Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Dr. U. Risch

13.02.2008

Klausur **Mathematik III**

Hinweis: Namen und Matr.-Nr. nicht vergessen! Alle Antworten sind zu begründen!

1. Bestimmen Sie (3 Punkte)

   (a) den Gradienten *grad* f der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bei
   $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$,

   (b) die Rotation *rot* $\underline{g}$ und die Divergenz *div* $\underline{g}$ der vektorwertigen Funktion
   $\underline{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bei

$$\underline{g}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} .$$

2. Das Vektorfeld $\underline{v}$ sei gegeben durch (6 Punkte)

$$\underline{v}(\underline{x}) := [3(x_1^2 - x_2^2) + 6x_1 x_3, -6x_1 x_2, 3(x_1^2 - x_3^2)]^T, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{x}$$

   längs der Verbindungsstrecke γ von $P_1(0,0,0)$ zu $P_2(1,2,3)$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\underline{v}$ ein Potentialfeld ist (d.h., dass zu $\underline{v}$ ein Potential U existiert).

   (c) Berechnen Sie ein Potential U zu $\underline{v}$.

3. Die Fläche S und das Vektorfeld $\underline{v}$ seien gegeben als (6 Punkte)

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\},$$
$$\underline{v} = [2x_3 \, , \, x_1 + x_2 \, , \, 0]^T .$$

   (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von S an.

   (b) Berechnen Sie den Fluß $\int_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, do$ des Vektorfeldes $\underline{v}$ durch die Fläche S (zu der Seite hin, die den Nullpunkt nicht enthält).

4. Der Körper B sei der Kreiszylinder (6 Punkte)

$$B := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \ \ 0 \leq x_3 \leq 3\} .$$

   Berechnen Sie das Volumenintegral

$$I = \int_B \left(x_2^2 + 2 + e^{2x_3}\right) dB .$$

5. Lösen Sie das Anfangs-Rand-Wert-Problem für $u : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$: (7 Punkte)

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - 4 \cdot u_{xx}(t,x) &= 0 && \forall\, (t,x) \in (0,\infty) \times (0, 2\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0 && \forall\, t \in [0, \infty) \\ u(0,x) &= \sin(2x) + 2\sin(3x) && \forall\, x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

RB I: $u(t,0) = 0$
RB II: $u(t,2\pi) = 0$