Übungsschein-Klausur Mathematik I und II für Elektrotechniker

1. Zur komplexen Zahl

$$z = \frac{(1-2i)^2 - 3i}{(1-i)(1+2i)}$$

berechne man $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ sowie die Polardarstellung von z. Die entsprechenden Resultate gebe man mit einer Genauigkeit von drei Stellen nach dem Komma an (ohne Rundung !).

(6 Punkte)

2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ -4 & -4 & -2 \\ -10 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

   a) Man ermittle alle Eigenwerte der Matrix A.

   b) Zum größten Eigenwert der Matrix A bestimme man den zugehörigen Eigenvektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, für den gilt $x_3 = 1$.

(8 Punkte)

3. Mit Hilfe des Quotientenkriteriums bestimme man, für welche reellen Zahlen x die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2+3}{2k-5} \left(\frac{x}{7}\right)^k$$

konvergiert und für welche sie divergiert.

(5 Punkte)

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Man bestimme die Bereiche, in denen $f(x)$ streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend ist. Man ermittle alle stationären Punkte von $f(x)$ und untersuche für jeden dieser Punkte, ob es sich dabei um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von $f(x)$ handelt.

(7 Punkte)

5. Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{8x^2 - 12x + 12}{(x-1)(x^2-2x+2)}\, dx\,.$$

(6 Punkte)

6. Man ermittle die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{2y(x)-1}}{1-3x}\right)^2, \qquad y(0) = 0\,.$$

(6 Punkte)

7. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3x^2 e^{-x}\,.$$

(7 Punkte)

8. Gegeben sei die periodische Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) := x^2 \qquad \text{für} \quad x \in [-1, 1)$$

und der Periode T=2. Man skizziere diese Funktion im Intervall $[-3, 3)$ und berechne ihre Fourier-Reihe.

(7 Punkte)