13. Differentialrechnung vektorwertiger Funktionen:

13.1. vektorwertige Funktionen:

- Definitionsbereich sei die Menge : $D \subset \mathbb{R}^n$
- Bei skalaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
  $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D \rightarrow f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$
  Bemerkung: Der Funktionswert ist eine Zahle (skalar)
- Bei vektorwertigen Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$
  $$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D \rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1,...,x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$
  Bemerkung: Der Funktionswert ist Vektor aus $\mathbb{R}^k$
- Die skalare Funktionen $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, i = 1,...,k, heißen Komponentenfunktionen von $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$
- Schreibweisen in der Literatur: $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\underline{f}(\underline{x})$, $\vec{f}(\vec{x})$

Beispiel: Gravitatiosnfeld

f(x) = Gravitationskraft im Punkt x

nach NEWTON gilt: $c := \gamma \cdot m \cdot M$

$$f(x) = \frac{-c}{\|x\|^3} x = \frac{-c}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; f : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } D = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$$

i-te Komponentenfunktion: $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{-c \cdot x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$

13.2. Differenzierbarkeit und Jacobi-Matrix:

Definition 13.1.: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt im Punkt $x_0 \in D$

- stetig
- r-mal stetig partiell differenzierbar (kurz: C^r-Funktion)
- vollständig differenzierbar

Wenn die enstprechende Eigenschaft für alle Komponentenfunktionen f_i von f gilt.

- Die partielle Ableitung von f im Punkt x_0 ist der Vektor
  $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \; j = 1,...,n$$
- Die „*Jacobi-Matrix*“ (oder Funktionsmatrix) von f in Punkt $x_0 \in D$ ist die $k \times n$ Matrix.
  $$J_f(x, y, z)(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Spalten von } J_f} = \underbrace{\begin{pmatrix} grad\, f_1(x_0)^T \\ \vdots \\ grad\, f_k(x_0)^T \end{pmatrix}}_{\text{Zeilen von } J_f} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Spalte j}} \text{Zeile i}$$
- Andere Schreibweisen in der Literatur: $J_f(x_0) = D\, f(x_0) = f'(x_0)$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \cdot z^3 \\ z^2 \cdot \sin x + y \end{pmatrix}$

© Torben Nentwig 31.01.´06

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x\cdot y\cdot z^3 & x^2\cdot z^3 & 3x^2\cdot y\cdot z^2 \\ 2z\cdot\cos x & 2y & 2z\cdot\sin x \end{pmatrix}$$

<u>Linearisierung von f : D → $\mathbb{R}^k$ im Punkt $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$</u>

<u>Voraussetzung:</u> sei f : D → $\mathbb{R}^k$ vollständig differenzierbar in $x_0 \in D$

⇔ f_i : D → R vollständig differenzierbar in x_0 $\forall i = 1,...,k$

$f_i(x) = f_i(x_0) + \text{grad } f_i(x_0)^T \cdot (x - x_0) + r_i(x)$

$$\text{wobei } \lim_{x\to x_0} \frac{r_i(x)}{\|x - x_0\|} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_k(x_0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots grad\, f_1(x_0)^T \cdots \\ \vdots \\ \cdots grad\, f_k(x_0)^T \cdots \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}(x-x_0)} + \begin{pmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_k(x) \end{pmatrix}$$

⇔ $\boxed{f(x) = f(x_0) + J_f(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x)}$ *//=l(x) Linearisierung von f im Punkt x_0*

$$\text{wobei } \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Formel 13.1

<u>Zusammenfassung:</u>

- F vollständig differenzierbar in x_0 genau dann wenn die Linearisierung gilt (13.1)
- Sind alle f stetig partiell differenzierbar in x_0 → es gilt 13.1

<u>Anwendung der Linearisierung beim NEWTON-Verfahren:</u>

Ziel: finde eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1,...,x_n) = 0 \end{pmatrix}$, f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Gegeben: Näherungslösung $x^{old} \in \mathbb{R}^n$ für die Lösung von f(x) = 0

Gesucht: Verbesserte Näherung $x^{new} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^{new}) \approx 0$

<u>Idee:</u> Linearisierung von $f(x^{new}) = f(x^{old}) + J_f(x^{old}) \cdot (x^{new} - x^{old}) + r(x^{new}) \approx 0$

bestimme x^{new} so, dass $l(x^{new}) = f(x^{old}) + J_f(x^{old}) \cdot (\underbrace{x^{new} - x^{old}}_{:= v}) = 0$

dass heißt:

1. Löse das lineare GLS; $J_f(x^{old}) \cdot v = -f(x^{old})$
2. update: $x^{new} = x^{old} + v$
3. Abbruchtest x^{new} = ok Ja → Stopp
   Nein → go to 1.

<u>13.3. Divergenz und Rotation von Vektorfeldern:</u>

- Ein „*<u>n-dimensionales Vektorfeld V</u>*“ ist eine Funktion
  V : D → $\mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ (also k = n)
  Beispiel: Geschwindigkeit einer Strömung

<u>Definition 13.2.:</u>

- „*<u>die Divergenz div v</u>*“ des Vektorfeldes v : D → $\mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ist das Skalarfeld div v : D → $\mathbb{R}^n$ mit div v(x) := ∇ · v(x) = $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$

- „*Die Rotation rot v*“ des Vektorfeldes v : D → $\mathbb{R}^3$, D ⊂ $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld rot v : D → $\mathbb{R}^3$ mit rot v := ∇ × v(x) = $\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & v_1(x) \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & v_2(x) \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & v_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$

© Torben Nentwig 31.01.´06

14. Kurvenintegrale (KI):

14.1. Kurven im $\mathbb{R}^n$:

Definition 14.1.: Eine „*Kurve C im $\mathbb{R}^n$*“ ist eine Punktmenge
C := { $\vec{x} \in \mathbb{R}$: $\vec{x} = \vec{\gamma}(t)$, t = [a, b]} wobei die Parametrisierungsfunktion $\vec{\gamma}$: [a, b] → $\mathbb{R}^n$ mit

$$t \to \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in C,\ t \in [a, b] \text{ stetig ist. t heißt Kurvenparameter}$$

- Unter der Parameterdarstellung von C versteht man die Gleichung $\boxed{\vec{x} = \vec{\gamma}(t),\ t = [a, b]}$
  γ(a) = Anfangspunkt
  γ(b) = Endpunkt
- Für wachsendes t ∈ [a, b] läuft der Punkt $\vec{\gamma}(t)$ von $\vec{\gamma}(a)$ nach $\vec{\gamma}(b)$ und definiert so den Durchlaufsinn

Beispiel 1: C = Kreisbogen mit Mittelpunkt (0, 0)
Von A = (r, 0) nach B = (0, r) wobei r = Radius

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} =: \vec{\gamma},\ t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]}$$

Beispiel 2: C = Graph von y = f(x), x ∈ [a, b]
Idee: Wähle t = x → y = f(x)
Parameterdarstellung: $\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix},\ t \in [a, b]}$

Weitere Begriffe für Kurven:
Definition 14.2.: Zur Funktion $\vec{\gamma}$: [a, b] → $\mathbb{R}^n$ wird die Funktion $\dot{\vec{\gamma}}$: [a, b] → $\mathbb{R}^n$ definiert als

$$\dot{\vec{\gamma}}\ (= \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}, \text{ wobei } \dot{\gamma}_i(t) := \frac{d}{dt}\gamma_i(t) \text{ (t-Ableitung)}$$

Für t = a und t = b sind einseitige Ableitungen zu nehmen. $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ heißt „*Tangentenvektor*“ zu t.

- Es gilt: $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t}$

Bemwerkung: $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ ist Geschwindigkeitsvektor der Bahnbewegung $\vec{\gamma}(t)$, t ∈ [a, b]

- für Beispiel 1: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} \to \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}$
- für Beispiel 2: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \to \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$

Definition 14.3.: Sei C eine Kurve mit Parameterdarstellung $\vec{\gamma}(t)$, t ∈ [a, b].

- C heißt „*geschlossen*“, wenn $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$
- C heißt „*C^1-Kurve*“, wenn $\vec{\gamma}(t)$ stetig differenzierbar auf [a, b]
- C heißt „*glatt* “, wenn C eine C^1-Kurve ist und wenn gilt: $\left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| \neq 0\ \forall t \in [a, b]$

© Torben Nentwig 31.01.´06

Anschaulich: „glatt“ heißt keine Knicke Ecken

glatt: nicht glatt:

Definition 14.4.: Unter der „*zusammengesetzten Kurve*“ $C = C_1 + C_2 + ... + C_m$ versteht man eine Kette von aneinanderhängenden Kurvenstücken
$C_k := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{\gamma}_k(t)$, $t = [a_k, b_k]\}$ $k = 1,..., m$ mit
Endpunkt $C_k = \vec{\gamma}_k(b_k) = \vec{\gamma}_{k+1}(a_{k+1})$ = Anfangspunkt C_{k+1}

Definition 14.5.: Eine Kurve C heißt „*stückweise C^1-Kurve*“, wenn sie aus endliche vielen C^1-Kurvenstücken C_k, $k = 1,..., m$ zusammengesetzt ist, dass heißt $C = C_1 + C_2 + ... + C_m$

14.2. Das skalare Kurvenintegral (KI 1. Art)

Definition 14.6.: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine skalare Funktion, die stetig auf D ist und C eine Kurve in D

- Falls C eine C^1-Kurve mit Parametrisierungsfunktion $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so ist das „*skalare Kurvenintegral von f über C*“ definiert als:

$$\boxed{\int_C f(\vec{x})ds = \int_b^a f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt} \qquad \textbf{Formel 14.1}$$

- Falls $C = C_1 + C_2 + ... + C_m$ zusammengesetzte stückweise C^1-Kurve, so ist

$$\boxed{\int_C f(\vec{x})ds := \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(\vec{x})ds = \sum_{k=1}^{m} \int_b^a f(\vec{\gamma}_k(t)) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}_k(t)\right\| dt} \qquad \textbf{Formel 14.2}$$

Bemerkung: (1) bei Berechnung des KI ersetze in $f(\vec{x})$ jede Komponente x_i von $\vec{x}$ durch $\vec{\gamma}_i(t)$, dass heißt $f(\vec{\gamma}(t)) = f(\vec{\gamma}_1(t), \vec{\gamma}_2(t),..., \vec{\gamma}_n(t))$

(2) $\left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| = \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2 + ... + [\gamma_n(t)]^2}$ $\quad ds = \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt$ heißt „skalares Bogenelement“

(3) der Wert des KI hängt nicht ab von der Wahl der Parametrisierungsfunktion $\vec{\gamma}(t)$

Beispiel: C = Viertelkreis aus Bsp. 1: $f(x, y) = 2x + 3y$

Aufgabe: berechne das KI I = $\int_C f(x, y)ds$

Parameterdarstellung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} =: \vec{\gamma}(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}$, $\left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| = \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r$
- $f(\vec{\gamma}(t)) = f(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) = 2r \cdot \cos t + 3r \cdot \sin t$

Einsetzen in 14.1 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r \cdot \cos t + 3r \cdot \sin t) \cdot r dt = 2r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) dt + 3r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) dt = 5r^2$

Interpretation des KI als Grenzwert einer Zerlegungssumme:

- Zerlegung Z_k des t-Intervalls [a, b]
  $Z_k = \{t_0, t_1,..., t_k\}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$
  Liefert Polygonzug:

© Torben Nentwig 31.01.´06

<u>Länge der Sehne:</u> $\Delta s_i = \left\|\vec{\gamma}(t_{i+1}) - \vec{\gamma}(t_i)\right\| dt$

<u>Feinheit</u> von Z_k definiert als $\delta(Z_k) := \max \Delta t_i$ $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

Dann gilt: $\boxed{\int_C f(\vec{x}) ds := \lim_{\delta(Z_k) \to 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\vec{x}_i) \cdot \Delta s_i}$ **Formel 14.3**

Beweisidee: Linearisierung von $\vec{\gamma}(t)$ im Punkt $t = t_i$:

$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(t_i) + \vec{\gamma}(t_i) \cdot (t - t_i) + r_i(t) \xrightarrow{t = t+1} \vec{\gamma}(t_{i+1}) - \vec{\gamma}(t_i) = \dot{\gamma}(t_i) \cdot \Delta t_i + r_i(t_{i+1})$

$\rightarrow \Delta s_i = \left\|\vec{\gamma}(t_{i+1}) - \vec{\gamma}(t_i)\right\| = \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t_i)\right\| \cdot \Delta t_i + \varepsilon_i$

$\rightarrow \sum_i f(x_i) \cdot \Delta s_i = \sum_i f(x_i) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t_i)\right\| \cdot \Delta t_i + \sum_i f(x_i) \cdot \varepsilon_i$

für $\delta(Z_k) \rightarrow \int_b^a f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt$

<u>Anwendungen:</u>

1.) <u>Länge L(C) einer Kurve C (Bogenlänge)</u>

$L(C) \approx \sum_i \Delta s_i = \sum_i 1 \cdot \Delta s_i$ Grenzübergang $\delta(Z_k) \rightarrow 0$ liefert exakten Wert

$\boxed{L(C) = \int_C 1 \cdot ds = \int_a^b \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt}$ **Formel 14.4**

2.) <u>Masse eines Drahtes</u>

Gegeben: ortsabhängige Massendichte

$\rho(\vec{x}) = \dfrac{Masse}{Längeneinheit}$

$\rightarrow$ Masse des i-ten Drahtstücks: $m_i \approx \rho(\vec{x}_i) \cdot \Delta s_i$

$\rightarrow$ Gesamtmasse $M \approx \sum_i \rho \cdot (\vec{x}_i) \cdot \Delta s_i \xrightarrow{\delta(Z_k) \to 0} \int_C \rho \cdot (\vec{x}) ds$

$\boxed{M = \int_C \rho \cdot (\vec{x}) ds = \int_b^a \rho \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt}$ **Formel 14.5**

3.) <u>Schwerpunkt eines Drahtes längs der Kurve C</u>

Für die Komponenten $x_{s,j}$ des Schwerpunktes $\vec{x}_s$ gilt:

$x_{s,j} = \frac{1}{M} \int_C x_j \cdot \rho \cdot (\vec{x}) ds = \frac{1}{M} \int_b^a (\vec{\gamma}_j(t)) \cdot \rho \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \left\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right\| dt$ mit $M = \int_C \rho \cdot (\vec{x}) ds$ **Formel 14.6**

<u>14.3. Das vektorielle Kurvenintegral (KI 2. Art)</u>

<u>Definition 14.7.:</u> Sei $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ein stetiges Vektorfeld

- Falls C eine C^1-Kurve mit Parametrisierungsfunktion $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so ist das „*<u>vektorielle KI</u>*“ definiert als:

  $\boxed{\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_b^a \vec{v} \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt}$ $d\vec{x} = \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$ heißt vektorielles Bogenelement **Formel 14.7**

- Falls $C = C_1 + C_2 + ... + C_m$, so $\boxed{\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$ **Formel 14.8**

© Torben Nentwig 31.01.´06

Andere Schreibweisen:

- falls C geschlossene Kurve, so $\oint_C \ldots$ statt $\int_C \ldots$
- mit Hilfe der Komponenten $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ und $d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ schreibt man das KI oft in der

  Form $\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_C v_1(\vec{x}) \cdot dx_1 + \ldots + v_n(\vec{x}) \cdot dx_n$ nach (14.7):

$$\boxed{\int_C v_1(\vec{x}) \cdot dx_1 + \ldots + v_n(\vec{x}) \cdot dx_n = \int_a^b \{v_1 \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}_1(t) + \ldots + v_n \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}_n(t)\} dt}$$ **Formel 14.9**

- oft werden $\vec{x}$ und $d\vec{x}$ indexfrei geschrieben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

$$\boxed{\int_C v_1(x,y) \cdot dx + v_2(x,y) \cdot dy = \int_a^b \{v_1 \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}_1(t) + v_2 \cdot (\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}_2(t)\} dt}$$ **Formel 14.10**

Beispiel: gegeben: Kurve C mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, t ∈ [0, 1]

Gesucht: $KI = \int_C \underbrace{x \cdot y}_{v_1(x,y)}\, dx + \underbrace{(x^2 - 3y)}_{v_2(x,y)} dy$

$v_1(\vec{\gamma}(t)) = v_1(t, t^2) = t \cdot t^2 = t^3$ $\qquad \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

$v_2(\vec{\gamma}(t)) = v_2(t, t^2) = t^2 - 3t^2 = -2t^2$

$\rightarrow I = \int_0^1 \{t^3 \cdot 1 + (-2t^2) \cdot 2t\} dt = \int_0^1 -3t^3 dt = -\frac{3}{4}$

<u>KI 2. Art als Grenzwert einer Zerlegungssumme</u>

- Zerlegung $Z_k = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ von [a, b] liefert Polynomzug von C

Sekantenvektor: $\Delta\vec{x}_i = \vec{\gamma}(t_{i+1}) - \vec{\gamma}(t_i) \approx \dot{\vec{\gamma}}(t_i) \cdot \Delta t_i$

- Ähnlich wie bei KI 1. Art kann man zeigen:

$$\boxed{\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \lim_{\delta(Z_k) \to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \vec{v}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i}$$ **Formel 14.11**

$$\approx \sum_i \vec{v}(\vec{\gamma}(t_{i+1})) \cdot \vec{\gamma}(t_i) \cdot \Delta t_i \rightarrow \approx \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t) \cdot \vec{\gamma}(t) dt$$

<u>Anwendung: Berechnung der Arbeit:</u>

- Ein Massenpunkt bewegt sich längs C in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$
- Gesucht: W = Arbeit, die dabei vom Kraftfeld geleistet wird
  (W > 0): Kraftfeld „nützt“ der Bewegung, Radfahrer fährt bergab)
  (W < 0): Kraftfeld „schadet“ der Bewegung, Radfahrer fährt bergauf)
- Kurve wird zerlegt: W_i = Arbeit auf i-tem Stück

$\boxed{W_i \approx \vec{F}(\vec{x}_i) \cdot \Delta x_i}$, denn Kraft ≈ konst. $\vec{F}(\vec{x})$ $\qquad W \approx \sum_{i=0}^{k-1} \vec{F}(\vec{x}_i) \cdot \Delta x_i$

© Torben Nentwig 31.01.´06

→ Grenzübergang $\delta(Z_k)$ → 0 liefert exakten Wert → $\boxed{W = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$ **Formel 14.12**

Bemerkung: Wird C entgegengesetzt durchlaufen (Kurve „-C"), so ändert sich das Vorzeichen $\boxed{\int_{-C} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$ **Formel 14.13**

14.4. Potentialfelder und Wegungenauigkeiten

Definition 14.8.: Ein Vektorfeld $\vec{v}$: D → $\mathbb{R}^n$, heißt „*Potentialfeld*" oder „*Gradientenfeld*", wenn es eine skalare C^1-Funktion φ : D → $\mathbb{R}$ gibt, so dass $\boxed{\vec{v}(\vec{x}) = grad\ \varphi(\vec{x})\ \ \forall\, \vec{x} \in D}$. Die Funktion φ heißt „*Potentiel von* $\vec{v}$ " (oder: „*Stammfunktion*").

Beispiel: das Gravitationsfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \frac{-C}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{x}$ hat das sogenannte „*Newtonsch`sche Potential*"

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{C}{\|\vec{x}\|} = C \cdot (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{denn} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{C}{\|\vec{x}\|} = C \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i = \frac{-C}{\|\vec{x}\|^3} \cdot x_i$$

Vorteil: beim Potentialfeld $\vec{v}$ kann man alles auf einen skalare Funktion φ zurückführen und man hat gute Eigenschaften bei KI.

Zusammenhang zu vektoriellen KI

Definition 14.9.: Ein Vektorfeld $\vec{v}$: D → $\mathbb{R}^n$, heißt „*konservativ*", wenn di KI $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{x}$ für Kurven C in D „*wegunabhängig*" sind, dass heißt wenn der Wert des KI gleich bleibt für alle Kurven, die den gleichen Anfangspunkt und $\vec{x}_a$ und Endpunkt $\vec{x}_b$ haben. $\int_{C1} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{C2} \vec{v} \cdot d\vec{x}$

Bemerkung: die Wegunabhängigkeit von KI ist äquivalent zu $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0$ ∀geschlossenen Kurven C in D.

Definition 14.10.: Eine Menge G ⊂ $\mathbb{R}^n$ heißt „*Gebiet*", wenn sie „*offen*" und „*zusammenhängend*", dass heißt wenn je 2 Punkte aus G durch eine stückweise C^1-Kurve C in G verbunden werden können.

Satz 14.11.: (**Hauptsatz für Kurvenintegrale**)

Voraussetzung: $\vec{v}$: G → $\mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld, G ⊂ $\mathbb{R}^n$ sei Gebiet

Behauptung: (a) für ein Potentialfeld $\boxed{\vec{v} = \text{grad}\ \varphi}$ und eine stückweise C^1-Kurve C in G mit Parametrisierungsfunktion $\vec{\gamma}$: [a, b] → $\mathbb{R}^n$ gilt: $\boxed{\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a))}$ **Formel 14.14**

(b) Für ein konservatives Vektorfeld $\vec{v}$: G → $\mathbb{R}^n$ ist folgende Funktion φ : G → $\mathbb{R}^n$ ein Potential. $\boxed{\varphi(\vec{x}) = \int_{C(\vec{x}_0, \vec{x})} \vec{v} \cdot d\vec{x}}$ wobei $\vec{x}_0$ beliebiger fester Punkt in G, **Formel 14.15**

$C(\vec{x}_0, \vec{x})$ beliebiges stückweise C^1-Kurven von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$.

(c) $\vec{v}$ ist Potentialfeld genau dann wenn $\vec{v}$ konservativ ist (dass heißt KI wegunabhängig)

Beweis zu (a): $\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) dt$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}[\varphi(\vec{\gamma}(t))] dt = [\varphi(\vec{\gamma}(t))]_a^b = \varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a)$$

Bemerkung: - (14.15) ist Möglichkeit zur Berechnung des Potentials φ von $\vec{v}$

- für $C(\vec{x}_0, \vec{x})$ kann man sich einen günstigen Weg aussuchen (z.B. Gerade)
- ? bessere Prüfkriterien für „$\vec{v}$ ist konservativ"?

© Torben Nentwig 31.01.´06

Satz 14.12.: Für jedes stetig differenzierbare Potentialfeld $\vec{v}$: G → $\mathbb{R}^n$ muss folgende Integrationsbedingung (IB) gelten: $\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in G,\ 1 \le < j \le n}$

Beweis: $\vec{v}$ = grad φ → $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

IB (14.16) ist äquivalent zu:

2D-Fall: $\boxed{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) \ \forall \vec{x} \in G}$ (1 Bedingung)

3D-Fall: $\boxed{\text{pot}\,\vec{v}(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in G}$ $\vec{v}$ ist rotationsfrei (3 Bedingungen)

also: ist IB verletzt, so ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld

Beispiel: $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x \cdot y \end{pmatrix}$, $\frac{\partial v_1}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v_2}{\partial x} = y$ → IB verletzt → $\vec{v}$ kein Potentialfeld

Definition 14.13.: Ein Gebiet G heißt „*einfach zusammenhängend*“, wenn man jede geschlossne Kurve C in G innerhalb von G stetig zu einem Punkt zusammenziehen kann.

Einfach zusammenhängend sind:

In 2D: Gebiet ohne Loch

In 3D: Gebiete ohne Durchbohrung

Beispiel für nicht einfach zusammenhängend

2D: 3D:

Satz 14.14.: Voraussetzung: - $\vec{v}$: G → $\mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld

- G *einfach zusammenhängend*

Behauptung: $\vec{v}$ ist Potentialfeld genau dann wenn IB (14.16) gilt

Bemerkung: Ist im einfachen zusammenhängenden Gebiet G die IB erfüllt für Vektorfeld $\vec{v}$, so ist das KI $I = \int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ wegunabhängig (da $\vec{v}$ Potentialfeld → $\vec{v}$ konservativ)

→ Für die Berechnung des KI kann man sich eine günstige Kurve C* aussuchen,

Beispiel: Ist $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 3y^2 \\ x^2 - 6xy \end{pmatrix}$ Potentialfeld? Wenn ja, bestimme Potential φ

- Definitionsbereich D = $\mathbb{R}^2$ → einfach zusammenhängend
- IB $\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x - 6y$, $\frac{\partial v_2}{\partial x} = 2x - 6y$ → IB ist erfüllt → $\vec{v}$ ist C^1-Vektorfeld

Satz 14.14.: $\vec{v}$ ist Potentialfeld auf D = $\mathbb{R}^2$?

$\varphi(\vec{x}) = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{x}$, C: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$, t ∈ [0, 1]

$$\rightarrow \varphi(x,y) = \int_0^1 \vec{v}(tx,ty) \cdot \dot{\vec{\varphi}}(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2xy - 3y^2 \\ x^2 - 6xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \cdot (2x^2y - 3xy^2 + x^2y - 6xy^2)dt$$

$$= (3x^2y - 9xy^2)\int_0^1 t^2 dt = \underline{\underline{x^2y - 3xy^2}}$$

15. Gebietsintegrale über ebenen Bereichen (Flächenintegrale):

15.1. Definition als Grenzwert von Zerlegungssumme:

Voraussetzungen:
- 2-D-Bereich B von endlich vielen glatten Kurven berandet
- Funktion f : B → ℝ stückweise stetig und beschränkt

- Sei Q = [a, b] × [c, d] Rechteck, das B enthält
- Zerlege Q in $2^n \times 2^n$ kleine Rechtecke B_K
  n = Verfeinerungslevel
  $\Delta x_K = \frac{b-a}{2^n}$, $\Delta y_K = \frac{d-c}{2^n}$
- Zu jedem B_K wähle Punkt $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \in B_K$
- betrachten nur diejenigen Bereiche B_K, bei denen der Punkt $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \in B$

→ sie approximieren B immer besser für n → ∞

Definition 15.1.: Das „*Gebietsintegral (oder Flächenintegral) von f über B*“ ist folgender Grenzwert: $\boxed{\int_B f(x,y)dB := \lim_{n\to\infty} \sum_K (\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \cdot \Delta B_K}$ **Formel 15.1**

wobei $\Delta B_K = \Delta x_K \cdot \Delta y_K$ Flächeninhalt von B

Übliche Schreibweise ist $\iint_B f(x,y)dxdy$ („*Doppelintegral*“)

Man kann zeigen: unter den obigen Voraussetzungen an f und B existiert der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Punkte $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \in B_K$ und von Q

15.2. Anwendungen:

1. Volumen über B unterhalb der Fläche z = f(x, y)
   $V \approx \sum_K (\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \cdot \Delta B_K \rightarrow \boxed{V = \int_B f(x,y)dB}$ **Formel 15.2**

2. Fläche von B
   $F(B) \approx \sum_K \Delta B_K = \sum_K 1 \cdot \Delta B_K \rightarrow \boxed{F(B) = \int_B 1 \cdot dB}$ **Formel 15.3**
3. Masse und Schwerpunkt einer Platte B
- Sei ρ(x, y) = Massendichte im Punkt (x, y)
- Gesamtmasse M: $M \approx \sum_K \rho \cdot (\tilde{x}_K, \tilde{y}_K) \cdot \Delta B_K \rightarrow \boxed{M = \int_B \rho \cdot (x,y) \cdot dB}$ **Formel 15.4**
- für den Schwerpunkt (x_s, y_s) von B gilt:
  $\boxed{x_s = \frac{1}{M}\int_B x \cdot \rho \cdot (x,y) \cdot dB \;,\; y_s = \frac{1}{M}\int_B y \cdot \rho \cdot (x,y) \cdot dB}$ **Formel 15.5**

© Torben Nentwig 31.01.´06

15.3. Berechnung für Normalbereiche:

- „*Normalbereich*“ B von Typ 1:
  $B = \{(x, y) \mid x \in [a, b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$
  Hier gilt : $\boxed{\int_B f(x,y)dB = \int_{x=a}^{b} \underbrace{\left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right)}_{:=\Phi(x)} dx}$ **Formel 15.6**
- „*Normalbereich*“ B von Typ 2:
  $B = \{(x, y) \mid y \in [c, d], h_1(x) \le x \le h_2(x)\}$
  Hier gilt : $\boxed{\int_B f(x,y)dB = \int_{y=c}^{b} \underbrace{\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right)}_{:=\Psi(y)} dy}$ **Formel 15.7**
- Beweisidee für Typ 1:
  Punkt in B_{ij} sei $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = m_{ij}$ Mittelpunkt B_{ij}
  Zerlegungssumme:

$$\sigma_n = \sum_{i,j} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \qquad // \qquad m_{ij} \in B \Leftrightarrow \tilde{y}_j \in \{g_1(\tilde{x}_1), g_2(\tilde{x}_2)\} = Ig$$

$$= \sum_i \left(\sum_j f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \cdot \Delta y_j \right) \cdot \Delta x_i = \sum \Phi(\tilde{x}_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\rightarrow \quad = \int_{g_1(\tilde{x}_i)}^{g_2(\tilde{x}_i)} f(\tilde{x}_i, y)dy = \Phi(\tilde{x}_i) \rightarrow \int_{x=a}^{b} \Phi(x)dx$$

Beispiel: $B = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1], x^2 \le y \le 2 - x^2\}$, $f(x, y) = x^2 + 2y$

$$I = \int_B (x+2y)dB = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{2-x^2} x+2y)dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=x^2}^{y=2-x^2} dx = \int_{x=-1}^{1} \left(x(2-x^2-x^2) + (2-x^2)^2 - x^4\right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(2x - 2x^2 + (4-4x^2)\right) dx = \left[x^2\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} + \left[4x\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

allgemeine Bereiche B:
meist kann B in Normalbereiche zerlegt werden
$B = B_1 \vee B_2 \vee B_3$ dann gilt

$$\int_B f(x,y)dB = \sum_{i=1}^{3} \int_{B_i} f(x,y)dB_i$$ **Formel 15.8**

15.4. Koordinatentransformation:

Ziel: Vereinfachung der Berechnung von Gebietsintegralen $I = \int_B f(x,y)dB$ durch Übergang zu neuen Koordinaten u, v

© Torben Nentwig 31.01.´06

$\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\vec{T}$ wird generiert durch $u = T_1(x, y)$, $v = T_2(x, y)$

Inverse Abbildung: $\boxed{x = x(u, v) = T_1^*(u, v) \qquad y = y(u, v) = T_2^*(u, v)}$ **Formel 15.9**

<u>Satz 15.2.:</u> (Transformationssatz)

<u>Voraussetzung:</u>

i. Transformation (15.9) x = (u, v) und y = (u, v) seien stetig differenzierbar $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

ii. f sei stetig auf B : f : B $\rightarrow \mathbb{R}^1$

<u>Behauptung:</u> $\boxed{\int_B f(x, y)dB = \int_G x(u, v), y(u, v)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dG}$ **Formel 15.10**

Wobei $\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$ „*Funktionaldeterminante*“ **Formel 15.11**

<u>Zusatz:</u> Voraussetzungen dürfen auf einer Fläche vom Flächenmaß Null verletzt werden.

<u>Idee:</u> Standartsubstitution $\int_a^b f(x(t))\frac{dx}{dt}dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)dx$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten (für Kreise gemacht)

$$x = (r, \varphi) = r \cdot \cos\varphi, \quad y = (r, \varphi) = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

Problemzone: r = 0 kein sauberer Winkel definiert

Hier Funktionaldeterminante:

$$\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = r \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \underline{\underline{r}}}$$

Das heißt: $\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = |r| = r}$

Fläche eines Kreises: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_1^2\}$

Fläche des Kreises $|B| = \int_B 1dB \rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} 1 \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} 1 \cdot r \, dr d\varphi = \frac{r_1^2}{2} \cdot 2\pi = \pi \cdot r_1^2$

Beispiel: Ringsegment:

$$\int_B \sin\sqrt{x^2 + y^2}dB = \int_G \sin(r) \cdot r \, dG = \int_0^\pi d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(r) \cdot r \, dr = \pi \cdot \{-r^2 + \sin r\}_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \pi^2 - \pi$$

© Torben Nentwig 31.01.´06

16. Gebietsintegrale über räumlichen Bereichen (Volumenintegrale):

16.1. Definition und Anwendung:

gegeben:

- 3-D-Bereich B von endlich vielen glatten Flächen berandet : $B \subset \mathbb{R}^3$
- Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ (zum Beispiel Massendichte)

- Zerlege den Quader Q in $2^n \times 2^n \times 2^n$ kleine Quader B_K, n – Verkleinerungslevel zu jedem B_K wählen wir einen Punkt $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K, \tilde{z}_K) \in B_K$
- betrachten nur diejenigen Bereiche B_K, bei denen der Punkt $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K, \tilde{z}_K) \in B$
- Mit zunehmender Vertiefung $n \rightarrow \infty$ wird B immer besser durch:
  $B \subset \bigcup_n B_K^n$ (k = 1, 2, ..., $(2^n)^3$)

Definition 16.1.: Das „*Gebietsintegral (oder: „Volumenintegral“) von f über B*“ ist der Grenzwert:

$$\boxed{\int_B f(x,y,z)dB := \lim_{n\to\infty} \sum_K (\tilde{x}_K, \tilde{y}_K, \tilde{z}_K) \cdot \Delta B_K}$$ **Formel 16.1**

Mit: $\Delta B_K = \Delta x_K \cdot \Delta y_K \cdot \Delta z_K = |B_K|$ (Volumen von B_K), Schreibweise auch

$$\iiint_B f(x,y,z)dB = \iiint_B f(x,y,z)dxdydz$$

Bemerkung: Analog zum 2D-Fall existiert der Grenzwert für stückweise stetig und beschränkte f und ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungspunkte $(\tilde{x}_K, \tilde{y}_K, \tilde{z}_K) \in B_K$

Analog zum 2D-Fall: **Anwendungen**

V - Volumen: $$\boxed{V = |B| = \int_B 1dB}$$ **Formel 16.2**

M - Masse: $$\boxed{M = \int_B \rho \cdot (x,y,z) \cdot dB}$$ **Formel 16.3**

S – Schwerpunkt: $$\boxed{\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_B \rho \cdot (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dB \ ,}$$ **Formel 16.4**

16.2. Berechnung für Normalbereiche:

Normalbereich bekannt aus 2D

Beispiel 3D:

$\boxed{B = \{(x, y,z)\ \mathbb{R}^3 |\ x \in [a, b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}}$

Bzw. : $\boxed{B' = \{(x, y,z)\ \mathbb{R}^3 : x, y \in B^*,\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}}$ **Formel 16.5**

Erklären Integrale:

$$\boxed{\int_B f(x,y,z)dB = \int_{B^*} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dB^*}$$ **Formel 16.6**

© Torben Nentwig 31.01.´06

sind für Bereich B: $\boxed{\int_B f(x,y,z)dB = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx}$ **Formel 16.7**

(Analog für zyklische Vertauschung der Koordinaten)

Beispiel: B sei ein Bereich im $\mathbb{R}^3$ der begrenzt ist von den Fläschen:

x = 1; y = 1; z = 0

x = 3 ; y = 2 ; z = xy

Zu berechnen: $\int_B f(x,y,z)dB$ mit $f(x,y,z) = x \cdot y$

$$\int_1^3 \int_1^2 \int_0^{xy} y \cdot z\, dz\, dy\, dx = \text{Übungsaufgaben ...}$$

<u>16.3. Koordinatentransformation:</u>

<u>Ziel:</u> Integrale einfacher Berechnen

Beispiel:

Hier: T* : G → B

Allgemein:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(u,v,w) = x(r,\varphi) = r \cdot \cos\varphi \\ y &= y(u,v,w) = y(r,\varphi) = r \cdot \sin\varphi \\ z &= z(u,v,w) = \quad z \qquad = z \end{aligned}}$$

u = r **Formel 16.8**

v = φ **Formel 16.8**

w = z

Hier haben wir schon Zylinderkoordinaten eingeführt:

Transformationsformel: $\boxed{\int_B f(x,y,z)dB = \int_G x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dG}$

Konkret mit Zylinderkoordinaten: $\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(r,\varphi,z) \cdot r\, dr\, d\varphi\, dz$$

<u>Satz 16.2.:</u> (Transformationssatz)

<u>Voraussetzung:</u>

iii. T* : G → B ist eineindeutig : (x, y, z) → (u, v, w)

iv. x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) seien stetig differenzierbar

v. $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in G$

vi. f sei stetig auf B : f : B → $\mathbb{R}^1$

<u>Behauptung:</u> $\boxed{\int_B f(x,y,z)dB = \int_G x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dG}$ **Formel 16.9**

Wobei $\boxed{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}}$ „*Funktionaldeterminante*“ **Formel 16.10**

© Torben Nentwig 31.01.´06

Analog zu Integralen im $\mathbb{R}^2$ kann man hier die Voraussetzungen auf Flächen (dass heißt auf Punktmengen) vom Flächenmaß Null verletzen.

Beweis: $\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$ $\quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$ „*Vollständiges Differential*“

Zylinderkoordinaten (bekannt)

T* G → B (r, φ, z) → (x, y, z)

$x = r \cdot \cos\varphi \quad y = r \cdot \sin\varphi \quad z = z \qquad \forall r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \ z \in \mathbb{R}$

speziell bei $r \in [0, R], z \in [a, b]$ gilt:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Formel 16.11

Transformation ist eindeutig außer für r = 0 (Winkel undefiniert)

Beispiel: **f (x, y, z) = x² + y²** B = {(x, y,z) $\mathbb{R}^3$| x² + y² ≤ R, z ∈ [a, b]}

$$\int_B f(x,y,z)dB = \int_G r^2 \cdot r \, dG = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi dz = \int_b^b dz \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r^3 dr = (b-a)\cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = (b-a)\cdot\pi\cdot\frac{R^4}{2}$$

Alles was in Zylinderkoordinaten sinnvoll zu behandeln ist, hat vom Gebiet B her die Gestalt:

B ist so etwas wie ein Rotationskörper

Neue Koordinaten für die Kugel: **<u>Kugelkoordianten</u>**

$\boxed{B = K = \{(x, y,z) \ \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\} \ R > 0}$ **Formel 16.12**

r² = x² + y² + z², r = Abstand vom 0-Punkt

φ = Winkel der Projektion zur positiven x-Achse $\varphi \in [0, 2\pi)$

ϑ = Winkel zur positiven z-Achse vom Ortsvektor $\vartheta \in [0, \pi)$

$\boxed{\mathbf{x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta}}$ $\boxed{\mathbf{y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta}}$ $\boxed{\mathbf{z = r \cdot \cos\vartheta}}$

<u>Ausrechnen der Funktionaldeterminante:</u>

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\vartheta & -r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta & r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cdot\sin\vartheta & r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta & r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\cdot\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$r^2\cdot\cos\vartheta \begin{vmatrix} \sin\varphi\cdot\sin\vartheta & \cos\varphi\cdot\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cdot\sin\vartheta & \sin\varphi\cdot\cos\vartheta \end{vmatrix} - r^2\cdot\cos\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\vartheta & \sin\varphi\cdot\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cdot\sin\vartheta & \cos\varphi\cdot\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$r^2\cdot\cos\vartheta(-\sin^2\varphi\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta - \cos^2\varphi\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta) - r^2\cdot\sin\vartheta(\cos^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta) =$$

$$r^2\cdot\cos\vartheta(-\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta) - r^2\cdot\sin\vartheta(\sin^2\vartheta) = \underline{\underline{-r^2\cdot\sin\vartheta}} \qquad \boxed{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = r^2\cdot\sin\vartheta}$$

Formel 16.13

Halbkugel: B = K = {(x, y,z) $\mathbb{R}^3$| x² + y² + z² ≤ R², z ≥ 0}

Volumen von B: $|B| = \int_B 1 dB \rightarrow \int_G 1\cdot r^2\cdot\sin\upsilon \, dG$

$G = \{(r,\varphi,\upsilon) \in \mathrm{R}^3, 0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{R}, \varphi \in [0,2\pi), \vartheta \in [0, \tfrac{\pi}{2})\}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi\cdot\frac{R^3}{3}\cdot[-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot R^3$$

© Torben Nentwig 31.01.´06

17. Oberflächenintegrale (OI)

17.1. Flächen im $\mathbb{R}^3$:

Definition 17.1.: Unter einer „*Parameterdarstellung*“ eines Flächenstückes S versteht man die Vektorfunktion $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ u, v ∈ B, die jedem Punkt (u, v)∈ B im Parameterbereich einen Punkt auf dem Flächenstück S zuordnet: S = { $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{x}(u,v)$ mit u, v ∈ B}

S nennt man eine reguläres Flächenstück, wenn $\vec{x}$ eineindeutig $\vec{x}$: B → S, $\vec{x}$ ist stetig differenzierbar : Tangentialbedingung:

$$\boxed{\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0}$$ **Formel 17.1**

Ziel: Oberflächenelement – Ausrechnen des Flächeninhaltes von S

$$\boxed{F(S) = |S| = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k}$$ **Formel 17.2**

Erklären nun die Zerlegung:

$\Delta S_k = \vec{x} + \vec{x}_u(u,v)\Delta u + \vec{x}_v(u,v)\Delta v$

Fläche: $\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$

$$\boxed{\Delta S_k := \|\vec{x}_u(u_k, v_k) \times \vec{x}_v(u_k, v_k)\| \cdot \Delta u_k \cdot \Delta v_k}$$ **Formel 17.3**

17.2. Der Flächeninhalt eines Flächenstückes S:

$$\boxed{F(S) \doteq |S| = \int_B \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \, dB = \int_S S \, dO}$$ $//dO$ fasst man im Sinne von $\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| dB$ auf **Formel 17.4**

Bemerkung: Definition ist unabhängig von der Parametrisierung

Faulheit führt zum Benutzen der Lagrang'schen Identität:

$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \sqrt{(\vec{x}_u \times \vec{x}_u) \cdot (\vec{x}_v \times \vec{x}_v) - (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2}$

Beispiel: Zylinderflächenstück

S = {(x_1, x_2, x_3) ∈ $\mathbb{R}^3$: $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \in [0, H]$}

Berechnen F(S): $\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\| = R$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $z \in [0, H]$, z = x_3, r = R = const.

$x_1 = R \cdot \cos\varphi$ $\quad$ $x_2 = R \cdot \sin\varphi$ $\quad$ $x_3 = z$

$$\boxed{\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\| = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \cdot \sin\varphi & R \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\| = R$ $\qquad$ $|S| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^H R \, dz \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot H \cdot R$

Bei Flächen: S = { $\vec{x}$ (u, v) ∈ $\mathbb{R}^3$: u, v ∈ B}

Vorbereitung: $\int_B \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \, du \, dv = |S| = F(S)$

Projektion der Fläche S auf $x_1 = 0$ differentiell $dx_2 dx_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$

© Torben Nentwig 31.01.´06

17.3. Skalare Oberflächenintegrale (Oberflächenintegrale 1. Art):

Definition: (Flächenstücke) Bekannt: S = { $\vec{x}$ (u, v) ∈ $\mathbb{R}^3$: u, v ∈ B}

(a) Die Fläche S werde von endlich vielen „*Jordankurven*“ berandet. Dass heißt der Rand von S sei stückweise glatt, stetig differenzierbar nach dem Parameter, ∂S so orientiert, dass die Fläche zur Linken liegt.

(b) $\vec{x}$ ist eindeutig, bis auf Flächenmaß Null $Rang\,\dfrac{D(\vec{x})}{D(u,v)} = 2$ (mit der gleichen Einschränkung)

(c) S sei einfach zusammenhängend (das ist die Forderung an B)

(d) Wir nennen S einfach, wenn S einfach zusammenhängend und ∂S stückweise glatt ist

Definition Oberflächenintegral 1. Art:

Definition 17.2.: S sei einfaches Flächenstück, Parameter-Bereich B, $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$, weiterhin sei die Funktion f : S → $\mathbb{R}^1$, f sei stetig. Dann erklären wir, das Oberflächenintegral 1. Art durch: $\int\limits_S f(\vec{x})do := \int\limits_B f(\vec{x}(u,v)) \cdot \left\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\right\| du\,dv$

$\int\limits_S f(\vec{x})do := \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_{B_j} f(\vec{x}(u_j,v_j)) \cdot \left\|\vec{x}_{u_j} \times \vec{x}_{v_j}\right\| dB_j$, immer wenn die Menge der inneren Punkte von $(S_j \cap S_l) = \varnothing$

Arbeiten mit Flächenelementen:

Zerlegen S in Δo_j, $\left|\Delta o_{jk}\right| = \left\|\vec{x}_u(u_j,v_j) \times \vec{x}_v(u_j,v_j)\right\| \Delta du \cdot \Delta dv$ und Funktionswert f($\vec{x}$ (u_j, v_j)) = f_j

→ $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{N} f_j \cdot \left|\Delta o_j\right| =: \int\limits_S f(\vec{x})do}$ **Formel 17.5**

Beispiel Kugeloberfläche: S = { $\vec{x}$ ∈ $\mathbb{R}^3$: ‖ $\vec{x}$ ‖ = R > 0}

Parametrisierung: x = R · cos φ · sin ϑ; y = R · sin φ · sin ϑ; z = R · cos ϑ

f($\vec{x}$) = $x_1^2 + x_2^2$

$$\boxed{\int\limits_S f(\vec{x})do = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} R^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot R^2 \cdot \sin^2\vartheta d\vartheta\, d\varphi} = 2\pi \cdot R^4 \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta$$ **Formel 17.6**

17.4. Vektorielle Oberflächenintegrale (Oberflächenintegrale 2. Art):

Definition 17.3.: Sei S ein eines Flächenstück mit entsprechender Parametrisierung $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$, weiterhin sei die Funktion f : S → $\mathbb{R}^1$, f sei stetig. Dann erklären wir, das Oberflächenintegral 2. Art durch:

$$\boxed{\int\limits_S \vec{f}(\vec{x})d\vec{o} = \int\limits_S \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_s do = \int\limits_B \vec{f}(\vec{x})(\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)dB}$$ **Formel 17.7**

Ist S zusammengesetzte Fläche, dann gilt: $S = \bigcup\limits_{j=1}^{k} S_j$ und

$$\boxed{\int\limits_S \vec{f}(\vec{x})d\vec{o} = \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_{S_j} \vec{f}(\vec{x})d\vec{o} = \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_{B_j} \vec{f}(\vec{x}(u_j,v_j)) \cdot (\vec{x}_{u_j} \times \vec{x}_{v_j})dB_j}$$ **Formel 17.8**

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_{1,u} & x_{2,u} & x_{3,u} \\ x_{1,v} & x_{2,v} & x_{3,v} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_{2,u} & x_{3,v} \\ x_{2,v} & x_{3,u} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_{3,u} & x_{1,u} \\ x_{3,v} & x_{1,v} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_{1,v} & x_{2,u} \\ x_{1,u} & x_{2,v} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \vec{n}(u,v)$$ //normierter Normalvektor

Wir denken jetzt an das OI 1. Art:

$$\int_B \vec{f}(\vec{x}) \bullet \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \|\vec{n}\| dB = \int_S f_1(\vec{x}) dx_2 dx_3 + f_2(\vec{x}) dx_3 dx_1 + f_3(\vec{x}) dx_1 dx_2$$

Erklärung: $dx_2 dx_3 = n_1 \cdot dudv$

Deuten nun: $\int_S \vec{f} d\vec{o}$ als Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Fläche S.

Vorzeichenabhängigkeit des Oberflächenintegrals 2. Art:

Das führt zur Vorzeichenabhängigkeit:

$$\int_S \vec{f} d\vec{o} = \int_B \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_s \cdot \|\vec{n}\| dB = -\int_B \vec{f}(\vec{x}) \cdot (-\vec{n}_s) \cdot \|\vec{n}\| d\tilde{B}$$

Beispiel: Flächenstück S:

$$\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}, \; r \in [0, 1], \; \varphi \in [0, \pi]; \qquad \text{Vektorfeld } \vec{f} = \begin{pmatrix} x_1{}^2 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Normale ausrechnen: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2r \\ -r \cdot \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cdot \cos\varphi \\ -2r^2 \cdot \sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$

$$\vec{f}(r,\varphi) = \vec{f}(\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r^2 \cdot \cos^2\varphi \\ r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ r^3 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}:$$

$$\vec{f} \bullet \vec{n} = -2r^4 \cdot \cos^3\varphi - 2r^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi + r^4 \cdot \sin\varphi - 2r^4 \cdot \cos\varphi + r^4 \cdot \sin\varphi$$

$$\int_S x_1{}^2 dx_2 dx_3 + x_1 \cdot x_2 dx_3 dx_1 + x_2 \cdot x_3 dx_1 dx_2 = \int_S f(\vec{x}) do = \int_B r^4 \cdot (-2\cos\varphi + \sin\varphi) dr d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi -2\cos\varphi + \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2}{5}$$

18. Integralsätze

18.1. partielle Integration im $\mathbb{R}^n$:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \rightarrow \int_a^b u' \cdot v\, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'\, dx$

Wollen diese Idee in den $\mathbb{R}^n$ übertragen:

Einfaches Randstück $S \subset \partial B$: $\exists\ \vec{n}_s(\vec{x}_0) \perp S$ (Tangentialebene) für alle inneren Punkte $\vec{x}^0 \in S$

$\left\|\vec{n}_s(\vec{x}^0)\right\| = 1$ //skalierte (Einheits-)Normale

Neue Koordinate: $\vec{y} = C^T(\vec{x} - \vec{x}^0)$

Zurückschreiben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \vec{x}^0$

Einträge von C Matrixelementen $c_{jk} = \cos(\vec{e}_j, \vec{e}_k{}^*)$ //Richtungscosinus

Vorteil dieser Darstellung: Normalenableitung von f : $\overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{n}_s} = \frac{\partial f}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) \cdot \cos(\vec{e}_j, \vec{e}_k{}^* = \vec{n}_s(\vec{x}^0))}$$

B sei nur ein säulenförmiges Gebiet mit ∂B einfaches geschlossenes Flächenstück, $B \subset \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$.

$\vec{a}, \vec{b} \in \partial B$ (Randfläche)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{x}_* = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit: a < b,

Verbindungsstrecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$: $V_{\vec{a}\vec{b}} := \{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in [0, 1]\}$

Nun seien f, g $\in C^1(\overline{B})$, Schreiben uns die Randpunkte $\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{a}(\vec{x}_*) \\ \vec{x}_* \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}(\vec{x}_*) \\ \vec{x}_* \end{pmatrix}$

Partielle Integration:

$$\int_B \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \cdot g(\vec{x})\, dB = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \oint_{\partial B} \left(\int_{\vec{a}(\vec{x}_*)}^{\vec{b}(\vec{x}_*)} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \cdot g(\vec{x})\, dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\partial B} [f(\vec{b}) \cdot g(\vec{b}) - f(\vec{a}) \cdot g(\vec{a})]\, dx_2 \ldots dx_n - \int_B f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x})\, dB$$

Nun wissen wir: $dx_2 \ldots dx_n = \left|\cos(\vec{e}_1, \vec{n}_s)\right| dO \rightarrow \vec{b} : \cos(\vec{e}_1, \vec{n}_s(\vec{b})) \geq 0$, $\vec{a} : \cos(\vec{e}_1, \vec{n}_s(\vec{a})) \leq 0$

© Torben Nentwig 31.01.´06

Damit erhalten wir: $\int_B \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot g \; dB = \int_{\partial B} f(\vec{z}) \cdot g(\vec{z}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{n}_s(\vec{z}))dO - \int_B f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \, dB$

Allgemein gilt für geschlossene Ränder ∂B, welche aus einfachen Flächenstücken bestehen:

$$\boxed{\int_B \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g \; dB = \int_{\partial B} f \cdot g \cdot \cos(\vec{e}_j, \vec{n}_s)dO - \int_B f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dB} \quad \forall j = 1, ..., n$$ **Formel 18.1**

Anwendung der Integralsätze:

1. Setze: g = 1, dass heißt $\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial 1}{\partial x_j} = 0$

$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $B \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f} \in (C^1(\overline{B}))^2$

Nun betrachten wir $\int_B \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \, dB = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot 1 \, dB$

Anwendung der partiellen Integration: $= \int_{\partial B} f_1(\vec{z}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{n}_s(\vec{z}) \, ds$

dx_2

Analog: $\int_B \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \, dB = \int_{\partial B} f_2(\vec{z}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{n}_s(\vec{z}) \, ds$

$-dx_1$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$, $\vec{t}(x) = \frac{1}{\|\dot{\vec{\gamma}}\|} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_s(\vec{x}) = \frac{1}{\|\dot{\vec{\gamma}}\|} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{pmatrix}$

Zusammenfassung der Formeln: $\boxed{\int_B div \, \vec{f} \, dB = \int_{\partial B} \vec{f} \cdot \vec{n}_s \, dB}$ //Gauß`sche Integral-satz der Ebene **Formel 18.2**

$dx_1 = \dot{\gamma}_1(t)dt$, $dx_2 = \dot{\gamma}_2(t)dt$

18.2. Integralsätze im $\mathbb{R}^2$:

Voraussetzung: B-Bereich, ∂B sei geschlossen, stückweise glatt. Durchlaufsinn von ∂B werde so gewählt, dass B zur Linken liegt.

$\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f}$ stetig differenzierbar (bis zum Rand), ($\vec{f} \in (C^1(\overline{B}))^2$)

Behauptung: (i) $\int_{\partial B} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_s(\vec{x}))ds = \int_B div\vec{f} \; dB$ (18.2)

(ii) $\int_{\partial B} f(\vec{x})d\vec{x} = \int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dB$ //Gauß`sche Integral-satz oder ebene Variante des Stoke`schen Integralsatzen **Formel 18.3**

3. Komponente der Rotation

Beispiel: $B = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = [0, 1], 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1 \}$

Gesucht: $\int_{\partial B} \vec{f} d\vec{x}$ mit $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 3 \\ x_2^3 + x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$

Mit (18.3) gilt: $\int_{\partial B} \vec{f} d\vec{x} = \int_B (x_2 - 0)dB = \frac{1}{6}$

18.3.Gauß`sche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$($\mathbb{R}^n$):

Voraussetzung: B-Bereich im $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂B (Oberfläche des Körpers B), Rand geschlossen, bestehend aus endlich vielen einfachen Teilstücken. $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{f} \in (C^1(\overline{B}))^3$

© Torben Nentwig 31.01.´06

Behauptung: $\boxed{\int_B div\vec{f}\ dB = \int_{\partial B} \vec{f}(\vec{z}) \cdot \vec{n}_s(\vec{z}))dO = \int_{\partial B} \vec{f}(z)\, dO}$ **Formel 18.4**

Beweis: Formeln der partiellen Integration 3 mal mit g = 1

Bemerkung: Der Gauß`sche Integralsatz gilt auch für n > 3

$B \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f}$: B → $\mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in (C^1(\overline{B}))^n$, $\int_B div\vec{f}\ dB = \int_{\partial B} \vec{f}\ dO$

Physikalische Bedeutung?:

Es sei $k_r(\vec{x}_0)$–Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius r

Es sei $\vec{f}$: B → $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{f} \in (C^1(\overline{B}))^n$ und $k_r(\vec{x}_0) \subset B$ → $\int_{k_r(\vec{x}_0)} div\vec{f} dB \approx div\vec{f}(\vec{x}_0) \cdot k_r(\vec{x}_0)$

Das heißt: $div\vec{f}(\vec{x}_0) \approx \frac{1}{k_r(\vec{x}_0)} \cdot \int_{\partial k_r} \vec{f}\, dO$ → $div\vec{f}(\vec{x}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{k_r(\vec{x}_0)} \cdot \int_{\partial k_r(\vec{x}_0)} \vec{f} \cdot \vec{n}_s\, dO$

Bemerkung: $\vec{f}$ vorgegeben div $\vec{f}(\vec{x}_0)$ stellt die aus einer Volumeneinheit heraustretende Quelldichte dar. Man spricht von:

div $\vec{f}(\vec{x}_0) > 0$ Quelle in $\vec{x}_0$ div $\vec{f}(\vec{x}_0) < 0$ Senke in $\vec{x}_0$

Beispiel: B-Würfel mit Kantenlänge 1

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_3 \\ x_3 \cdot x_1 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}, \int_{\partial B} \vec{f}\, dO = \int_B div\vec{f}\ dB = \int_B 0\, dB = 0$$

18.4. Integralsatz von Stokes:

Voraussetzung: S sei eine „*zweiseitige*“, stückweise glatte Fläsche, bei der eine Seite als „*Außenseite*“ gekennzeichnet werden kann.

$\vec{n}_s$ sei die äußere Einheitsnormale auf S in Außenrichtung

∂S-Rand von S sei so orientiert, dass S (mit Blick auf die Außenseite) links liegt

$\vec{f}$: D → $\mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbares Vektorfeld, D offen, $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$

Behauptung: $\boxed{\oint_{\partial S} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_S rot\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_s(\vec{x})\, dO = \int_S rot\vec{f}\, d\vec{O}}$ **Formel 18.5**

Bemerkung: $\int_{\partial S} \vec{f} d\vec{x}$ – Zirkulation von $\vec{f}$ längs ∂S

$\int_S rot\vec{f} d\vec{O}$ – Fluss von rot $\vec{f}$ durch S

Anmerkung: $B \subset \mathbb{R}^3$, B-Bereich mit echtem Volumenmaß $|B| \neq 0$

$B \subset G$ und $G \subset D(\vec{f})$, $\vec{f}$ - 1x stetig differenzierbar

Neue Definition der Rotation: $rot\vec{f}(\vec{x}) = -\lim_{|B| \to 0} \frac{\oint \vec{f} \times \vec{n}_s dO}{|B|}$, $\vec{x} \in B$

Andererseits gilt: Normalenkomponente der Rotation $\vec{n}_s(\vec{x}) \cdot rot\vec{f}(\vec{x}) = \lim_{|S| \to 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{x}}{|S|}$, $\vec{x} \in S$

Beweisidee: p-Stellvertreter für f_1 (also die erste Komponente von $\vec{f}$)

© Torben Nentwig 31.01.´06

$$\oint_{\partial S} p\,dx_1 = \oint_{\partial S(u,t)} p\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}du+\frac{\partial x_1}{\partial t}dt\right)}_{dx_1} = \oint_{\partial S(u,t)} p\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)}_{f_1}du + p\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)}_{f_2}dt$$

$$= \int_{B(u,t)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(p\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(p\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)\right]dB = \ldots = \int_B\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{3u} & x_{3t}\\ x_{1u} & x_{1t}\end{vmatrix}}_{n_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}\underbrace{\begin{vmatrix} x_{1u} & x_{1t}\\ x_{2u} & x_{2t}\end{vmatrix}}_{n_3}\right)dB$$

$$= \int_S\left(\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_3}dx_3dx_1}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_2}dx_1dx_2}_{\mathrm{III}}\right)$$ völlig analog für $f_2 = q$, $f_3 = r$

$$\oint_{\partial S} q\,dx_2 = \int_S\left(\underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_1}dx_1dx_2}_{\mathrm{III}} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_3}dx_2dx_3}_{\mathrm{I}}\right),\quad \oint_{\partial S} r\,dx_3 = \int_S\left(\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_2}dx_2dx_3}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_1}dx_3dx_1}_{\mathrm{II}}\right)$$

Addieren die Einträge auf:

$$\int_S\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)dx_3dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 = \int_S rot\vec{f}\,d\vec{O}$$

Anwendung: bei der Herleitung der Maxwell`schen Gleichungen

$\vec{E}(\vec{x},t)$ – elektrische Feldstärke in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t

$\vec{B}(\vec{x},t)$ – magnetische Flussdichte in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t

C = ∂S geschlossene Randkurve der Fläche S

Faraday`sche Induktionsgesetz

$$\underbrace{\oint_C \vec{E}\,d\vec{x}}_{\text{Induzierte Spannung}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\oint_C \vec{B}\,d\vec{O}}_{\text{Änderung des magn. Flusses}} \rightarrow \int_S rot\vec{E}\,d\vec{O} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,d\vec{O}$$

$$\int_S rot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,d\vec{O} = 0$$ für beliebige Flächen S //Hauptsatz der Variationsrechnung

18.5. Helmholtz`scher Zerlegungssatz

Vorgegeben sei ein einmal stetig differenzierbar $\vec{v}$: G → $\mathbb{R}^3$ und G ⊃ B(Bereich – Integrationsbereich)

Satz 18.1.: Jedes Vektorfeld $\vec{v}$ nachoben, lässt sich in der Gestallt

$\vec{v}$ = grad φ + rot $\vec{w}$ darstellen.

φ - heißt Potential von $\vec{v}$ (14.4)

$\vec{w}$ - nennt man Vektorpotential

Anmerkung: Welche Ideen stehen hinter der Zerlegung: $\vec{v} \in (C^2(\overline{B}))^3$

Bilden div $\vec{v}$ = div(grad φ) + div(rot $\vec{w}$) //1. Partielle DGL

$= \Delta\varphi$ $\quad = 0$

$\Delta\varphi = \text{div}\,\vec{v}$

rot $\vec{v}$ = rot(rot $\vec{w}$) = grad(div $\vec{w}$) – $\Delta\vec{w}$

Bilden nun rot $\vec{v}$ = rot(grad φ) + rot(rot $\vec{w}$) //2. Partielle DGL

$\overline{0}$

Beispiel: Berechnung eines Vektorpotentials

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1^2\cdot x_2^2\\ x_2^2\cdot x_3^2\\ x_3^2\cdot x_1^2\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \text{rot}\,\vec{v} = \vec{v} = -2\cdot\begin{pmatrix} x_2^2\cdot x_3\\ x_3^2\cdot x_1\\ x_1^2\cdot x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(\vec{x})\\ b_2(\vec{x})\\ b_3(\vec{x})\end{pmatrix}$$

<u>1. Methode zur Berechnung eines Vektorpotentials:</u> $\vec{w}$

$$w_1 = \int_0^{x_3} b_2\,dt - \int_0^{x_2} b_3\,dt = -2\cdot\left\{\int_0^{x_3} x_3^2\cdot x_1 dx_3 - \int_0^{x_3} x_1^2\cdot x_2 dx_2\right\} = -\frac{2}{3}\cdot x_3^2\cdot x_1 - x_1^2\cdot x_2^2$$

© Torben Nentwig 31.01.´06

$w_2 = -\int_0^{x_3} -b_1\,dt - \int_0^{x_2} b_3\,dt = 2\cdot\int_0^{x_3} x_2^2\cdot x_1 dx_3 = x_2^2\cdot x_3^2$ $\quad\vec{v}$ wollen wir zurückerhalten

$\vec{b} = \text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{w}$ $\quad$ aber $\vec{v} \neq \vec{w}$ $\quad \vec{v}-\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cdot x_3\cdot x_1 \\ 0 \\ x_3^2\cdot x_1^2 \end{pmatrix}$

1. Methode $\vec{b}$ vorgegeben Vektorpotential: $\vec{w} = \begin{pmatrix} \int_{x_3^0}^{x_3} b_2(x_1,x_2,t)dt - \int_{x_2^0}^{x_2} b_3(x_1,x_3,t)dt \\ -\int_{x_3^0}^{x_3} b_2(x_1,x_2,t)dt \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Methode $\vec{b}$ vorgegeben $\vec{b} = \text{rot } \vec{w}$ gesucht

$\vec{w}(\vec{x}) = \int_0^1 t\cdot b(t(\vec{x}-\vec{x}_0))\,dt \times (\vec{x}-\vec{x}_0)$

Beispiel: $\vec{x}_0 = 0$: $\vec{w}(\vec{x})$ im Unterschied zur 1. Methode

$$\vec{w}(\vec{x}) = \int_1^2 (-2)\cdot t\cdot \begin{vmatrix} t^3 & x_2^2\cdot x_3 \\ t^3 & x_3^2\cdot x_1 \\ t^3 & x_1^2\cdot x_2 \end{vmatrix} dt \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_2^2\cdot x_3 & x_3^2\cdot x_3 & x_1^2\cdot x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

Ergebnis: $\vec{w} = -\frac{2}{5}\begin{bmatrix} x_3^3\cdot x_1 - x_1^2\cdot x_2^2 \\ x_1^3\cdot x_2 - x_2^2\cdot x_3^2 \\ x_2^3\cdot x_3 - x_3^2\cdot x_1^2 \end{bmatrix}$

Wieder Gradientenfehler: $\vec{v}-\vec{w} = grad(\frac{1}{5}\cdot(x_1^3\cdot x_2^2 + x_2^2\cdot x_3^3 + x_2^3\cdot x_3^2))$

© Torben Nentwig 31.01.´06

19. Partielle Differentialgleichungen (PDGL)

19.1. Grundbegriffe und Beispiele:

PDGL sind Gleichungen für eine gesuchte Funktion $u = u(x_1,..., x_n)$ bzw. $\vec{u} = \vec{u}(x_1,...,x_n)$ in der partiellen Ableitung vorkommen. (natürlich von u bzw. $\vec{u}$)
Ordnung der PDGL ist vorgegeben durch die höchste Ableitungsordnung

- $-\Delta u = f$, $-\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot u + \frac{\partial}{\partial x} \cdot u - \frac{\partial}{\partial y} \cdot u = f(x, y)$ andere Schreibweise: $u_{xy} + u_x - u_y = f(x, y)$
  (PDGL 2. Ordnung)
- $u_t + u_x = 0$ (PDGL 1. Ordnung, aber nicht linear, denn u und seine Ableitungen treten nicht nur in 1. Potenz mit Vorfaktor auf – verwandt Burges-Gleichung)

Lösung einfachster PDGL:

Beispiel: $u_x = f(x, y) = x \cdot e^y + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^3$

y – behandeln wir zunächst als Konstante

→ $\int u_x(x, y)dx = \int (x \cdot e^y + y^3)dx$ → $u(x, y) + c_1(y) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^y + x \cdot y^3 + c_2(y)$

setze $c(y) = c_2(y) - c_1(y)$ und wir erhalten die Lösung: $\underline{u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^y + x \cdot y^3 + c(y)}$

Das ist die Gesamtheit der Lösungen der von uns betrachteten PDGL – „allg. Lösung“

Um eine einzige Lösung zu erhalten (Zielrichtung) brauchen wir Zusatzinformationen, so genannte Anfangs-/Randbedingungen.
Geben nun vor: $u(x=0, y) = \sin y$ $\forall y \in \mathbb{R}$ (bei x = Zeit wäre dies eine Anfangsbedingung)
Kontrollieren diese Bedingung für unsere Lösung: $u(0, y) = \frac{1}{2} 0^2 \cdot e^y + 0 \cdot y^3 + c(y) = \sin y$
→ $c(y) = \sin y$. Die gesuchte Lösung der PDGL mit der Zusatzbedingung $u(0, y) = \sin y$ ist:
$\underline{u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^y + x \cdot y^3 + \sin y}$

19.2. Methode der Separation der Veränderlichen / Trennung der Variablen:

- Erläuterung an einem Beispiel:

Finde u(x, t) so dass $\boxed{\text{PDGL: } u_{tt} + c^2 \cdot u_{xx} = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)}$
$\boxed{\text{Randbedingung: } u(0, t) = u(L, t) = 0 \qquad \forall t \in (0, \infty)}$ **Formel 19.1**
(19.1) PDGL: Wellengleichung, hyperbolische DGL

Separationsansatz: $\boxed{u(x,t) = X(x) \cdot T(t)}$
1.) Wobei $X:[0, L] \to \mathbb{R}$, $T:[0, \infty] \to \mathbb{R}$, 2mal steig differenzierbar **Formel 19.2**
2.) Einsetzen in PDGL: $\boxed{u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = T''(t) \cdot X(x) - c^2 \cdot T(t) \cdot X''(x) = 0}$ **Formel 19.3**
Randbedingung: $\boxed{X(0) \cdot T(t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \ \forall t \in (0, \infty)}$

© Torben Nentwig 31.01.´06

Formelles Dividieren der 1. Gleichung von (19.3) durch X(x)·T(t):

$$\boxed{\frac{T''(t)}{T(t)} - c^2 \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const.}}$$ **Formel 19.4**

→ gewöhnliche DGL: $\boxed{X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \text{ und } T''(t) - c^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0}$ **Formel 19.5**

Lösen zunächst (19.5): $\left.\begin{cases} X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}\right\}$ Eigenwertproblem

Lösungsansatz nach Euler: $X(x) = e^{\mu \cdot x}$ (Euler) → $\mu^2 - \lambda = 0$ Lösung: $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$

1. Fall: $\lambda = 0$: allgemeine Lösung: $X(x) = c_1 \cdot x + c_2$ RB: $c_1 = c_2 = 0$

2. Fall: $\lambda > 0$: allgemeine Lösung:

$X(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} = \tilde{c}_1 \cdot \cosh\sqrt{\lambda} \cdot x + \tilde{c}_1 \cdot \sinh\sqrt{\lambda} \cdot x$ RB: $c_1 = c_2 = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$

3. Fall: $\lambda < 0$: $\lambda = -\kappa^2$ mit ($\kappa > 0$) allgemeine Lösung: $X(x) = c_1 \cdot \cos\kappa \cdot x + c_2 \cdot \sin\kappa \cdot x$

$X(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$ → $c_1 = 0$

Nun $X(L) = 0 = c_2 \cdot \sin\kappa \cdot x$ → $\kappa = \frac{\pi \cdot k}{L}$, k = 1, 2,...

Die Funktion $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$ sind

so genannte Eigenfunktionen des Operators $\frac{d^2}{dx^2}$

zu den Eigenwerten $-\left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2 = \lambda_k$

$\int_0^L \sin^2\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot x\right) dx = \frac{L}{2}$ $\quad w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{2}}} \cdot X_k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$

Hier gilt: $\int_0^L (w_k(x))^2 dx = 1$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $(w_l, w_k)_{L=(0,L)} = \int_0^L w_l(x) \cdot w_k(x) dx = 0$ bei k = l

Lösen des T-Problems:

Die so genannten Eigenwerte λ liefern: $T''(t) + \left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot c^2 \cdot T(t) = 0$

Analog 3. Fall für X(x) → allg. Lösung: $T(t) = c_1^{\lambda_k} \cos\left(\frac{c \cdot k \cdot \pi}{L} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot t\right)\right)$

Ergebnis: die allgemeine Lösung der PDGL (19.1) ist:

$$\boxed{X(x) \cdot T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{A_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{L} \cdot t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot t\right)\right\} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot x\right)}$$ **Formel 19.6**

$\omega_K = \frac{c \cdot \pi \cdot k}{L}$ Frequenz, $\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ proportional der Amplitude

19.3. 1-dimensionale Wellengleichung:

Stellen hierfür Anfangsrandwertproblem (ARWP) auf: **Formel 19.7**

PDGL:	$u_{tt}(x, t) - c^2 \cdot u_{xx}(x, t) = f(x, t)$		$\forall (x, t) \in \Omega$	
RB:	$u(0, t) = u(L,t) = 0$		$\forall t \in [0, \infty)$	$\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$
AB:	$u(x, 0) = g(x)$	$u_t(x) = h(x)$	$\forall x \in [0, L]$	

Gegeben sind: f(x, t) = äußere Kraft (Beschleunigung)

g(x) – Anfangszahl g(0) = g(L) = 0

h(x) – Anfangsgeschwindigkeit h(0) = h(L) = 0

c > 0 Materialkonstante

© Torben Nentwig 31.01.´06

Bemerkung: Die Wellengleichung ist eine lineare PDGL 2. Ordnung. RB + AB sind linear.
→ Wir können mit dem Superpositionsprinzip arbeiten.

Deshalb lösen wir zunächst die homogene PDGL:

PDGL : $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0 = f(x, t)$ RB: $u(0, t) = u(L, t) = 0$

Ergebnis (vergleich oben): $u^{homogen}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) \right\} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$

Lösung der homogenen PDGL ist Superposition (Linearkombination) von Lösungen der homogenen PDGL.

<u>Anm.:</u> einfaches Ausrechnen liefert z.B. $\left[\frac{d^2}{dt^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \cdot \left\{ A_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) \right\} = 0$

Sei $u^p(x, t)$ Lösung der PDGL mit $f \neq 0$ setzt $w := u - u^p$ **Formel 19.8**

Einsetzen in PDGL: $\underbrace{u_{tt} - u^p_{tt}}_{w_{tt}} - c^2 \cdot (\underbrace{u_{xx} - u^p_{xx}}_{w_x}) = f - f = 0$

<u>Behandlung der Anfangsbedingungen:</u>

AB liefert uns die Koeffizienten $\{A_k, B_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\boxed{u(x,0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) \right\} \cdot X_k(x)\,|_{t=0}}$$

$$\boxed{X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)}$$

Formel 19.9

$$\boxed{u_t(x,0) = h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ B_k \cdot \left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot c}{L} \cdot t\right) \right\} \cdot X_k(x)\,|_{t=0}}$$

Frage: können g(x) und h(x) auch in der Gestalt:

$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \cdot X_k(x)$ und $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \cdot X_k(x)$ dargestellt werden? (Das ist das Problem der Vollständigkeit des Systems der $\{X_k(x)\}_{k=1}$ im Raum $\mathbb{L}_2(0, L)$.)

<u>Satz 19.1.:</u> (Entwicklung in den $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$)

<u>Voraussetzung:</u> $\varphi = \varphi(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$; φ sei stetig mit $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$; (RB der $X_k(x)$)

<u>Behauptung:</u> Es gibt eindeutig bestimmte Koeffizienten φ_k, so dass

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

Die φ_k sind erklärt als: $\boxed{\varphi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot x\right) dx \quad \forall k = 1, 2, ...}$ **Formel 19.10**

Das ist ein Skalarprodukt $\varphi_k = \frac{2}{L} \left(\varphi, X_k(x)\right)_{L_2(0,L)}$

Beweis: (mittel Fourier-Reihe)

Setzen $\varphi(x)$ ungerade fort auf [-L, L], wenden Fourier-Entwicklung an, von der fortgesetzten Funktion $\varphi : [-L, L] \to \mathbb{R}$

Da φ ungerade → Fourier-Entwicklung enthält nur Sinus-Terme!

Periode T = 2L → $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x)$ mit $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L}$ mit

$$b_k := \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot x) dx = \frac{2 \cdot 2}{2T} \cdot \int_0^L \varphi(x) \cdot X_k(x) dx = \varphi_k$$

→ $b_k = \varphi_k$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(x)$

© Torben Nentwig 31.01.´06

Also können wir g(x) und h(x) in $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eindeutig darstellen:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cdot X_k(x) \text{ und } h(x)=\sum_{k=1}^{\infty} H_k \cdot X_k(x) \qquad A_k = G_k\,,\ B_k = \left(\frac{L}{k\cdot\pi\cdot c}\right)H_k$$

$u^{hom}(x, t)$: $\quad u_{tt}^{hom} - c^2 \cdot u_{xx}^{hom} = 0$

RB: $\quad u(0, t) = u(L, t) = 0$

AB: $\quad u(x, 0) = g(x) \quad u_t(x, 0) = h(x)$

Formel 19.11

Lösung: $$\boxed{u^{hom}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{G_k \cdot \cos\left(\tfrac{k\cdot\pi\cdot c}{L}\cdot t\right)+\left(\tfrac{L}{k\cdot\pi\cdot c}\right)H_k \cdot \sin\left(\tfrac{k\cdot\pi\cdot c}{L}\cdot t\right)\right\}\cdot X_k(x)}$$

Problem B:

$u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = f(x, t)$; $\quad u(0, t) = u(L, t) = 0$; $\quad u(x, 0) = g(x) \quad u_t(x, 0) = h(x)$

Idee zu Problem B: Stelle f(x, t) in der Gestallt $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\cdot X_k(x)$ dar. Hier reicht als Voraussetzung die Stetigkeit von f.

Dabei sind die $F_k(t)$ erklärt durch: $F_k(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)X_k(x)dx$

Ansatz für die Lösung nach Plan B:

$\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{T}_k(t)\cdot X_k(x)$ (Hier sind die Randbedingungen schon erfüllt)

Hier gilt: $\int_0^L X_k(x)\cdot X_l(x)dx=\int_0^L \sin\left(\tfrac{k\cdot\pi}{L}\cdot x\right)\cdot\sin\left(\tfrac{l\cdot\pi}{L}\cdot x\right)dx=\begin{Bmatrix}0/k\neq l\\ \frac{L}{2}\end{Bmatrix}$

Funktionen stehen senkrecht aufeinander!

PDGL: $\quad \tilde{u}_{tt}-c^2\cdot\tilde{u}_{xx}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\tilde{T}''_k(t)\cdot X_k(x)-c^2\cdot\tilde{T}_k(t)\cdot X''_k(x)\right\}$

AB: $\quad =\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\tilde{T}_k(t)+c^2\cdot\left(\tfrac{k\cdot\pi}{L}\right)^2\cdot\tilde{T}_k(t)\right)\cdot X_k(x)\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{F_k(t)\cdot X_k(x)\right\}$

Hier erhalten wir für jedes k eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und rechte Seite Funktion

PDGL: $\quad \tilde{T}_k''(t)+c^2\cdot\left(\tfrac{k\cdot\pi}{L}\right)^2\cdot\tilde{T}_k(t)=F_k(t)$

AB: $\quad \tilde{T}_k(0)=G_k\,,\ \tilde{T}_k'(0)=H_k$

Formel 19.12

Ergebnis: $\quad \tilde{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{T}_k(t)\cdot X_k(x)$ ist eindeutig bestimmt durch die $\tilde{T}_k(t)$ als Lösung des AWP einer inhomogenen gewöhnlichen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

STOFFENDE

19.4. Lösung der elliptischen DGL:

$-\Delta u = f$ $\quad$ Für $\Omega = (0, L) \times (0, H)$

$u_{|\partial\Omega} = 0$

1. Schritt: Ansatz: $u(x_1, x_2) = X^1(x_1)\cdot X^2(x_2)$

$u(x_1,x_2)=\sum u_{kl}\cdot X_k^1(x_1)\cdot X_l^2(x_2) \qquad X_k^1(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\cdot\sin\left(\tfrac{k\cdot\pi}{L}\cdot x_1\right),\ X_l^2(x_2)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{H}}\cdot\sin\left(\tfrac{l\cdot\pi}{H}\cdot x_2\right)$

© Torben Nentwig 31.01.´06

$$-\Delta \cdot X_k^1(x_1) \cdot X_l^2(x_2) = -\left(\frac{d^2}{dx_1^2} X_k^1(x_1)\right) \cdot X_l^2(x_2) - \left(\frac{d^2}{dx_1^2} X_l^2(x_2)\right) \cdot X_k^1(x_1)$$

$$= \left(\left(\tfrac{k\cdot\pi}{L}\right)^2 + \left(\tfrac{k\cdot\pi}{H}\right)^2\right) \cdot X_k^1(x_1) \cdot X_l^2(x_2)$$

RB sind erfüllt. Setzen $w_{kl}(x_1, x_2) = X_k^1(x_1) \cdot X_l^2(x_2)$. Berechnen $f(x_1, x_2)$ in den $w_{kl}(x_1, x_2)$.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f_{kl} \cdot w_{kl}(x_1, x_2) = -\Delta u(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \lambda_{kl}(x_1, x_2) \cdot u_{kl}$$

u_{kl} – Entwicklungs-koeffizient der Funktion u

$$f_{kl} := \int_0^L \int_0^H f(x_1, x_2) \cdot w_{kl}(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

Lösung: $u(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{f_{kl}}{\lambda_{kl}} w_{kl}(x_1, x_2)$

19.5. Wärmeleitungsgleichung:

PDGL:	$u_t(x, t) - a^2 \cdot u_{xx}(t, x) = f(x, t)$	$\forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$	**Formel 19.13**
RB :	$u(0, t) = h_L(t)$ $u(L, t) = h_R(t)$		
AB:	$u(x, 0) = g(x)$	$\forall t \in [0, \infty]$ $\forall x \in [0, L]$	

PDGL 2. Ordnung – linear – parabolisch
Physikalisches Problem:

Anfangsbedingungen/-temperatur
Verträglichkeitsbedingung: $\boxed{h_L(0) = g(0)}$ und $\boxed{h_R(0) = g(L)}$ **Formel 19.14**
f(x, t) – äu0ere Wärmequellenverteilung
g(x) – Temperaturprofil $\forall x$ zum Zeitpunkt t = 0
h_L, h_R – Temperaturverteilung am linken oder rechten Rand
a > 0 (Materialkonstante mit Bezug zur Wärmeleitfähigkeit)

(**A**) Behandeln Spezialfall: homogene Randbedingungen
$h_L(t) = h_R(t) = 0$, → $g(0) = g(L) = 0$
Benutzen $X_k(x)$ mit $X''_k(x) = \left(\frac{k\cdot\pi}{L}\right)^2 \cdot X_k(x)$ $\forall k$

<u>Satz 19.2.:</u> (**Entwicklung der Funktion**)
g(x), f(x, t), u(x, t)

Diese Entwicklungen liefern: $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cdot X_k(x)$, $f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \cdot X_k(x)$

Lösung: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$ //$T_k(t)$ sind von denen der Wellengleichung verschieden

Setzen voraus f(0, t) = f(L, t) = 0 //keine Quellen auf dem Rand (Zusatzvoraussetzung)
Setzen den Ansatz für u in die PDGL ein und können wieder gültige gewöhnliche DGL für $T_k(t)$ ablesen. ($X_k(x) \perp X_l(x)$ $\forall k \neq l$

$$u_t - a^2 \cdot u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T'_k(t) - a^2 \cdot \left(\tfrac{k^2\cdot\pi^2}{L^2}\right) \cdot T_k(t)\right) \cdot X_k(x) = f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \cdot X_k(x)$$ **Formel 19.15**

© Torben Nentwig 31.01.´06

AB: $u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cdot X_k(x)$ → ∀1, 2, ... suchen $T'_k(t) - a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot T_k(t) = F_k(t)$

GDGL mit AB $T_k(0) = G_k$ **Formel 19.16**

Die Lösung der GDGL liefert mit den AB die gesuchte Funktion u(x, t). Das Superpositionsprinzip sagt aus: Allgemeine Lösung $T_k(t)$ lässt sich als Lösung der homogenen GDGL + die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung darstellen.

Lösen der homogenen Gleichung: $T'_k(t) - a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot T_k(t) = 0$ $(*)_H$

Lösung: Trennung der Variablen: $\int_0^t \frac{T'_{k,H}(t)}{T_{k,H}(t)} dt = a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \int_0^t 1 dt$

→ $\ln T_{k,H}(t) = a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) t + c$ → $T_{k,H}(t) = c_1 \cdot e^{\wedge}\left(a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t\right) = c_1 \cdot e^{a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) t}$

suchen nun spezielle Lösung von (*): $T'_k(t) - a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot T_k(t) = 0$ (*)

Variation der Konstanten: Suchen partikuläre Lösung: $T_{k,P}(t) = c(t) \cdot e^{\wedge}\left(a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t\right)$

Einsetzen in (*) liefert: $c'(t) = F_k(t) \cdot e^{\wedge}\left(a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) \cdot t\right)$ $a^2 \cdot \left(\frac{k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right) = b_k$

→ $c(t) = \int_0^t F_k(t) \cdot e^{b_k \cdot t} dt = c(0) = 0$ → $T_{k,P}(t) = c(t) \cdot e^{(b_k \cdot t)}$ → $\underbrace{T_{k,P}(t)}_{=0} + \underbrace{c_1}_{=1} \cdot e^{(b_k \cdot t)} |_{t=0} = G_k$

Beobachtung: Der Einfluss der AB klingt in t(t → ∞) exponentiell ab.

(**B**) inhomogene Randbedingung: $h_L \neq 0$ $h_R(t) \neq 0$

Basteltrick der Hilfsfunktion: $w(x,t) := h_L(t) + \left(h_R(t) - h_R(t)\right) \cdot \frac{x}{L}$

(w(0, t) = h_L(t), w(L, t) = h_R(t))

Summentrick: Suchen u(x, t) = w(x, t) + $\tilde{u}$ (x, t)

PDGL: $u_t - a^2 \cdot u_{xx} = (w + \tilde{u})_t - a^2 \cdot (w + \tilde{u})_{xx} = w_t + \tilde{u}_t - a^2 \cdot w_{xx} - a^2 \cdot \tilde{u}_{xx} = f(x,t)$

Umstellen der Gleichung liefert: $\tilde{u}_t - a^2 \cdot u_{xx} = f(x,t) - w_t =: \tilde{f}(x,t)$

AB: u(x, 0) 0 g(x) → $\tilde{u}$ (x, 0) = g(x) – w(x, 0)

RB: $\tilde{u}$ (0, t) = $\tilde{u}$ (0, t) – w(0, t) = h_L(t) – h_L(t) = 0

$\tilde{u}$ (L, t) = $\tilde{u}$ (L, t) – w(L, t) = h_R(t) – h_R (t) = 0

Damit haben wir für $\tilde{u}$ nur noch ein Problem mit homogener Randbedingung zu lösen. Das haben wir in (A) erledigt → u(x, t) = w(x, t) + $\tilde{u}$ (x, t).

© Torben Nentwig 31.01.´06