kurzschreibweise:  $Ly(x) = f(x)$

- falls  $f(x) = 0$ , so heißt die DGL „*homogen*“, ansonsten „*inhomogen*“
- wesentliche Eigenschaft lineare DGL ist das „*Superpositionsprinzip*“:

$y_1(x)$ Lösung von $Ly_1 = f_1(x)$ $y_2(x)$ Lösung von $Ly_2 = f_2(x)$	$\rightarrow y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ ist Lösung von $Ly(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig
--	---

**Formel 9.12**

**Beweis:**

$Ly_1 = f_1$	$  \cdot c_1$	$L(c_1 y_1) = c_1 Ly_1 = c_1 f_1$	$  +$
$Ly_2 = f_2$	$  \cdot c_2$	$L(c_2 y_2) = c_2 Ly_2 = c_2 f_2$	$  +$
$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = L(c_1 y_1) + L(c_2 y_2) = c_1 f_1 + c_2 f_2$			

Folgerungen daraus sind :

Sei:  $Ly_h(x) = 0 \quad \rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  ist Lösung von  $Ly(x) = f(x)$   
 $Ly_p(x) = f(x)$

Sei:  $Ly_h(x) = f(x) \quad \rightarrow y_\delta(x) = [y_h(x)] = y_h(x) - y_p(x)$  ist Lösung von  $Ly_\delta(x) = 0$   
 $Ly_p(x) = f(x) \quad 1 \cdot f(x) + (-1) \cdot f(x) = 0$

Dass heißt  $y_\delta$  ist die Lösung der homogenen DGL  $\rightarrow$  analoge Aussage zu Satz 9.1.:

Die allgemeine Lösung der DGL  $Ly(x) = f(x)$  hat die Darstellung  $y(x) = y_h + y_p(x)$ , wobei  
 $y_h(x)$  = allgemeine Lösung der homogenen DGL  $Ly_h(x) = 0$   
 $y_p(x)$  = partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $Ly_p(x) = f(x)$  **Formel 9.13**

9.4.1. Bestimmung der allgemeinen Lösung  $y_h(x)$  der homogenen DGL:

hat man zwei Lösungen  $y_1(x), y_2(x)$  gefunden, so sind nach Superpositionsprinzip alle Linearkombinationen  $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$  auch Lösung

Frage: hat man damit schon alle Lösungen der homogenen DGL gefunden?

Definition 9.3.: Zwei Funktionen  $y_1(x), y_2(x)$  für  $x \in I$  (Intervall auf dem die Lösungen gesucht werden) heißen linear abhängig, wenn eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so dass:  
 $y_2(x) = c \cdot y_1(x) \quad \forall x \in I$  oder  $y_1(x) = c \cdot y_2(x) \quad \forall x \in I$ . Sie heißen linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind. Eine Antwort auf obige Frage liefert:

**Satz 9.4.:** Sei  $y_1(x), y_2(x)$  ein Paar linear unabhängiger Lösungen der homogenen DGL  $Ly(x) = 0$  (bzgl. der GGL 9.11), dann lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$Y_h(x) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2, \text{ wobei } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Bestimmen von zwei linear unabhängigen Lösungen  $y_1, y_2$

Idee: suche Lösungen der Art:  $y(x) = e^{\lambda x}$  mit geeignetem  $\lambda$

Einsetzen in die DGL  $Ly(x) = 0$  liefert:

$$Ly(x) = y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + b \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b) = 0$$

Dass heißt:  $y(x) = e^{\lambda x}$  ist Lösung von  $Ly = 0$ , falls  $(\lambda^2 + a \cdot \lambda + b) = 0$

**Formel 9.14**

„charakteristische Gleichung“

Lösungen sind: 
$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

1. Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_{1,2}$  reell, dass heißt  $\frac{a^2}{4} - b > 0$  dann sind  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  und  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  linear unabhängige Lösungen

2. Fall:  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_{1,2}$  reell, dass heißt  $\frac{a^2}{4} - b = 0$

- zunächst nur eine Lösung  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$
- über Variation der Konstanten, dass heißt mit dem Ansatz  $y(x) = c(x) \cdot e^{\lambda_1 x}$ , ermittelt man eine zweite linear unabhängige Lösung:  $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_1 x}$

3. Fall:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$  komplex, dass heißt  $\frac{a^2}{4} - b < 0$

- dass heißt man hat die komplexen Lösungen  
 $y_+(x) = e^{(\alpha + i \cdot \beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i \cdot \beta x} = e^{\alpha x} \cdot [\cos(\beta \cdot x) + i \cdot \sin(\beta \cdot x)]$   
 $y_-(x) = e^{(\alpha - i \cdot \beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i \cdot \beta x} = e^{\alpha x} \cdot [\cos(\beta \cdot x) - i \cdot \sin(\beta \cdot x)]$

- durch Linearkombination:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot (y_+ + y_-) \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1}{2i} \cdot (y_+ - y_-) \text{ erhält man}$$

$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$        $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$  als reelle und unabhängige Lösungen der homogenen DGL  $\rightarrow y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

### 9.4.2. Bestimmung der partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL:

Ziel: finde eine spezielle Lösung  $y_p(x)$  der DGL  $Ly_p(x) = f(x)$

Behandeln 3 Methoden:      1.) Variation der Konstanten  
    2.) Ansatz für spezielle  $f(x)$   
    3.) Laplace-Transformation

#### 1.) Variation der Konstanten (Vorteil: geht für $\forall f(x)$ ):

- mit den Lösungen  $y_{1,2}(x)$  der homogenen DGL macht man den Ansatz  
 $y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  und bestimmt  $c_1(x), c_2(x)$  so, dass  $Ly_p(x) = f(x)$  erfüllt ist.  
 Dies führt auf ein GLS für  $c_1'(x), c_2'(x)$ :  
 $y_1(x) \cdot c_1'(x) + y_2(x) \cdot c_2'(x) = 0$

$$y_1'(x) \cdot c_1(x) + y_2'(x) \cdot c_2(x) = f(x) \quad c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

- man erhält folgende Lösung:

$$y_p = y_1(x) \cdot \int \frac{-f(x) \cdot y_2(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \cdot \int \frac{-f(x) \cdot y_1(x)}{W(x)} dx$$

$c_1(x) \qquad \qquad \qquad c_2(x)$

**Formel 9.15**

wobei:  $W'(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$  „Wronski-Determinante“

Bemerkung: man kann zeigen, dass  $W(x) \neq 0$ , wenn  $y_1(x), y_2(x)$  linear unabhängige Lösungen sind

- problematisch: Bestimmung von Stammfunktionen für die Integrale
- möglich wäre auch eine numerische Berechnung der bestimmten Integrale

$$C_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{-f(s) \cdot y_2(s)}{W(s)} ds \quad \text{analog für} \quad C_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{-f(s) \cdot y_1(s)}{W(s)} ds; \quad x_0 \text{ beliebig, aber fest}$$

## 2.) Ansatz für spezielle Typen von $f(x)$ :

Typ 1:  $f(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x}$

- bestimme  $k :=$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = \mu$  zur charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + \lambda \cdot a + b = 0$ , das heißt
  - 0, wenn  $\lambda = \mu$  keine Nullstelle
  - $k := 1$ , wenn  $\lambda = \mu$  einfache Nullstelle
  - 2, wenn  $\lambda = \mu$  doppelte Nullstelle (d.h. Fall 2:  $\frac{a^2}{4} - b = 0$  und  $\mu^4 = -\frac{a}{2}$ )

- der Ansatz für  $y_p(x)$  lautet:

$y_p(x) = x^k \cdot (A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \dots + A_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x}$  wobei  $A_0, A_1, \dots, A_n$  zu bestimmende reelle Konstanten sind, sie werden bestimmt durch:

- Einsetzen des Ansatzes in DGL - Koeffizienten-Vergleich

Spezialfall:  $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$  hier ist  $\mu = 0$ , denn  $e^{\mu x} = 1 \quad \forall x$ , das heißt  $f(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n) \cdot e^{0x}$

→ Ansatz:  $y_p(x) = x^k \cdot (A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \dots + A_n \cdot x^n)$  wobei  $k :=$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = \mu = 0$  zur charakteristischen Gleichung

Beispiel:  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3x \cdot e^{2x}$   
 $\rightarrow a=1 \quad \rightarrow b=-2$

charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda = -2$  (2 reelle Nullstellen)

→ allgemeine Lösung der homogenen DGL  $y_h(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x}$

Typ von  $f(x)$ :  $f(x) = (0 + 3 \cdot x) \cdot e^{2x} \quad \mu = 2$  ( $k =$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = 2 = 0$ )

Ansatz:  $y_p(x) = x^0 \cdot (A_0 + A_1 \cdot x) \cdot e^{2x} \quad \rightarrow$  keine Nullstelle

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 \cdot x) \cdot e^{2x} \quad | \cdot (-2)$$

$$y_p'(x) = \{(A_1) + 2(A_0 + A_1 \cdot x)\} \cdot e^{2x} = \{(A_1 + 2A_0) + 2A_1 \cdot x\} \cdot e^{2x} \quad | \cdot 1$$

$$y_p''(x) = \{2A_1 + 2[(A_1 + 2A_0) + 2A_1 \cdot x]\} \cdot e^{2x} = \{(4A_1 + 4A_0) + 4A_1 \cdot x\} \cdot e^{2x} \quad | \cdot 1$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = \{[-2A_0] + [-2A_1] \cdot x + [A_1 + 2A_0] + [2A_1]x + [4A_1 + 4A_0] + [4A_1]x\} \cdot e^{2x} = \{[5A_1 + 4A_0] + 4[A_1]x\} \cdot e^{2x} = \{0 + 3x\} \cdot e^{2x} = f(x)$$

Koeffizientenvergleich:  $A_0 + 5A_1 = 0 \rightarrow A_0 = -\frac{15}{16}$

$$4A_1 = 3 \rightarrow A_1 = \frac{3}{4}$$

$y_p(x) = (-\frac{15}{16} + \frac{3}{4}x) \cdot e^{2x} \rightarrow$  allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} + (-\frac{15}{16} + \frac{3}{4}x) \cdot e^{2x}$$

$$\frac{y_h(x)}{y_p(x)}$$

Typ 2:  $f(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\gamma \cdot x) + (b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\gamma \cdot x)$

- bestimme  $k :=$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = \mu + i \cdot \gamma$  zur charakteristischen Gleichung
- der Ansatz ist dann:

$$y_p(x) = x^k \cdot \{(A_0 + \dots + A_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\gamma \cdot x) + (B_0 + \dots + B_n \cdot x^n) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\gamma \cdot x)\}$$

wobei  $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$  zu bestimmende Konstanten sind

- der Fall  $f(x) = (a_0 + \dots + a_n \cdot x^n) \cdot \cos(\gamma \cdot x) + (b_0 + \dots + b_n \cdot x^n) \cdot \sin(\gamma \cdot x)$  entspricht dem Spezialfall:  $\mu = 0$

→ Ansatz:  $y_p(x) = x^k \cdot \{(A_0 + \dots + A_n \cdot x^n) \cdot e^{i\mu x} \cdot \cos(\gamma x) + (B_0 + \dots + B_n \cdot x^n) \cdot e^{i\mu x} \cdot \sin(\gamma x)\}$   
 $k =$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = 0 + i \cdot \gamma = i \cdot \gamma$

Beispiel:  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2x^2 \cdot \sin(3x)$   
 $n=2 \quad \gamma=3$

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

→  $y_h(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$

Typ von  $f(x)$ :  $f(x) = (0 + 0x + 0x^2) \cdot \cos(3x) + (0 + 0x + 2x^2) \cdot \sin(3x)$

$k =$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = 0 + i \cdot 3 = 3i = 0$  (keine Nullstelle)

→ Ansatz:  $y_p(x) = x^0 \cdot \{(A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2) \cdot \cos(3x) + (B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot x^2) \cdot \sin(3x)\}$

//Dann  $y_p(x)$  2 mal ableiten und in die Ausgangsgleichung einsetzen.  
 Anschließend die Konstanten  $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$  errechnen...

Gemischter Typ:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , wobei jedes  $f_{1,2}$  vom Typ 1/2 ist

- nach dem Superpositionsprinzip sucht man  $y_p(x)$  als  $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ , wobei  $y_{p,k}(x)$  durch den Ansatz  $\mathcal{L}y_{p,k}(x) = f_k(x)$  bestimmt wird.  $k = 1, 2$

Beispiel:  $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin(2x) + e^x$

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{1x}$

Typ von  $f_1$ :  $f_1(x) = \sin(2x) = 0 \cdot \cos(2x) \cdot e^{0x} + 1 \cdot \sin(2x) \cdot e^{0x}$   
 $n=0 \quad \gamma=2 \quad \mu=0$

$k =$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = \mu + i \cdot \gamma = 0 + i \cdot 2 = 2i = 0 \rightarrow$  keine Nullstelle,  $k = 0$

Ansatz:  $y_{p,1}(x) = x^0 \cdot \{A_0 \cdot \cos(2x) \cdot e^{0x} + B_0 \cdot \sin(2x) \cdot e^{0x}\} = A_0 \cdot \cos(2x) + B_0 \cdot \sin(2x)$

Bestimme  $A_0, B_0$  durch Einsetzen von  $y_{p,1}(x)$  in DGL  $\mathcal{L}y_{p,1}(x) = f_1(x)$  und

Koeffizientenvergleich  $\rightarrow A_0 = \frac{3}{20}, B_0 = -\frac{1}{20}$

Typ von  $f_2$ :  $f_2(x) = e^x = 1 \cdot e^{1 \cdot x}$  ist vom Typ 1, das heißt  $f_2(x) = p_n(x) \cdot e^{\mu x}$   
 $n=0 \quad \mu=1$

$k =$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda = \mu = 1 \rightarrow k = 1$

Ansatz:  $y_{p,2}(x) = x^1 \cdot A_0 \cdot e^x = A_0 \cdot x \cdot e^x$  (Bemerkung:  $A_0$  ist anders, als bei  $f_1$ )

Bestimme  $A_0$  durch Einsetzen von  $y_{p,2}$  in DGL  $\mathcal{L}y_{p,2}(x) = f_2(x)$  und

Koeffizientenvergleich  $A_0 = -1$

→ allgemeine Lösung:  $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \left\{ \frac{3}{20} \cos(2x) - \frac{1}{20} \sin(2x) \right\} - x \cdot e^x$   
 $y_h(x) \quad y_{p,1}(x) \quad y_{p,2}(x)$

- Lösung eines Anfangswertproblems (AWP):  $\mathcal{L}y(x) = f(x) \leftarrow$  DGL

Anfangsbedingungen:  $y(x_0) = w_0, y'(x) = w_1$

1.) Bestimme allgemeine Lösung der DGL  $y(x) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + y_p(x) \quad \forall x$

2.) Bestimme  $c_1, c_2$  aus der AB:  $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + y_p(x) = w_0$   
 $y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + y_p'(x) = w_1$

Laplace-Transformation zur Lösung eines AWP:

Vorteile der Methode:

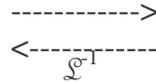
- Trennung in  $y_h(x)$  und  $y_p(x)$  nicht nötig
- Bestimmung von  $c_1, c_2$  beim AWP ergibt sich automatisch

Idee: man nutzt die eindeutige Korrespondenz zwischen.

Originalfunktion  $f(x)$   
 (Bezeichnung in Kleinbuchstaben)

$\mathcal{L}$

Bildfunktion  $F(s)$   
 (Bezeichnung in Großbuchstaben)



$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} := \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-sx} dx, s > 0$$

Lösungsprinzip: AWP für  $y(x)$   $\xrightarrow{\mathcal{L}}$  Gleichung für  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$  //Laplace-Transformation  
 $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$   $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$   $Y(s) = \text{Formel in } s$  //Rücktransformation

Formeltabellen und Rechenregeln:

f(x)	F(s) = $\mathcal{L}\{f(x)\}$
$x^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (0! = 1)$
$e^{ax}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bx)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin(bx)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$

F(s)	f(x) = $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{x^{n-1} e^{ax}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(s-a)^2 - b^2}$	$\frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx)$
$\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{ax} \cos(bx)$

Linearität: Laplace-Transformation:  $\mathcal{L}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(x)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(x)\}$

Rücktransformierte:  $\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

Differentiation: sei  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  dann gilt:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

Beispiel: löse das AWP:  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 1 + e^{-2x}$   $y(0) = 0$   $y'(0) = 1$

1.) Transformation der DGL:

$$\mathcal{L}\{y''(x)\} + 4 \cdot \mathcal{L}\{y'(x)\} + 4 \cdot \mathcal{L}\{y(x)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{-2x}\}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4 \cdot [sY(s) - y(0)] + 4 \cdot Y(s) = \frac{0!}{s^{0+1}} - \frac{1}{s - (-2)}$$

$$Y(s)[s^2 + 4s + 4] - 1 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \quad //\text{Gleichung für } Y(s)$$

2.) Lösung für  $Y(s)$ :  $Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3} \quad (*) \quad | \cdot \mathcal{L}^{-1}$

Partialbruchzerlegung  $\frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}$

3.) Rücktransformation angewendet auf (\*)

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)^2}\right\} + \left[A \cdot \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s} + B \cdot \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+2} + C \cdot \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+2)^3}$$

$$y(x) = (1+C) \frac{x^{2-1} e^{-2x}}{(2-1)!} + A \frac{x^{1-1} e^{0x}}{(1-1)!} + B \frac{x^{1-1} e^{-2x}}{(1-1)!} + \frac{x^{3-1} e^{-2x}}{(3-1)!} = (1+C) \frac{x}{e^{2x}} + A + \frac{B}{e^{2x}} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

9.5. Zur numerischen Lösung von AWP:

$y'(x) = f(x, y(x))$ $y(x) = y_0$
-----------------------------------

- Betrachten das allgemeine AWP 1. Ordnung:
- Man sollte dann an Stützstellen  $x_i = x_0 + i \cdot h$   
 $i = 0, 1, \dots$  mit der Schnittstelle  $h > 0$   
 (hinreichend klein) Näherungswerte  $y_i$  mit

$y_i \approx y(x_i)$   
 (exakte Lösung an  $x = x_i$ )

- Die  $y_i$  werden rekursiv berechnet:  $y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_i \rightarrow \dots \rightarrow y_n$
- Die einfachste Methode ist das EULER-Verfahren:
- DGL für  $x = x_i$ :  $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Idee: bestimme  $y_{i+1}$  so, dass: 

$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$
---

→ Rekursionsvorschrift :  $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots$

- Man kann folgende Fehlerabschätzung beweisen:
- $|y_i - y(x_i)| \leq C(T) \cdot h \quad \forall x_i \in [x_0, x_0 + T]$
- genauere Verfahren sind die sogenannten RUNGE-KUTTA-Verfahren (siehe Literatur)
- diese Verfahren sind in Software-Paketen enthalten (z.B. MATLAB). Zu programmieren ist nur noch die Funktion  $f(x, y(x))$ , dass heißt function (x, y)...

## 10. Fourier-Reihen:

### 10.1. Periodische Funktion:

- Viele technische oder naturwissenschaftliche Prozesse sind periodisch
- Definition 10.1.:** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt „periodisch“ mit der Periode  $T$  ( $T > 0$ ) oder kurz „T-periodisch“, falls gilt:  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f stetig

f unstetig

Beispiel: harmonische Schwingung

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$$

Amplitude    Kreisfrequenz    Phasenkonstante

$$\omega_0 \cdot x_0 + \varphi = 0 \rightarrow x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

$$f(x + T) = A \cdot \sin(\omega \cdot (x + T) + \varphi) = f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi + \omega \cdot T)$$

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi + 2n\pi) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $T$  ist Periode, falls  $\omega \cdot T = 2n\pi$ , dass heißt  $T = n \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$  kleinste Periode ist  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Andere Darstellung von  $f(x)$ : (über Additionstheorem)  
 $f(x) = A \cdot \{ \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot x) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot x) \}$   
 $\rightarrow f(x) = a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\omega \cdot x)$  mit  $a = A \cdot \sin(\varphi), b = A \cdot \cos(\varphi)$

### 10.2. Definition und Berechnung der Fourier-Reihe

- Fourier (franz. Ingenieur) stellt 1807 die These auf:  
 Jede periodische Funktion  $f(x)$  lässt sich als Überlagerung (od. Superposition) harmonischer

Schwingungen darstellen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)] = A_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x + \varphi_k) \quad \text{Formel 10.1}$$

Periode:  $T_k = \frac{2\pi}{k \cdot \omega}$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

**Motivation:** Fourier-Reihen sind wichtig zum Beispiel für die Lösung partieller DGL

Grundlegend für die Berechnung sind folgende Orthogonalitätsbeziehungen:

Seien  $\Phi, \Psi$  zwei Funktionen aus dem folgenden Funktionensystem

$$\Phi(x), \Psi(x) \in \{1, \cos(k \cdot \omega \cdot x), \sin(k \cdot \omega \cdot x), k=1,2,\dots\} \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \int_0^T \Phi(x) \cdot \Psi(x) dx = 0 \quad \text{falls } \Phi \neq \Psi \quad \text{Formel 10.2}$$

Skalarprodukt

$$\langle \Psi, \Psi \rangle := \int_0^T [\Psi(x)]^2 dx = \begin{cases} T, & \text{falls } \Psi=1 \\ \frac{T}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie hängen  $a_k, b_k$  von  $f(x)$  ab?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)] \quad | \cdot \Psi(x), \int_0^T \dots dx$$

$$\langle f, \Psi \rangle = \frac{a_0}{2} \int_0^T 1 \cdot \Psi(x) dx + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)] \cdot \Psi(x) dx$$

$$\langle f, \Psi \rangle = \frac{a_0}{2} \cdot \langle 1, \Psi \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \langle \cos(k \cdot \omega \cdot x), \Psi(x) \rangle + b_k \cdot \langle \sin(k \cdot \omega \cdot x), \Psi(x) \rangle]$$

$$\Psi = 1 \rightarrow \langle f, 1 \rangle = \frac{a_0}{2} \cdot \langle 1, 1 \rangle \rightarrow a_0 = \frac{2}{T} \langle f, 1 \rangle$$

$$\Psi = \cos(k \cdot \omega \cdot x) : \rightarrow \langle f, \Psi \rangle = a_k \cdot \langle \cos(k \cdot \omega \cdot x), \Psi \rangle \rightarrow a_k = \frac{2}{T} \langle f, \Psi \rangle$$

$$\text{Analog: } \Psi = \sin(k \cdot \omega \cdot x) : \rightarrow b_k = \frac{2}{T} \langle f, \Psi \rangle$$

Als „Fourier-Koeffizienten“ von  $f(x)$  erhält man:

Voraussetzung:  $f(x)$  T-periodisch,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $x_0$  beliebig

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x) dx$$

**Formel 10.3**

Bemerkung: Eigentlich hat man die Integrale  $\int_0^T \dots dx$ , man kann aber zeigen, dass

$$\int_0^T g(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+T} g(x) dx, \text{ falls } g(x) \text{ periodisch}$$

Definition 10.2.: Die mit den Koeffizienten  $a_k, b_k$  aus (10.3) gebildete Reihe (Grenzfunktion)

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)] \text{ heißt „Fourier-Reihe zu } f(x)\text{“}$$

Beispiel 10.3.: berechne F-Reihe von  $f(x)$  für  $x \in [-\pi, \pi)$ , wobei  $f(x)$   $2\pi$ -periodisch

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \dots = 0$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(k \cdot 1 \cdot x) dx = \dots = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(k \cdot 1 \cdot x) dx = \dots = -\frac{2 \cos(k \cdot \pi)}{k}$$

es gilt:  $\cos(k \cdot \pi) = (-1)^k$

$$\rightarrow \text{Fourier-Reihe von } f(x) \text{ ist } F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -2 \frac{(-1)^k}{k} \sin(k \cdot x)$$

Frage:

- 1.) Ist die Reihe  $f(x)$  konvergent?
- 2.) Gilt  $f(x) = F(x)$ ?

### 10.3. Konvergenz der Fourier-Reihe:

- Sei  $F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)]$  die n-te Partialsummen-Funktion (sie ist T-periodisch mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ )

#### Konvergenzarten:

- „punktweise konvergent“ im Punkt  $x_0$ , wenn der Grenzwert  $F(x_0) = \lim F_n(x_0)$  existiert
- F-Reihe heißt „gleichmäßig konvergent“ auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$  so dass:  $\boxed{\max |F(x) - F_n(x)| < \varepsilon} \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$   
dass heißt  $F_n(x)$  liegt im  $\varepsilon$ -Schlauch von  $F(x)$  im Intervall  $[\alpha, \beta]$

Frage: Unter welchen Bedingungen an  $f(x)$  konvergieren die  $F_n(x)$  gegen  $F(x)$ ?

Definition 10.4.: Eine T-periodische Funktion  $f(x)$  heißt „stückweise stetig diff bar“, wenn  $f(x)$  und  $f'(x)$  auf  $[0, T]$  existieren und stetig sind, bis auf endlich viele Ausnahmen  $x_1, x_2, \dots, x_m$

Und die einseitigen Grenzwerte an den  $x_k$  existieren

$$f(x_{k\pm}) : \lim_{x \rightarrow x_{k\pm}} f(x), \quad f'(x_{k\pm}) : \lim_{x \rightarrow x_{k\pm}} f'(x)$$

#### **Satz 10.5.: (Konvergenz der Fourier-Reihe)**

##### Voraussetzung:

- $f(x)$  sei T-periodisch
- $f(x)$  sei stückweise stetig

##### Behauptung:

- Fourier-Reihe  $F(x)$  konvergiert punktweise in allen  $x_0$
  - Auf jedem Stetigkeitsintervall  $[\alpha, \beta]$  von  $f(x)$  konvergiert die F-Reihe gleichmäßig
  - $\boxed{F(x_0) = f(x_0)}$  in allen Stetigkeitspunkten  $x_0$  von  $f(x)$   
 $\boxed{F(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_{0-}) + f(x_{0+}))}$  an jeder Sprungstelle  $x_0$  von  $f(x)$
- $F(x)$  und  $F_n(x)$  für Beispiel 10.3.:

### 10.4. Spezialfall einer geraden oder ungeraden Funktion.

Definition 10.6.: eine T-periodische Funktion  $g(x)$

heißt „gerade“, wenn

$$g(-x) = g(x) \quad \forall x \in (0, T/2)$$

Eine T-periodische Funktion  $u(x)$

heißt „ungerade“, wenn  $u(-x) = -u(x) \quad \forall x \in (0, T/2)$

Eigenschaften: ( $g(x)$  sei gerade,  $u(x)$  sei ungerade)

$$\boxed{\int_{-T/2}^{T/2} g(x) dx = 2 \cdot \int_0^{T/2} g(x) dx, \quad \int_{-T/2}^{T/2} u(x) dx = 0,}$$

Anwendung bei Berechnung der Fourier-Reihe einer Funktion f(x):

1. Fall:  $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} \underset{g(x)}{f(x)} \cos(k\omega x) dx$

$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \underset{u(x)}{f(x)} \sin(k\omega x) dx = 0$

$\Rightarrow a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} f(x) \cos(k\omega x) dx, b_k = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)$  **Formel 10.4**  
reine cos-Reihe

2. Fall:  $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \underset{u(x) \text{ ungerade Funktion}}{f(x)} \cos(k\omega x) dx = 0$

$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \underset{g(x) \text{ gerade Funktion}}{f(x)} \sin(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} f(x) \sin(k\omega x) dx$

$a_k = 0, b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} f(x) \sin(k\omega x) dx \Rightarrow F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x)$  **Formel 10.5**  
reine sin-Reihe

Beispiel:  $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, \pi) \\ -1, x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

Periode sei:  $T = 2\pi$

Schlussfolgerung:  $f(x) =$  ungerade

## 11. Potenzreihen:

### 11.1. Definitionen und Beispiele:

**Definition 11.1.:** Unter einer „Potenzreihe“ (P-Reihe) versteht man eine Reihe der Struktur

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \text{ mit „} \underline{\text{Koeffizienten}} \text{“ } a_k \in \mathbb{R} \text{ und dem „} \underline{\text{Entwicklungspunkt}} \text{“ } x_0 \in \mathbb{R}. \text{ Es gilt die}$$

Vereinbarung:  $(x - x_0)^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

- Häufiger Spezialfall ist  $x_0 = 0 \rightarrow$  P-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$
- Die zugehörige Partialsummenfolge  $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  mit  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$

Besteht aus Polynomen. Vorteil: - leicht berechenbar  
- leicht zu differenzieren und integrieren

Ziel: eine gegebene Funktion  $f(x)$  für  $x \in I$  darstellen als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x - x_0)^k \quad f_n(x) = \text{Näherung für } f(x)$$

Anwendung: - Ermittlung von Näherungsformeln für Integrale  
- Lösung von DGL (siehe Übung)

Beispiel 1: „geometrische Reihe“:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  für  $x \in (-1, 1)$

**Formel 11.1**

Hier ist  $x_0 = 0, a_k = 1 \quad \forall k = 0, 1, \dots$

Beispiel 2:  $\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$  für  $x \in \mathbb{R}$

**Formel 11.2**

Hier ist  $x_0 = 0, a_k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} \text{ falls } k = 2j + 1 \text{ ungerade;} \\ 0 \text{ falls } k = 2j \end{array} \right. \quad \forall k = 0, 1, \dots$

**Beachte:** fehlende x-Potenzen haben den Koeffizienten  $a_k = 0$

### 11.2. Konvergenzaussagen:

- Wie bei Fourier-Reihen hat man die Konvergenzarten:  
„Punktweise konvergent im Punkt  $x$ “, wenn der Grenzwert existiert:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x - x_0)^k = f_n(x) \text{ und „} \underline{\text{gleichmäßig konvergent auf } [\alpha, \beta]} \text{“, wenn } f_n(x) \text{ im}$$

$\varepsilon$ -Schlauch um  $f(x)$  liegt.  $\forall n > n_0(\varepsilon)$

**Satz 11.2.:** (Konvergenz der Potenzreihe)

Zu jeder P-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$  existiert ein eindeutig bestimmbarer „Konvergenzradius“

$r \in [0, \infty]$ , so dass die Reihe konvergent ist  $\forall x$  mit  $|x - x_0| < r$ ,  
dass heißt  $x \in I = \underbrace{(x_0 - r, x_0 + r)}_{\text{Konvergenzintervall}}$  und divergent ist  $\forall x$  mit  $|x - x_0| > r$ .

Die Reihe ist gleichmäßig konvergent auf jedem abgeschlossenen Intervall

$\alpha$  darf nicht auf  $x_0 - r$  liegen

$\beta$  darf nicht auf  $x_0 + r$  liegen

**Bemerkung:** Das Konvergenzverhalten in den Randpunkten  $x_0 - r$ ,  $x_0 + r$  ist von Fall zu Fall verschieden und muss extra untersucht werden

**Sonderfälle:**  $r = 0$  Reihe divergiert  $\forall x \neq x_0$  und konvergiert nur für  $x = x_0$  und

Beispiel:  $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$

$r = \infty$  Reihe konvergiert  $\forall x \in \mathbb{R}$

Beispiel:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

**Bestimmung des Konvergenzradius r:**

Untersuchung der punktweise Konvergenz  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$

Quotientenkriterium:  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k$  ist  $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergent } q < 1 \\ \text{divergent } q > 1 \end{array} \right.$

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{|x - x_0|^k} = |x - x_0| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} =: g$$

- 1. Fall:  $g = 0$   $q < 1 \rightarrow$  Reihe konvergiert  $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow r = \infty$
- 2. Fall:  $g > 0$   $q = |x - x_0| \cdot g < 1$  für  $x$  mit  $|x - x_0| < 1/g$  ist Reihe konvergent  
 $q > 1$  für  $x$  mit  $|x - x_0| > 1/g$  ist Reihe divergent

$$\rightarrow r = \frac{1}{g}$$

**Satz 11.3.:** Voraussetzung:  $a_k \neq 0 \forall k \geq k_0$ ,  $k_0$  fest, hinreichend groß

Behauptung: für den Konvergenzradius  $r$  der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$  gilt:

$$r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad \text{falls der Grenzwert existiert (als endliche Zahl, oder als } +\infty) \quad \text{Formel 11.3}$$

Beispiel:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = +\infty \rightarrow r = \infty$

**Die Fälle „ $a_k = 0$  für unendliche viele  $k$ “:**

- Formel (11.3) nicht anwendbar
- Lösungsweg elementar über Quotientenkriterium mit  $x$  als Parameter

Beispiel:  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot 2^{2j-1} \cdot x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j$  (hier:  $a_k = 0 \forall k = 2j + 1$ )

$$q = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|c_{j+1}|}{|c_j|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{j+1}|}{|(-1)^j|} \cdot \frac{|j+1|}{|j+2|} \cdot \frac{|2^j|}{|2^{j-1}|} \cdot \frac{|x^{2j+1}|}{|x^{2j}|} = \lim_{j \rightarrow \infty} 2x^2$$

Reihe konvergent für  $q = 2|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad r = \sqrt{\frac{1}{2}}$  Konvergenzradius

Reihe divergent für:  $q = 2|x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{Konvergenzintervall } I = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$

**11.3. Differentiation und Integration von Potenzreihen:**

**Satz 11.4.:** (a) In allen Punkten  $x \in I = (x_0 - r, x_0 + r)$ , wobei  $r =$  Konvergenzradius, ist die

Grenzfunktion:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$  definit, stetig und beliebig oft differenzierbar.

(b) Die Ableitungen von  $f(x)$  erhält man durch gliedweise Differentiation

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1} \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x-x_0)^{k-2}$$

(c) Auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[\alpha, \beta] \in I = (x_0 - r, x_0 + r)$  ist  $f(x)$  gliedweise

integrierbar, das heißt  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k \cdot |x-x_0|^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cdot \frac{1}{k+1} \cdot |x-x_0|^{k+1} \right]_{\alpha}^{\beta}$

Beispiel: aus der geometrischen Reihe:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$\rightarrow \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Beispiel:  $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \quad \forall x \in (-1, 1)$

Für  $x \in (0, 1)$  folgt durch gliedweise Integration über  $[0, x] \in (-1, 1)$ :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt \quad [\ln|1+t|]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x$$

$$\ln|1-x| - \ln 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - 0 \right] \quad (*)$$

(\*) gilt auch für  $x \in (-1, 0)$ , denn  $\int_0^x \dots = -\int_x^0 \dots$  und  $[x, 0] \subset (-1, 1)$

$$\rightarrow \boxed{\ln|1+x| = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \right]} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

**Formel 11.4**

### 11.4. Die Taylor-Reihe einer Funktion:

sei  $f(x)$  darstellbar als  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \quad \forall x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Frage: Wie hängen die Koeffizienten  $a_k$  von  $f(x)$  ab?

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0)^1 + \dots = a_0$$

$f(x)$  ist  $\forall x \in I$  beliebig oft gliedweise differenzierbar

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1} = f'(x_0) = a_1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k(k-1)(x-x_0)^{k-2} = f''(x_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k(k-1)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n} = f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

**Definition 11.5.:** Ist  $f(x)$  auf  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , beliebig oft differenzierbar. So heißt die

Potenz-Reihe: 
$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

„Taylor-Reihe“ von  $f(x)$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Aus obigem folgt:  $f(x)$  als P-Reihe darstellbar  $\forall x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) = T_f(x) \forall x \in I$

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

Dass heißt  $f(x)$  ist als P-Reihe darstellbar  $\rightarrow f(x) = T_f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j$

$\forall x \in (-1, 1), x_0 = 0 \rightarrow f^{(2k)}(0) = 2k! \cdot (-1)^k$

**Beachte:** es gilt immer  $f(x) = T_f(x)$ , z.B. für:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

wann gilt  $f(x) = T_f(x)$  ?

- Die Partialsumme von  $T_f(x)$  ist:  $T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

- Es gilt:  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

also:  $f(x) = T_f(x)$ , genau dann, wenn  $|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)^{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Bemerkung: „in Funktionentheorie“: wenn  $f(z)$  komplex differenzierbar  $\forall |z - x_0| < \delta$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

so gilt:  $f(z) = T_f(z) \forall |z - x_0| < \delta$

## 12. Differentialrechnung skalarer Funktionen in mehreren Variablen:

### 12.1. Grundlagen und Begriffe:

Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$ :

- „Punkt“  $x \in \mathbb{R}^n$  ist ein Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , wobei  $x_i \in \mathbb{R}$  die Koordinaten des Punktes sind  
bei mehreren Punkten wird oben indiziert:  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$
- „Abstand zweier Punkte“  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  und  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

$$\|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

**Formel 12.1**

- „r-Umgebung“ (r-Kugel) eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^n$  ist die Menge  
 $U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$   
//Umgebung um den Punkt a mit Radius r
- x heißt „imaginärer Punkt“ der Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ , wenn ein  $r > 0$  existiert, so dass  $U_r(x) \subset D$

- x heißt „Randpunkt von D“, wenn in jeder Umgebung  $U_r(x)$  ein Punkt aus D und ein Punkt aus  $\mathbb{R}^n \setminus D$  liegt
- Menge D heißt „offen“, wenn jeder Punkt  $x \in D$  innerer Punkt von D ist

- Menge D heißt „abgeschlossen“, wenn jeder Randpunkt von D zu D gehört

Definition 12.1.: Unter einer „skalaren Funktion in n Variablen“ versteht man eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$ , die jedem Punkt  $x \in D$  einen skalaren Wert  $f(x) \in \mathbb{R}$  zuordnet:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in D \rightarrow y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

Unter dem „Wertebereich“ von f versteht man die Menge  $W := \{y \in \mathbb{R} : \text{es existiert } x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$

Andere Schreibweisen:

- Anstelle von  $y = f(x_1, x_2)$  schreibt man oft  $z = f(x, y)$  (wegen  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem)
- Anstelle von  $y = f(x_1, x_2)$  schreibt man oft  $w = f(x, y, z)$   
Beispiel: sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  Punktmenge eines Körpers und  $[0, T]$  ein Zeitintervall  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$  Temperatur im Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in K$  zum Zeitpunkt  $t = x_4$   
Beispiel: explizite Zuordnungsvorschrift

$$f(x, y) = \sin(x - y) + \frac{3x}{x^2 + y^2} \text{ mit } d = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$$

geometrische Darstellung von  $f(x)$  für  $n = 2$  :

Definition 12.2.: Die „Niveaumenge“ von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zum Niveau  $c \in \mathbb{R}$  ist die Menge  $N_c(f) := \{x \in D : f(x) = c\}$

Beispiel:  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ , Niveau  $c = 2$   
 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$  (Kreisgleichung)

### 12.2. Grenzwert und Stetigkeit:

Definition 12.3.: Eine Punktfolge  $\{x^{(k)}\} \in \mathbb{R}^n$  konvergiert gegen einen Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$ , in Zeichen:  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ , wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$

• Man kann zeigen:  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ , genau dann wenn  $a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} \forall i = 1, 2, \dots, n$  **Formel 12.2**

Definition 12.4.: Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$  oder  $a$  sei Randpunkt  $D$

- $f(x)$  hat in  $a$  (oder: für  $x \rightarrow a$ ) den Grenzwert  $g$ , in Zeichen:  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x) = g$  wenn für jede Punktfolge  $\{x^{(k)}\} \subset D$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x) = g$
- $f$  heißt im Punkt  $a \in D$  stetig, wenn  $\boxed{f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x)}$
- $f$  heißt auf  $M$  stetig wobei  $(M \subset D)$ , wenn  $f$  in allen Punkten  $a \in M$  stetig ist.

Beispiel:  $f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2}{4x_1 + 5x_2}$ , für  $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ ,  $a = (0, 0)^T$   
 $0$ , für  $(x_1, x_2) = (0,0)$

1. Folge:  $x^{(k)} = (\frac{1}{k}, 0)^T$  konvergiert gegen  $a = (0, 0)^T$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\frac{1}{k}, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{4 \cdot (\frac{1}{k})^2 + 5 \cdot (0)^2} = 0$$

2. Folge:  $x^{(k)} = (\frac{1}{k}, \frac{2}{k})^T$  konvergiert auch gegen  $a = (0, 0)^T$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k}}{4 \cdot (\frac{1}{k})^2 + 5 \cdot (\frac{2}{k})^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2}{4 + 5 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}$$

also verschiedene Grenzwerte für unterschiedliche Folgen  $\rightarrow$  Grenzwert existiert nicht  
 $\rightarrow f$  ist **nicht stetig** in  $a = (0, 0)^T$

**Beachte:** Auch hier gelten die üblichen Grundsätze und Verknüpfungsregeln für stetige Funktionen:  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f/g$  ( $g \neq 0$ ), und  $\varphi(f(x))$  mit  $\varphi(t) =$  reelle Funktion

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} f(x))$ , falls  $\varphi(t)$  stetig

### 12.3. Partielle Ableitungen und Gradient:

- sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , und  $a$  ein Punkt von  $D$
- wir betrachten die „*i-te partielle Funktion*“  $f_i$   $x_i$

$\rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) =: f_i(x_i)$

alle Variablen  $x_j \neq x_i$  haben den konstanten Wert  $x_j = a_j$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := f_i'(a_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$   
 $= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_i(a_i + t) - f_i(a_i)}{t}$

**Definition 12.5.:** Unter der „partiellen Ableitung von  $f(x)$  nach  $x_i$  im Punkt  $a$ “ versteht man die

Zahl  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+t}, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_i(a_1, \dots, a_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^{(i)}) - f(a)}{t}$  wobei  $e^i$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

Falls der Grenzwert existiert, so heißt  $f(x)$  im Punkt  $a$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar. Ist  $f(x)$  in jedem Punkt  $a = x \in D$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar, so ist  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  wieder eine Funktion

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die man „partielle Ableitung von  $f(x)$  nach  $x_i$ “ nennt.

Kurzschreibweise:  $f_{x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

Zur Berechnung von  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  : Im Formelausdruck für  $f(x_1, \dots, x_n)$  betrachtet man alle

anderen Variablen  $x_j \neq x_i$ , als Konstanten und differenziert nur nach  $x_i$

Beispiel:  $f(x, y) = x^4 y^2 + 3x - 5y + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = 4x^3 y^2 + 3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = 2x^4 y - 5$$

**Definition 12.6.:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , eine Funktion in  $n$  Variablen. Unter dem „Gradienten“ von  $f$  an der Stelle  $x$  versteht man den Vektor

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \nabla f(x) \text{ mit } \nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ („Nabla-Operator“)}$$

andere Schreibweise

Beispiel:  $f(x, y) = e^{x+2y} + x^2 \sin(3y)$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{x+2y} + 2x \cdot \sin(3y) \\ 2 \cdot e^{x+2y} + 3x^2 \cdot \sin(3y) \end{pmatrix}$$

Höhere partielle Ableitungen werden rekursiv definiert.

- Zweite partielle Ableitung von  $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \text{ kurz: } f_{x_i x_j} := (f_{x_i})_{x_j} \text{ falls } i = j \text{ so schreibt man } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ statt } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

- Zweite partielle Ableitung von  $f$ :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \text{ kurz: } f_{x_i x_j x_k} := (f_{x_i x_j})_{x_k}$$

- $f$  heißt „ $l$ -mal stetig partiell differenzierbar“, wenn alle ersten bis  $l$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren und stetig sind.

Beispiel:  $f(x, y) = x^2 y^3 + y \cdot \ln x$   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy^3 + y/x & f_y(x, y) &= 3x^2 y^2 + \ln x \\ f_{xx}(x, y) &= 2y^3 - y/x^2 & f_{yy}(x, y) &= 6x^2 y \\ f_{xy}(x, y) &= 6xy^2 + 1/x & f_{yx}(x, y) &= 6xy^2 + 1/x \end{aligned}$$

**Beachte:**  $f_{xy} = f_{yx} \rightarrow f$  ist (mindestens) 2 mal stetig differenzierbar

**Satz 12.7.: (Vertauschbarkeit bei höheren partiellen Ableitungen)**

Voraussetzung: -  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$  offen  
 -  $f$  ist  $l$ -mal stetig partiell differenzierbar auf  $D, l \geq 2$

Behauptung: Bei allen zweiten bis  $l$ -ten partiellen Ableitungen **kann die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht** werden, das heißt:  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$

12.4. Die vollständige (oder totale) Differentiation:

Definition über Linearisierung

Rückblick auf den Fall einer Variablen:

$f(x)$  differenzierbar im Punkt  $a$  genau dann wenn

$$\exists g \in \mathbb{R} \text{ mit } g = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + g(x - a)]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a}$$

wobei:  $\boxed{r(x) = f(x) - l(x)}$  Fehler der Linearisierung  
 $f(x) := f(a) + g(x - a)$  Linearisierung von  $f$  im Punkt  $a$

dieser Linearisierungsgedanke wird verallgemeinert:

Definition 12.8.: Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$  offen, heißt „vollständig differenzierbar“ im Punkt  $a \in D$ , wenn ein Vektor  $g \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass für die Linearisierung von  $f$

$$f(x) = l(x) + r(x) \quad \text{mit} \quad \boxed{l(x) := f(a) + g^T(x - a)} \quad \text{gilt.}$$

lineare Funktion    Restglied

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + g^T(x - a)]}{\|x - a\|} = 0$$

Dass heißt  $r(x)$  wird „*sehr viel kleiner*“, als  $\|x - a\|$  für  $x \rightarrow a$

$$l(x) \text{ ausführlich: } l(x) = l(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n g_i \cdot (x_i - a_i) \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Anschaulich für  $n = 2$ :

Fläche:  $z = f(x, y)$  wird linearisiert durch

Ebene:  $z = l(x, y) = f(a_1, a_2) + g(x - a_1) + g(x - a_2)$

- Geht durch den Punkt  $P(a_1, a_2 | f(a_1, a_2))$
- Ist Tangentialebene an die Fläche  
 $z = f(x, y)$  im Punkt  $P$

Fragen: - wann ist eine Funktion  $f(x)$  vollständig differenzierbar (Def. 12.8. nicht praktikabel)  
 - wie erhält man  $g \in \mathbb{R}^n$

**Satz 12.9.: (notwendige Bedingung für vollständige Differenzierbarkeit)**

Sei  $f(x)$  im Punkt  $a$  vollständig differenzierbar, dann muss gelten:

- (a)  $f(x)$  ist stetig im Punkt  $a$
- (b) die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  existieren
- (c) es gilt  $g = \text{grad } f(a)$ , das heißt  $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

**Beweis zu (b), (c):** in  $f(x) = \underbrace{f(a) + g^T(x-a)}_{l(x)} + r(x)$

Setze:  $x = a + t \cdot e^{(i)}, t > 0$

$$f(a + t \cdot e^{(i)}) - f(a) = \underbrace{g^T \cdot (t \cdot e^{(i)})}_{t \cdot (g^T \cdot e^{(i)}) = t \cdot g_i} + r(x)$$

$$\|x - a\| = \|t \cdot e^{(i)}\| = t \cdot \|e^{(i)}\| = t \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot e^{(i)}) - f(a)}{t} = g_i + \frac{r(x)}{\|x - a\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$$

**Folgerungen:**

(1) die Linearisierung von  $f$  im Punkt  $a$  ist:  $f(x) = l(x) + r(x)$

mit  $l(x) = f(a) + \text{grad } f(a)^T \cdot (x - a)$

(2) die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P(a_1, a_2 | f(a_1, a_2))$

lautet: 
$$z = l(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (a_1, a_2) \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (a_1, a_2) \cdot (y - a_2)$$
 **Formel 12.3**

**Beachte:** aus der Existenz der 1. partiellen Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  folgt noch **nicht** die

vollständige Differenzierbarkeit ( $\exists$  Gegenbeispiel, zum Beispiel Ü-Blatt 12, Aufgabe 3)

**Satz 12.10.:** (hinreichende Bedingung für vollständige Differenzierbarkeit)

Voraussetzung: -  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$  offen,

- partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  existieren und sind stetig für alle  $a \in D$

Behauptung:  $f$  ist vollständig differenzierbar in allen Punkten  $a \in D$

Anwendung bei der Fehlerrechnung:

Seien  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T$  Vektor gemessener Größen

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  Vektor wahrer Größen

$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T :=$  Vektor der Messfehler

$f(x_0) =$  Funktionswert aus gemessener Größen

$f(x) =$  Funktionswert aus wahren Größen

$\Delta f := f(x) - f(x_0)$  Fehler im Funktionswert

Frage: Wie groß kann  $|\Delta f|$  maximal werden in Abhängigkeit von  $\Delta x$ ?

• Wenn  $f(x)$  im Punkt  $x_0$  vollständig differenzierbar, so gilt:

$$f(x) = \frac{f(x_0) + \text{grad } f(x_0)^T \cdot (x - x_0)}{l(x)} + r(x) \rightarrow f(x) - f(x_0) = \text{grad } f(x_0)^T \cdot (\Delta x) + \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\|$$

Bezeichnung: den Ausdruck  $df(x_0) := \text{grad } f(x_0)^T \cdot (\Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i$  **Formel 12.4**

Nennt man „vollständiges Differential von  $f$  im Punkt  $x_0$ “

• Für kleine Messfehler  $\Delta x$  wird  $r(x)$  sehr klein, dass heißt

$$\Delta f \approx df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i \rightarrow |\Delta f| \approx \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \cdot |\Delta x_i|$$
 **Formel 12.5**

sogar „=“ falls Vorzeichen von  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  und  $\Delta x_i$  gleich

$\rightarrow$  Abschätzung für kleine Messfehler (in „erster Näherung“)  $|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \cdot |\Delta x_i|$

Beispiel: Volumen einer quadratischen Pyramide

**Formel 12.6**

$$V = \frac{1}{3} x^2 y = f(x, y)$$

gemessen [cm]:  $x_0 = 15$        $y_0 = 10$

Messfehler:  $|\Delta x| = |x - x_0| \leq 0,1$

$|\Delta y| = |y - y_0| \leq 0,1$

$$V_0 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 10 = 750$$

Fehler im Volumen:  $\Delta V = V - V_0$

$$|\Delta V| = |\Delta f| \leq \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) \cdot |\Delta x| + \frac{\partial f}{\partial y_i}(x_0, y_0) \cdot |\Delta y|$$

$$= \left| \frac{2}{3} x_0, y_0 \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{1}{3} x_0^2 \right| \cdot |\Delta y| = \dots = 17,5 \rightarrow V = 750 \pm 17,5$$

### 12.5. Die Kettenregel:

#### A. Kettenregel mit einem Parameter:

- Gegeben:
- Funktion  $z = f(x_1, \dots, x_n)$
  - Variablen  $x_i$  hängen vom Parameter  $t \in \mathbb{R}$  ab:  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$
  - dadurch entsteht eine zusammengesetzte (verkettete) Funktion  $F(t)$
- $z = F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  kurz:  $z = F(t) = f(x(t))$  mit  $x(t) := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$

Frage:  $\frac{dz}{dt} = F'(t) = ?$

Übliche Schreibweisen sind:  $\dot{F}(t) = \frac{dF}{dt}(t) = F'(t)$  analog:  $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}(t) = x_i'(t)$

#### **Satz 12.11.:** (einfache Kettenregel)

Voraussetzung:

- $f(x_1, \dots, x_n)$  hat stetig erste partielle Ableitungen
- es existieren die Ableitungen  $\dot{x}_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n$

Behauptung: für die Funktion  $z = F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  gilt für  $x = x(t)$

$\frac{dz}{dt} = \dot{F}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \dot{x}_i(t) = f_{x_1}(x) \cdot \dot{x}_1(t) + \dots + f_{x_n}(x) \cdot \dot{x}_n(t)$	<b>Formel 12.7</b>
äußere Ableitung      innere Ableitung	

Zum Beweis: wir zeigen (12.7) für  $t = t_0$

$F(t) - F(t_0) = f(x(t)) - f(x(t_0)) \leftarrow f$  ist vollständig differenzierbar in  $x_0 = x(t_0)$

$= \text{grad } f(x(t_0))^T \cdot [x(t) - x(t_0)] + r(x(t))$

$$\rightarrow \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (x(t_0)) \cdot \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0} + \frac{r(x(t))}{\|x(t) - x(t_0)\|} \cdot \frac{\|x(t) - x(t_0)\|}{t - t_0}$$

für  $t \rightarrow t_0$ :  $\dot{F}(t) \rightarrow x_i(t_0) \rightarrow 0 \rightarrow \pm \|\dot{x}_i(t_0)\|$  für  $t \rightarrow t_{0\pm}$

Beispiel:  $z = F(t) := f(x(t), y(t))$  wobei  $f(x, y) = \sin(3x + 2y)$  und  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^{1/2}$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \dot{F}(t) = f_x(x, y) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x, y) \cdot \dot{y}(t) = 3 \cdot \cos(3x + 2y) \cdot 2t + 2 \cdot \cos(3x + 2y) \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

nah Einsetzen für  $x(t)$  und  $y(t) \rightarrow \dot{F}(t) = \cos(3t^2 + 2t^{\frac{1}{2}}) \cdot \{6t + t^{-\frac{1}{2}}\}$

#### B. Kettenregel mit mehreren Parametern:

• Jetzt hängen die Variablen  $x_i$  von  $k$  Parametern  $t_1, \dots, t_k$  ab:

$x_i = x_i(t_1, \dots, t_k) = x_i(t)$  mit Parameter-Vektor  $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in \mathbb{R}^k$

• Die verkettete Funktion ist dann  $z = F(t_1, \dots, t_k) := f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$

kurz:  $z = F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  für  $t \in \mathbb{R}^k$

**Satz 12.12.: (allgemeine Kettenregel)**

Voraussetzung: - erste partielle Ableitung von  $x_i(t_1, \dots, t_k)$  sind stetig im Punkt  $t = (t_1, \dots, t_k)^T$   
 - erste partielle Ableitung von  $x_i(t_1, \dots, t_k)$  sind stetig im Punkt  $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$

Behauptung: für die Funktion  $z = F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t) \quad \forall j = 1, \dots, k \quad \text{Formel 12.8}$$

Beispiel: - Transformation zwischen Polarkoord.  $(r, \varphi)$  und kartesisches Koord.  $(x, y)$

$$x = x(r, \varphi) = r \cdot \cos \varphi \quad y = y(r, \varphi) = r \cdot \sin \varphi$$

- aus einer gegebenen Funktion  $z = f(x, y)$  entsteht die Funktion

$$z = F(r, \varphi) := f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = f(x_1(t), x_2(t)) \quad \text{mit } t = (r, \varphi)^T$$

- nach 12.7 gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = f_x \cdot \cos \varphi + f_y \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = f_x \cdot (-r) \cdot \sin \varphi + f_y \cdot r \cdot \cos \varphi$$

12.6. Richtungsableitung und Bedeutung des Gradienten:

Definition 12.13.: Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in D$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Unter der „Richtungsableitung von f an der Stelle a in Richtung v“ versteht man den Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \quad \text{Formel 12.9}$$

Im Fall  $\|v\| = 1$  ist  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  der „Anstieg von f an der Stelle a in Richtung v“

Veranschaulichung für n = 2:

$x(t) = a + t \cdot v$  Punkt auf der Geraden durch a in Richtung v

$$F(t) := f(x(t)) = f(a + t \cdot v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = \left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=0} = \dot{F}(0)$$

Berechnungsformel für  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ :

Nach der Kettenregel für  $z = F(t) = f(x(t))$  mit  $x_i(t) = a_i + t \cdot v_i \quad i = 1, \dots,$

$$\dot{F}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t) \quad \text{für } t = 0 \text{ mit } x_i(0) = a \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i = \text{grad } f(a)^T \cdot v$$

Spezialfall  $v = e^{(i)}$  i-ter Einheitsvektor  $e^{(i)} = (0 \dots 1 \dots 0)^T \rightarrow \frac{\partial f}{\partial e^{(i)}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  Formel 12.10

Richtung des stärksten Anstiegs von f:

Richtungsableitung in Richtung r	Part. Ableitung nach $x_i$
----------------------------------	----------------------------

Frage: Für welche Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$  wird der Anstieg  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \text{grad } f(a)^T \cdot v$

maximal? Nutze Formel:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\angle(a, b))$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \|\text{grad } f(a)\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\angle(\text{grad } f(a), v))$$

konst.  $\forall v$  = 1 wird max. 1 für  $\angle = 0 \rightarrow$  dass heißt  $v_{\max} = \lambda \cdot \text{grad } f(a)$  mit  $\lambda > 0$

**Antwort:** Im Fall  $\text{grad } f(a) \neq 0$  gilt:

Der Anstieg  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  wird maximal für  $v = v_{\max}$  mit

$$v_{\max} = \frac{1}{\|\text{grad } f(a)\|} \cdot \text{grad } f(a) \quad (\text{Beachte: } \|v_{\max}\| = 1)$$

der maximale Anstieg von  $f$  im Punkt  $a$  ist  $\frac{\partial f}{\partial v_{\max}}(a) = \|\text{grad } f(a)\|$

$\rightarrow$  Der Gradient  $\text{grad } f(a)$  zeigt in Richtung des stärksten Anstieges der Funktion  $f$  im Punkt  $a$ .

### 12.7. Die Taylor-Entwicklung

#### **Satz 12.14.:** (Taylor'sche Satz)

**Voraussetzung:**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^T \in D$  Entwicklungspunkt

- Verbindungsstrecke  $x_0x \subset D$

-  $f$  ist  $(N + 1)$  stetig partiell differenzierbar

**Behauptung:** es gilt die Entwicklung von  $f(x)$  in ein Taylor-Polynom vom Grad  $N$  mit

$$\text{Entwicklungspunkt } x_0: \quad f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^k \cdot f(x_0) + R_N(x) \quad \text{Formel 12.11}$$

**Rest**

Wobei:  $0! = 1$  und  $[...]^0 = 1$

$$\text{Mit } R_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^{N+1} \cdot f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \quad \text{mit } \vartheta \in (0, 1)$$

$\xi$  Zwischenpunkt auf  $x_0x$

**Der Fall  $n = 2$ : Taylor-Entwicklung von  $f(x, y)$ :**

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left[ (x - x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) + R_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} s_k + R_N$$

Aussehen der Summanden  $s_k$ :

$$s_0 = [\dots]^0 f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$s_1 = \left[ (x - x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]^1 f(x_0, y_0) = (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$s_2 = \left[ (x - x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0, y_0)$$

$$= \left[ (x - x_0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f(x_0, y_0)$$

$$= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2$$

für höhere  $k \geq 3$  nutzt man die Binomische Formel:  $(a + b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} \cdot b^j$

$$s_k = \left[ (x - x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^{k-j} \cdot (y - y_0)^j$$

$$\rightarrow s_3 = \frac{f_{xxx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \cdot (y - y_0) + 3f_{xyy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0)^2 + f_{yyy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^3}{6}$$

am Ende ist:  $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} s_1 + \frac{1}{2!} s_2 + \frac{1}{3!} s_3 + \dots + \frac{1}{N!} s_N + R_N(x, y)$

Taylor-Entwicklung bis zum Grad 2 für beliebige Variable:

- $f(x) = T_N(x) + R_N(x)$
- $T_1(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left[ \sum_{i=0}^k (x_i - x_{i0}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot f(x_0) = f(x_0) + \sum_{i=0}^k f_{x_i}(x_0) \cdot (x_i - x_{i0})$
- $T_1(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0)^T \cdot (x - x_0)$  // 0. Ordnung Linearisierung von f im Punkt  $x_0$
- $R_1(x) = \frac{1}{2!} \left[ \sum_{i,j=0}^k (x_i - x_{i0}) \cdot (x_j - x_{j0}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] \cdot f(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^k f_{x_i x_j}(\xi) \cdot (x_i - x_{i0}) \cdot (x_j - x_{j0})$

Definition 12.15.: Die  $n \times n$  Matrix der 2. partiellen Ableitung

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} | & & | \\ - & f_{x_i x_j} & - \\ | & & | \\ \text{Spalte } j & & \text{Zeile } i \end{pmatrix} \text{ heißt „Hess-Matrix“ von } f \text{ im Punkt } x$$

- für Matrix  $H = (H_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und Vektor  $v = v_i \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$v^T \cdot H \cdot v = \sum_{i,j=1}^n H_{ij} \cdot v_i \cdot v_j = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\xi) \cdot (x_i - x_{i0}) \cdot (x_j - x_{j0}) = (x - x_0)^T \cdot H_f(\xi) \cdot (x - x_0)$$

$$\rightarrow f(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0)^T \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^T \cdot H(\xi) \cdot (x - x_0)$$

**Formel 12.12**

wichtig für Extremwerttheorie

- für  $T_2(x)$  erhält man analog  $T_2(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0)^T \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^T \cdot H(x_0) \cdot (x - x_0)$

### 12.8. Lokale Extremwerte:

Definition 12.16.: Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, hat an der Stelle  $x_0 \in D$  ein

lokales Maximum, wenn  $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U_r(x_0) \subset D$

lokales Minimum, wenn  $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U_r(x_0) \subset D$

wobei  $U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $x_0$  ist  $x_0$  heißt „lokale Extremstelle“ und  $f(x_0)$  heißt „lokaler Extremwert“.

### Satz 12.17.: (notwendige Bedingung für lokale Extremstellen)

Voraussetzung:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig partiell differenzierbar in  $U_r(x_0) \subset D$

<u>Behauptung:</u> $X_0$ ist lokale Extremstelle von $f$	→	$\text{grad } f(x_0) = \vec{0}$ , das heißt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall x_i = 0, 1, \dots, n$
--	---	---

Beweisidee: betrachte  $F(t) := f(x_0 + t \cdot e^{(k)}) \rightarrow F(0) = f(x_0) \geq f(x_0 + t \cdot e^{(k)}) = F(t) \quad \forall t \in (-r, r)$   
 Dass heißt  $F(t)$  hat bei  $t_0 = 0$  lokales Maximum  $\rightarrow F'(0) = 0$

$$F'(0) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot e_i^k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

$\rightarrow$  ein Gleichungssystem für eine extremwertverdächtige Stelle (stationärer Punkt) ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f_{x_i}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Bezeichnung: ein Punkt  $x_0$  mit  $\boxed{\text{grad } f(x_0) = \vec{0}}$  heißt „stationärer Punkt von f“

Ein stationärer Punkt  $x_0$ , der **keine** lokale Extremstelle von  $f$  ist, heißt „Sattelpunkt von f“

**Satz 12.18.: (hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte)**

- Voraussetzung:
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal stetig partiell differenzierbar in  $U_r(x_0) \subset D$
  - sei  $H_f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Hess-Matrix von  $f$  in  $x_0$
  - $x_0$  sei stationärer Punkt von  $f$  (dass heißt  $\text{grad } f(x_0) = \vec{0}$ )

- Behauptung:
- (a)  $H_f(x_0)$  positiv definit  $\rightarrow x_0$  ist lokale Maximalstelle von  $f$
  - (b)  $H_f(x_0)$  negativ definit  $\rightarrow x_0$  ist lokale Minimalstelle von  $f$
  - (c)  $H_f(x_0)$  indefinit  $\rightarrow x_0$  ist ein Sattelpunkt (und keine Extremstelle)

Bemerkung: Matrix  $H_f(x_0)$  ist symmetrisch ( $H_{ij} = f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0) = H_{ji}$ )

$\rightarrow$  alle EW  $H_f(x_0)$  reell

Determinanten-Kriterium für Definitheit einer Symmetrischen Matrix  $H = H_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- sei  $H^{(k)} = \begin{pmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k,1} & \dots & H_{k,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  die k-te Hauptmatrix

**Formel 12.13**

- dann gilt: 

$H$ positiv definit genau dann wenn, $\det(H^{(k)}) > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$ $H$ negativ definit genau dann wenn, $(-1)^k \det(H^{(k)}) < 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$
---
- wenn  $\det(H) \neq 0$  (dass heißt  $\lambda = 0$  ist **kein** EW), dann gibt es nur die 3 Fälle
  - (a)  $H$  positiv definit (alle EW  $> 0$ )
  - (b)  $H$  negativ definit (alle EW  $< 0$ )
  - (c)  $H$  indefinit ( $\exists$  EW  $> 0$  und EW  $< 0$ )

Beweis zu (a) von Satz 12.18.:

- Taylor-Formel (12.11) liefert:  $f(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0)^T \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^T \cdot H(\xi) \cdot (x - x_0)$
- Nach Voraussetzung: ist  $H_f(x_0)$  positiv definit  $\rightarrow \det(H_f^{(k)}(x_0)) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

$\rightarrow \exists r > 0$  hinreichend klein, so dass  $\det(H_f^{(k)}(\xi)) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad \forall \xi \in U_r(x_0)$

$\rightarrow H_f(\xi)$  positiv definit  $\rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^T \cdot H(\xi) \cdot (x - x_0)$

Spezialfall  $n = 2$ : lokale Extremwerte von  $f(x, y)$ :

- Sei  $(x_0, y_0)$  stationärer Punkt von  $f$ , dass heißt  $f_x(x_0, y_0) = 0$   
 $f_y(x_0, y_0) = 0 \rightarrow \text{GLS}$
- und  $H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

- dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(H_0) < 0 &\rightarrow (x_0, y_0) \text{ Sattelpunkt (keine Extremstelle)} \\ \det(H_0) > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 &\rightarrow (x_0, y_0) \text{ lokale Minimalstelle} \\ \det(H_0) > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 &\rightarrow (x_0, y_0) \text{ lokale Maximalstelle} \end{aligned}$$

**Beachte:** im Fall  $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$  müssen Extra-Untersuchungen angestellt werden.

Beispiel:  $f(x, y) = y^2 \cdot (x - 1) + x^2 \cdot (x + 1)$  gesucht: alle Extremwerte

$$\begin{aligned} \text{GLS für } (x_0, y_0): \quad f_x &= y^2 + 3x^2 + 2x = 0 \\ f_y &= 2y \cdot (x - 1) = 0 \end{aligned}$$

1. Fall:  $y = 0$

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{indefinit} = \text{Sattelpunkt}$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \text{negativ definit} \rightarrow \text{in } \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \text{ lok. Max.}$$

2. Fall :  $x = 1 \rightarrow$  keine reelle Lösung