Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 18.07.2005
Institut für Analysis und Numerik
PD Dr. B. Rummler, Dr. U. Risch

Klausur[1] **Mathematik III**

Hinweis: Namen und Matr.-Nr. nicht vergessen! Alle Antworten sind zu begründen!

1. Berechnen Sie das Volumen $|B|$ des Körpers im $\mathbb{E}^3$, welcher von den 6 Ebenen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 & \qquad x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 & \qquad x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \quad \textit{und} & \qquad -x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

begrenzt wird. *Hinweis: Nutzen Sie dabei die Ebenengleichungen als Formeln der Koordinatentransformation.*

(5 Punkte)

2. Gegeben Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ des Randwert-Problems der Poissonschen Gleichung in $G := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 | 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$:

$$-\triangle u(\underline{x}) = sin(x_1) \cdot sin(3 \cdot x_2) \quad ,$$

welche auf dem Rand von $G : \partial G$ der Randbedingung: $u(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial G$ genügt, in der Gestalt einer Fourier-Reihe:

$$(*) \quad u(\underline{x}) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{j,k} sin(j \cdot x_1) sin(k \cdot x_2)$$

an. Begründen Sie, warum jede absolut und gleichmäßig konvergente Lösung $u(\underline{x})$ der Gestalt $(*)$ der(den) vorgegebenen Randbedingung(en) genügt.

(5 Punkte)

3. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\underline{v} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ bei:

$$\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 \cdot (x_3)^2 \\ 2 \cdot (x_1)^2 \cdot x_2 \\ 2 \cdot (x_2)^2 \cdot x_3 \end{bmatrix}$$

durch die Fläche ∂B als Oberflächenintegral 2. Art:

$$\oint_{\partial B} \underline{v}^T \underline{n}_{\mathcal{O}} \, d\mathcal{O} = ?$$

Hierbei sei $\mathcal{O} = \partial B$ die Mantelfläche im $\mathbb{E}^3$ der Kugel im $\mathbb{E}^3$ mit dem Radius $R = 1$ um den Koordinatenursprung!
Können Sie hier den Gaußschen Integralsatz anwenden?

(6 Punkte)

4. Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art entlang der Verbindungsstrecke $\mathcal{C}$ der Punkte $P_1 \cong [0,0,0]^T$ und $P_2 \cong [1,4,1]^T$:

$$\int_{\mathcal{C}} x_1^2 dx_1 + 3x_3 dx_2 - x_1 x_2 dx_3 \quad = ?$$

(4 Punkte)

FORTSETZUNG AUF DER RÜCKSEITE !!!

[1] Kein Original, leider nur abgeTEXt.

5. Berechnen Sie

(a) den Gradienten $grad\ f$ der Funktion $f : \mathbb{E}^1 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ bei $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$

(b) die Rotation $rot\ \underline{g}$ der vektorwertigen Funktion $\underline{g} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ bei:

$$\underline{g}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ cos(x_1) \\ cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

(c) und das Integral

$$\int_B [rot\ \underline{g}]^T \cdot grad\ f\ dB = ?\ ,$$

mit $B := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^3 | 0 \leq x_1 \leq \pi,\ 0 \leq x_2 \leq \pi,\ 0 \leq x_3 \leq \pi\}$.

(5 Punkte)