

Übungsschein-Klausur Mathematik II für Ingenieure

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, für die jeweils eine maximale Anzahl von Punkten erreichbar ist (3 oder 4 Punkte). Insgesamt sind maximal 21 Punkte erreichbar. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **insgesamt mindestens 9 Punkte** erreicht haben.
- Die Lösung einer Aufgabe bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen und einen klar erkennbaren Lösungsweg.
- Die Ergebnisse der Klausur werden ab dem 02. 07. 2003 durch Aushang im Institut für Mathematische Stochastik (Gebäude 18) sowie im Internet* bekannt gegeben; eine Einsichtnahme findet am 03. 07. 2003 von 17.00 - 18.00 Uhr im Gebäude 18, Raum 401 statt. Eine Wiederholungsklausur ist für den 17. 10. 2003 (späterer Nachmittag) geplant.

* www.math.uni-magdeburg.de/institute/imst/ag-gaffke

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Ermitteln Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion von

$$f(x) = x^2 \sin(x), \quad (x \in \mathbb{R}),$$

und machen Sie anschließend "die Probe" durch Ableiten.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Prof. G. erkennt: Eine Stammfunktion von $f(t) = 1/t^2$ ist $F(t) = -1/t$;
nun berechnet er:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=-1}^{t=1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -2.$$

Jetzt ist Prof. G. verwirrt: Ein bestimmtes Integral der positiven Funktion $1/t^2$ ist negativ!
Entweder hat er soeben ein Paradoxon der Integralrechnung entdeckt oder seine Rechnung ist fehlerhaft. Klären Sie dies.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Teilmenge von \mathbb{R}^3 :

$$B = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq \exp[-(x_1 + x_2)] \right\}.$$

Berechnen Sie $\text{vol}_3(B)$, (das Volumen von B).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (2x_1x_2 - 2x_3, x_1^2 + 2x_2x_3, x_2^2 - 2x_1), \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)),$$

und die parametrisierte Kurve:

$$\mathbf{k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{k}(t) = t\mathbf{a},$$

wobei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ein gegebener Punkt in \mathbb{R}^3 sei.

Überprüfen Sie die folgende Formel für das Kurvenintegral zweiter Art:

$$\int_{\mathbf{k}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{k} = a_1^2 a_2 - 2a_1 a_3 + a_2^2 a_3.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Betrachten Sie für gegebene Konstanten $r > 0$ und $c > 0$ die parametrisierte Fläche in \mathbb{R}^3 :

$$\sigma(u, \varphi) = (u \cos(\varphi), u \sin(\varphi), cu), \quad 0 \leq u \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Leiten Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt $S(\sigma)$ her.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Betrachten Sie die 2×4 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Sind diese beiden Matrizen symmetrisch?
