Fakultät für Mathematik,
PD. Dr. B. Rummler Prof. Dr. G. Christoph

22.07.2009

Name: ..... Studiengang: .....

Mat.-Nr.: .....

Klausur Mathematik III/Stochastik für Ingenieure für die Studiengänge STK, ETIT und IMST

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe	Note
Punkte (Soll)	7	5	5	3	5	6	4	5	40	-
Punkte (Ist)										

Hinweise: Gewertet werden nur Lösungen, deren Rechengang logisch nachvollziehbar ist. Auf dieses Aufgabenblatt (oben) und auf jedes Lösungsblatt *Name, Matrikelnummer und Studiengang* schreiben.

1) Lösen Sie das Anfangs-Rand-Wert-Problem für $u : [0,\infty) \times [0,4] \longrightarrow \mathbb{E}^1$: (7 Punkte)

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - 4 \cdot u_{xx}(t,x) &= 0 && \forall (t,x) \in (0,\infty) \times (0,4) \\ u(t,0) = u(t,4) &= 0 && \forall t \in [0,\infty) \\ u(0,x) &= \sin(\tfrac{\pi x}{2}) - 2\sin(\pi x) && \forall x \in [0,4] \end{aligned}$$

2) Berechnen Sie das Volumen $|B|$ des Ellipsoides im $\mathbb{E}^3$, mit den Halbachsen a, b und c: (5 Punkte)

$$B := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} < 1, 0 < a, b, c < \infty\}\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie angepasste Kugelkoordinaten.

3) Vorgegeben sei das Vektorfeld $\underline{v} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ durch: (5 Punkte)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \sinh(x_2)\sin(x_3) \\ x_1\cosh(x_2)\sin(x_3) \\ x_1\sinh(x_2)\cos(x_3) \end{bmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob zu $\underline{v}$ eine Potentialfunktion $P : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^1$ existiert, so dass $\underline{v} = \underline{\nabla} P$ gilt, und berechnen Sie die Funktion P !

4) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\underline{u} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ durch die (3 Punkte)
geschlossene Randfläche ∂B der Kugel $B := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^3 : ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^3} \leq 1\}$ bei:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_3 \\ 3x_2 - x_1 \\ 3x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie hier das Oberflächenintegral 2. Art: $\oint_{\partial B} \underline{u}^T \underline{n}\, d\mathcal{O} = \oint_{\partial B} \underline{u}^T d\underline{\mathcal{O}}$,
mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes!

Bitte wenden!

5) Von einem Zufallsexperiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.4$ werden 6 unabhängige Wiederholungen durchgeführt. Die Zufallsgröße S_6 bezeichne dabei die Anzahl der Erfolge bei 6 Versuchen. (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis, dass genau zwei Erfolge auftreten.

b) Wie oft muss das Experiment wenigstens wiederholt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 mindestens einen Erfolg zu erzielen?

c) Das Experiment wird $n = 400$ Mal wiederholt. Die Anzahl der Erfolge beträgt mehr als 148 und weniger als 172. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis näherungsweise mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes (mit Stetigkeitskorrektur).

6) Die Lieferfrist (in Zeiteinheiten) für ein Ersatzteil sei eine stetig verteilte Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion (6 Punkte)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(4-x) & \text{für} \quad 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \text{ oder } x > 4 \end{cases} .$$

a) Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X(t)$.

b) Ermitteln sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

A: Die Lieferfrist beträgt höchstens drei Zeiteinheiten

B: Die Lieferfrist beträgt genau zwei Zeiteinheiten

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 3 \mid X > 2)$.

7) Auf einer automatischen Fertigungsanlage wird ein Werkstück mit einer Bohrung versehen. Der Durchmesser der Bohrung kann als normalverteilte Zufallsgröße aufgefasst werden. Im Mittel ist der Durchmesser der Bohrungen 30.0 mm groß bei einer Standardabweichung von 0.2 mm. Die nachfolgenden Produktionsgänge erlauben eine Toleranz zwischen 29.8 mm und 30.2 mm. Ermitteln Sie, welcher Anteil der Werkstücke in diesem Bereich liegt. (4 Punkte)

8) In der Tabelle ist die gemeinsame Verteilung der Zufallsgrößen X und Y gegeben: (5 Punkte)

X / Y	0	1	2	3
-1	0.05	0.07	0.08	0.10
0	0.07	0.10	0.13	0.10
1	0.13	0.08	0.04	0.05

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1, Y \leq 0)$.

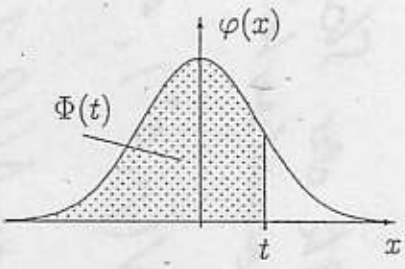
b) Bestimmen Sie jeweils die Verteilung von X und Y.

c) Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

d) Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen X und Y.

Tafeln

Tafel 1: Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ und Quantile der Standardnormalverteilung



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dx, \qquad -\infty < t < \infty,$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t) \qquad \text{für} \quad t > 0.$$

t	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Tabelle der Quantile z_q der Standardnormalverteilung

q	0.90	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995	0.999	0.9995
z_q	1.28	1.64	1.96	2.05	2.33	2.58	3.09	3.29

Beachte: $z_q = -z_{1-q}$ für $q \leq 0.5$.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, d.h. die Dichte ist

$$\varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Wir berechnen $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx \overset{*}{=}$$

(mit $u = (x-\mu)/\sigma$ ergiben sich $x = \sigma u + \mu$ und $dx = \sigma\, du$)

$$\overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) e^{-u^2/2}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2/2}\, du + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \mu,$$

da $\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2/2}\, du = 0$ (ungerade Fkt. über symmetr. Intervall)

sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1 = \Phi(\infty)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, du = \sigma^2,$$ da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2/2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{u} \cdot \underline{u e^{-u^2/2}}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[u(-e^{-u^2/2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du \right] = 1,$$

da $u(-e^{-u^2/2})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ (Bernoulli, de Hospitale)

und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \Phi(\infty) = 1.$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ – Dichte der Standard-normalverteilung

Beachte: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann folgt:

$$Y := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$