Prof. Dr. Norbert Gaffke
Dr. Naji Qatanani
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik

30. Januar 2003

Übungsschein-Klausur Mathematik I für Ingenieure

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, für die jeweils eine maximale Anzahl von Punkten erreichbar ist (3 oder 4 Punkte). Insgesamt sind maximal 22 Punkte erreichbar. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **insgesamt mindestens 10 Punkte** erreicht haben.
- Die Lösung einer Aufgabe bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen und einen klar erkennbaren Lösungsweg.
- Die Ergebnisse der Klausur werden ab dem 17. 02. 2003 durch Aushang im Institut für Mathematische Stochastik (Gebäude 18) bekanntgegeben; Einsichtnahmen finden am 21. 02. 2003 von 14.00 - 15.00 Uhr und am 31. 03. 2003 von 17.00 bis 18.00 Uhr im Gebäude 18, Raum 401 statt. Eine Wiederholungsklausur ist für den 04 .04. 2003, nachmittags, geplant.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei M die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$M = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, |\boldsymbol{x}| < 1 \,\} \,.$$

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n \,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{1 - |\boldsymbol{x}|} \,.$$

Besitzt f eine Umkehrabbildung?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Seien $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$ und $\boldsymbol{b} = (-1, -1, 2)$.
Bilden die drei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ eine Vektorbasis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die drei harmonischen Schwingungen

$$s_1(t) = \cos(\omega t) \,, \quad s_2(t) = \cos(\omega t + \tfrac{2\pi}{3}) \,, \quad s_3(t) = \cos(\omega t + \tfrac{4\pi}{3})$$

überlagern sich:

$$s(t) \;=\; s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) \,, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(Dabei ist $\omega > 0$ eine Konstante).
Berechnen Sie die Amplitude der resultierenden Schwingung $s(t)$, (numerische Rechnungen mit dem Taschenrechner genügen nicht).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,, \quad \text{wobei } f(x) = \frac{3x^2 - 7\sqrt{x}}{4x - 2\sqrt{x}}\,,\ x \in \left]0, \tfrac{1}{4}\right[\,;$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)\,, \quad \text{wobei } g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}}\,,\ x \in \left]\sqrt{3}, \infty\right[\,.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\, r\cos(\omega t)\,,\, r\sin(\omega t)\,)$, mit Konstanten $r > 0$ und $\omega > 0$.
Finden Sie Formeln für

$$|\, f'(t)\,|\,, \quad |\, f''(t)\,| \quad \text{und} \quad f(t)\cdot f'(t)\,.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

(a) Finden Sie eine Formel für den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{1 + |\boldsymbol{x}|^2}\,.$$

(b) Finden Sie Formeln für die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}\,,$$

(wobei $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ ein gegebener Vektor ist).

Prof. Dr. Norbert Gaffke
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik

04. April 2003

Übungsschein-Klausur (Wiederholung) Mathematik I für Ingenieure

---

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, für die jeweils eine maximale Anzahl von Punkten erreichbar ist (3 oder 4 Punkte). Insgesamt sind maximal 20 Punkte erreichbar. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **insgesamt mindestens 9 Punkte** erreicht haben.
- Die Lösung einer Aufgabe bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen und einen klar erkennbaren Lösungsweg.
- Die Ergebnisse der Klausur werden ab dem 23. 04. 2003 durch Aushang im Institut für Mathematische Stochastik (Gebäude 18) sowie im Internet* bekannt gegeben; eine Einsichtnahme findet am 25. 04. 2003 von 15.00 - 16.00 Uhr im Gebäude 18, Raum 401 statt.

  * www.math.uni-magdeburg.de/institute/imst/ag_gaffke

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, und $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \,,$$

bijektiv?

Beachten Sie: Diese Frage ist für beliebige Dimension n zu klären.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Bestätigen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \,, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Ist die folgende Formel korrekt?

$$4 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) = \sin(3\varphi) + \sin(\varphi) \,, \quad (\text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Die komplexen Darstellungen der Kosinus- und Sinusfunktion:
$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, $\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden vier Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}^{(1)} = (1,1,0,0)\,, \quad \boldsymbol{a}^{(2)} = (0,1,1,0)\,, \quad \boldsymbol{a}^{(3)} = (0,0,1,1)\,, \quad \boldsymbol{a}^{(4)} = (1,0,0,1)\,.$$

Bilden $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(3)}, \boldsymbol{a}^{(4)}$ eine Vektorbasis von $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\,r\cos(\omega t)\,,\, r\sin(\omega t)\,,\, 0\,)$, mit Konstanten $r > 0$ und $\omega > 0$.
Finden Sie Formeln für

$$f(t) \times f'(t) \quad \text{und} \quad |\,f(t) \times f'(t)\,|\,.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $\alpha > 0$ gegeben, und betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}\,|^{\alpha}}\,.$$

Welche der beiden folgenden Formeln sind korrekt?

(a) $\quad \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\alpha}{|\,\boldsymbol{x}\,|^{\alpha+2}}\,\boldsymbol{x}\,,$

(b) $\quad |\,\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x})\,| = \dfrac{\alpha}{|\,\boldsymbol{x}\,|^{\alpha+1}}\,.$