

Name: .....

Studiengang: .....

Mat.-Nr.: .....

**Klausur Stochastik für Ingenieure der Studiengänge der FVST und ETIT**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Note
Punkte (Soll)	5	5	4	6	6	4	30	
Punkte (Ist)								

**Hinweise:** Die Klausur besteht aus **6** Aufgaben. Gewertet werden nur Lösungen, deren Rechengang logisch nachvollziehbar ist. Auf dieses Aufgabenblatt (oben) und auf jedes Lösungsblatt *Name, Matrikelnummer und Studiengang* schreiben.

**1) (5 Punkte)** Von einer Maschine gibt es Ausführungen mit zwei und mit vier Bauteilen.

- Während einer Arbeitswoche fallen die Bauteile unabhängig voneinander, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.03$  aus. Die Maschine kann weiter arbeiten, wenn mindestens die Hälfte der Bauteile funktioniert. Fällt dann eher eine Maschine mit zwei oder mit vier Bauteilen aus? Geben Sie jeweils ein geeignetes stochastisches Modell an und bestimmen Sie die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten der beiden Maschinenausführungen.
- Die Maschine stellt Zulieferteile in großer Anzahl her. Stichproben haben gezeigt, dass 5% der Zulieferteile Ausschuss sind. Berechnen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Lieferung von 5000 Zulieferteilen mehr als 280 Teile Ausschuss sind.

**2) (5 Punkte)** In einer Fabrik werden bestimmte Werkstücke an drei Maschinen gefertigt. Die Maschine 1 liefert 50% der Produktion mit einem Ausschussanteil von 3%, die Maschine 2 liefert 30% mit einem Ausschussanteil von 1% und die Maschine 3 liefert 20% bei einem Ausschussanteil von 2%.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Gesamtproduktion entnommenes Werkstück Ausschuss ist?
- Ein Werkstück sei Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von der Maschine 1 gefertigt wurde?

**3) (4 Punkte)** Es sei  $X$  eine stetig-verteilte reelle Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x < 0 \\ \frac{x}{10} + \frac{1}{20} & , \text{ für } 0 \leq x < 4 \\ 0 & , \text{ für } x \geq 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie  $P(X \geq 2)$ ,  $P(1 < X \leq 2)$  und  $P(X = 3)$  sowie den Erwartungswert  $E(X)$ .

**Bitte wenden!**

4) (6 Punkte) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  habe die folgenden Werte:

	X	-1	0	1
Y				
	0	0.1	0.2	0.1
	1	0.25	0.1	0.25

- Berechnen Sie  $P(X \geq 0, Y \leq 0)$ .
- Bestimmen Sie die Verteilung von  $X$ , die Verteilung von  $Y$  und die Verteilung von  $Z_1 = X + Y$ .
- Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  und  $Y$ .
- Untersuchen Sie, ob  $X$  und  $Y$  unabhängig sind.

5) (6 Punkte) Aus Erfahrung sei bekannt, dass man die Brenndauer in Stunden einer bestimmten Sorte von Glühbirnen gut durch eine stetige Zufallsgröße  $X$  mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\theta x \cdot e^{-\theta x^2} & , \text{ für } x > 0 \\ 0 & , \text{ für } x \leq 0. \end{cases}$$

beschreiben kann, wobei  $\theta > 0$ .

Von 8 dieser Glühbirnen wurde unabhängig voneinander die Brenndauer ermittelt:

1530; 1173; 1832; 1075; 1539; 998; 2083; 693.

- Schätzen Sie das für diese Sorte von Glühbirnen passende  $\theta$  mittels der Maximum-Likelihood-Methode.
- Geben Sie die Verteilungsfunktion für  $X$  für ein allgemeines  $\theta > 0$  an.  
Berechnen Sie für  $\theta = 5 \cdot 10^{-7}$ 
  - $P(X > 150)$ ,
  - $P(X \leq 1500)$ .

Hinweis:  $\int_a^b g'(x)e^{g(x)} dx = e^{g(x)} \Big|_a^b$ .

6) (4 Punkte) Im Rahmen einer Materialprüfung wurde bei 7 Walzen jeweils die Dicke des Chrommantels durch Abschleifen bestimmt. Die Ergebnisse der Messungen sind in folgender Tabelle wiedergegeben:

Walzennummer	1	2	3	4	5	6	7
Dicke [mm]	2.0	1.4	1.2	1.1	2.2	1.8	1.7

Wir nehmen an, dass die Manteldicken unabhängig und identisch normal- $(\mu, \sigma^2)$ -verteilt sind. Die empirische Standardabweichung  $s_7$  hat den Wert 0.411.

- Bestimmen Sie ein 90%-Konfidenzintervall für die mittlere Dicke  $\mu$  des Chrommantels.
- Testen Sie zum Niveau  $\alpha = 0.05$  die Nullhypothese, dass die mittlere Manteldicke  $\mu$  mindestens 2 mm beträgt.

# Lösungen Klausur 23.9.13

① a) Maschine mit 2 Bauteilen:

$$P(\text{Ausfall}) = 0.0009$$

Maschine mit 4 Bauteilen:

$$P(\text{Ausfall}) = 0.0004$$

b) 0.0239 (mit Steifheitskorr.)  
0.0217 (ohne -k- )

② a) 0.022

b) 0.682

③  $P(X \geq 2) = 0.7$  ;  $P(1 < X \leq 2) = 0.2$  ;  $P(X=3) = 0$

$$E(X) = \frac{38}{15} = 2.53$$

④ a)  $P(X \geq 0, Y \leq 0) = 0.3$

b) X:

$x_i$	-1	0	1
$p_i$	0.35	0.3	0.35

Y:

$y_i$	0	1
$p_i$	0.4	0.6

Z = X+Y

$z_i$	-1	0	1	2
$p_i$	0.1	0.45	0.2	0.25

c) nicht unabhängig

⑤ a)  $\hat{\theta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1} \approx 4.87 \cdot 10^{-7}$

$$e) F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-0.005t^2}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$P(X > 150) = e^{-5 \cdot 10^{-7} \cdot 150^2} \approx e^{-0.1175} \approx 0.8888$$

$$P(X \leq 150) = 1 - e^{-5 \cdot 10^{-7} \cdot 150^2} \approx 0.1175$$

6) a) 90% - Konfidenzintervall:  
 $[1.33; 1.93]$

b) Test  $H_0: \mu_0 = 2 \text{ mm}$

$H_1: \mu < 2 \text{ mm}$

$H_0$  wird abgelehnt; die mittlere Manteldicke ist kleiner als 2 mm.

RECHNUNG EN BEZUG AUF  
 DIE VERGEBENEN ANGABEN  
 WIRD KEINE VERANTWORTUNG  
 FÜR FOLGENDEN SCHADEN  
 ANGENOMMEN

WWW.YOURFONE.DE

19.90  
 EURO  
 MONAT  
 24.95