

Script zur Einführung in die Grundlagen der Fehlerrechnung

Ein Autofahrer will von Magdeburg nach Hannover fahren.

Er möchte gern wissen, wie lange er dafür braucht und vielleicht auch wieviel Benzin er verbrauchen wird. Wie geht er vor?

- Berechnung Fahrzeit: $\text{Zeit} = \text{Entfernung} / \text{durchschnittliche Geschwindigkeit}$
- Berechnung Benzinverbrauch: $\text{Verbrauch} = \text{Entfernung} \cdot \text{mittlerer Kilometerverbrauch}$

Beide Werte werden sich am Ende der Fahrt als fehlerbehaftet (leicht falsch) erweisen - wetten?!

Gleiches geschieht bei jeder Messung, die wir im Labor durchführen.

Messgeräte sind in ihrer Genauigkeit oft sehr relativ, Körper sind lange nicht so homogen in ihren Eigenschaften, wie wir es gern hätten.

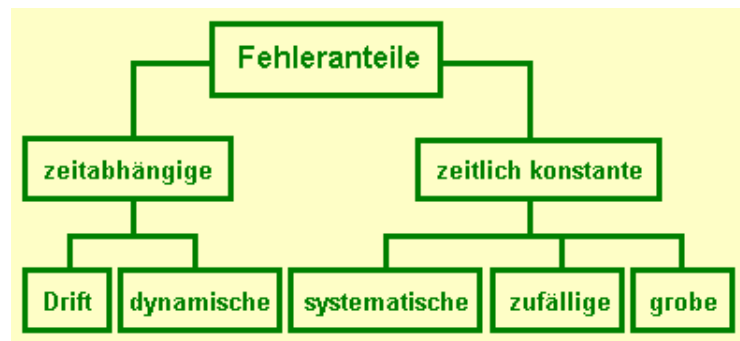
Das Resultat der Überlegung:

Wir werden unweigerlich bei jeder Messung Fehler machen; jedes Messergebnis wird fehlerbehaftet sein.

Wir können also Messfehler nicht gänzlich vermeiden - wir müssen lernen mit ihnen umzugehen.

Wir müssen lernen:

- **Fehler einzelner Größen einzuschätzen**
(z.B. Fehler in der Entfernungsangabe nach Hannover, Abweichungen vom durchschnittlichen Benzinverbrauch, Abweichungen in der kalkulierten Durchschnittsgeschwindigkeit)
- **Fehler des Resultats einzuschätzen**
(Wie setzt sich der Fehler in der Fahrzeit aus Fehlern in der Entfernungsangabe und Abweichungen in der durchschnittlichen Geschwindigkeit zusammen?).



Konzentrieren wir uns im weiteren auf die **zeitlich konstanten** Fehleranteile.

Wir unterscheiden:

Grobe Fehler:

sind vermeidbare Fehler und sollten auch vermieden werden.

In diese Kategorie zählen solche Fehler wie defekte Messgeräte, ungeeignete Messmittel, offensichtliche Verfälschungen am Messgegenstand.

Systematische Fehler:

beeinflussen das Messergebnis stets im gleichen Sinn und ändern sich mit einem Wechsel der Versuchseinrichtung.

Dazu gerechnet werden :

- Fehlanzeigen wegen fehlerbehafteter Eichung (Kalibrierung)
- Alterung der Messgeräte
- Ungenauigkeit infolge vorangegangener Überlastung u.ä.
- Unvollkommenheit des Messgegenstandes (Inhomogenitäten, Mangel an Reinheit)
- Veränderung durch die Messung (Deformation durch Messgerät o.ä.)
- äußere Einflüsse (Luftauftrieb, äußere Störfelder)
- Verlassen des Gültigkeitsbereichs phys. Gesetze (z.B. Elastizitätsgrenze)

Zufällige Fehler:

haben zufälligen, statistischen Charakter. Das bedeutet, der gewonnene Messwert schwankt nach oben und nach unten.

Ursachen sind z.B.

- Ablese-ungenauigkeiten
- Umwelteinflüsse (Temperatur, Netzspannung u.a.)
- Quanteneffekte (Rauschen, Fluktuationen)

Einige der zufälligen Fehler sind mit hohem Aufwand vermeidbar, andere nicht.

Hier stellen sich die Fragen:

- Wie hoch treibt man den Aufwand?
- Ist es vertretbar mit dem Fehler zu leben, wenn man ihn kennt und berücksichtigt?

Fehlertheorie

Ziel aller Betrachtungen muss es also sein, geeignete Näherungswerte und Unsicherheitsintervalle für die gemessenen Größen zu ermitteln und mit dem Messergebnis anzugeben.

Das gehört zur Kultur eines jeden Experiments - auch wenn's schwer fällt.

Es gilt aus einem ganzen Komplex von Möglichkeiten die geeigneten Methoden für jedes Experiment speziell auszuwählen und anzuwenden. Dabei existiert durchaus ein gewisser "Ermessensspielraum" des Experimentators.

Dazu stehen eine Reihe von Werkzeugen zur Verfügung:

1. Fehlerabschätzung
2. Fehlerstatistik
3. lineare Fehlerfortpflanzung
4. Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

1. Fehlerabschätzung

- wird benutzt, wenn man eine Größe nur einmal misst,
- kennzeichnet die mögliche Abweichung des Messwertes vom "wahren Wert".

So wie man diesen wahren Wert einer Messgröße nicht kennt (und auch nie genau kennen wird) ist natürlich auch die Abweichung der Messung von diesem wahren Wert unbekannt.

Statt des "wahren Fehlers" benutzt man zur Charakterisierung der Messung die maximal mögliche Abweichung des Messwertes vom wahren Wert - man bezeichnet diese Größe als **Größtfehler Δx** .

Dieser Größtfehler Δx muss abgeschätzt werden, wobei im wesentlichen 2 Bestandteile eingehen:

- die Garantiefehlergrenze des Messgerätes (vom Hersteller gegeben - siehe Bedienungsanleitung)
- ein abgeschätzter Anteil, der sich nach der Sorgfalt des Experimentierens, konkreten Bedingungen des Experiments, der Skalenteilung des Messgerätes u.ä. richtet.

Beispiel:

Auf einem Spannungsmesser ist der Garantiefehler für Gleichspannungsbereiche (100 mV bis 1000 V) mit $\pm 1,5\%$ angegeben.

Wir messen im Messbereich 50 V.

Damit ergibt sich ein Garantiefehler von 0,75 V.

Als Ablesefehler setzt man die Hälfte des Abstandes der Teilungsstriche an - im Beispiel 0,25 V

In der Summe ergibt sich daraus ein Größtfehler von 1 V.

2. Fehlerstatistik

- wird benutzt, wenn man eine Größe mehrfach mißt.

Naheliegender ist der Gedanke, aus den gemessenen Werten den Mittelwert zu bilden und mit diesem weiter zu arbeiten. Das ist sicher nicht falsch, bringt uns aber bezüglich der fast philosophischen Betrachtungen um den "wahren Wert" sowie entsprechende Fehler nicht viel weiter.

Wie kann also eine Messung sowie die entsprechende Auswertung aussehen?

Wie messen die betrachtete Größe genau n mal.

Sicher wird unsere Messung um so genauer, je größer wir n wählen.

Die im folgenden betrachteten statistischen Verfahren sind ohnehin nur für sehr große n korrekt (genauer: Sie gelten für $n \rightarrow \infty$).

Wir versuchen nun, die Messwerte in einem Diagramm abzutragen, um uns ein Bild über ihre Lage zu verschaffen.

Was bemerken wir?

Wenn jede einzelne Messung sehr sorgfältig mit maximal möglicher Genauigkeit ausgeführt wurde, sollte kaum ein Messwert doppelt vorkommen.

Dieses Ergebnis hilft nicht recht weiter.

Was lässt sich tun?

Wir tragen nicht jeden Messwert einzeln ab, sondern bilden Gruppen von Messwerten. Die Gruppen bilden wir immer mit benachbarten Messwerten - wir bilden sogenannte "Klassen", in die wir die Messwerte einsortieren:

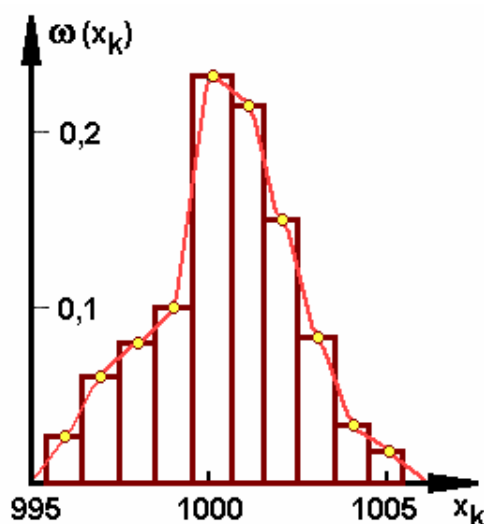
Üblicherweise teilt man die Spanne zwischen dem größten und dem kleinsten Messwert durch die Wurzel aus n , subtrahiert 2 und erhält damit die Klasseneinteilung.

Bei 100 Messwerten wäre also eine Einteilung in 8 Klassen sinnvoll.

Nun lassen sich im oben genannten Diagramm die Messwerte je Klassen als Säulendiagramm abtragen.

Üblicherweise wird allerdings angegeben wie sich die Messwerte auf die einzelnen Intervalle verteilen:

$\omega(x_k)$ wird abgetragen, d.h. die Anzahl je Klasse wird durch die Gesamtzahl der Messwerte (im Beispiel durch 100) sowie die Breite der Klasse geteilt.



Beispiel:

Messwerte- Histogramm mit rot eingezeichnetem Häufigkeitspolynom

Zahl der Messwerte Δn_k , die in einen Abschnitt Δx_k fallen:

$$\Delta n_k = \Delta w(x_k) \cdot n \cdot \Delta x_k$$

Verbindet man jeweils die Säulenmitten erhält man ein Häufigkeitspolynom.

Wird die Zahl der Messungen vergrößert und die Intervallteilung verfeinert, so nähert sich die Kurve erfahrungsgemäß meistens einer Glockenkurve, der **Gauß'schen Normalverteilung**.

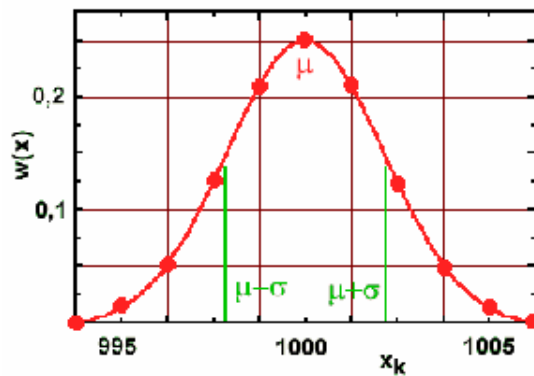


Abbildung:
Gauß'sche Normalverteilung

$$\omega(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

als Parameter enthält diese Verteilungsfunktion:

μ - Erwartungswert, Zentralwert
 σ - Standardabweichung

Dabei stellt μ das Maximum der Verteilungskurve und σ einen Qualitätsparameter der Verteilungskurve dar, der den **Abstand der Wendepunkte in der Kurve vom Zentralwert** angibt.

Was gibt uns das alles?

Wir haben zumindest verschiedene Parameter erhalten, mit denen wir weiterarbeiten können:

- μ stellt in gewisser Weise den Mittelwert dar, der als Messwertemittel dann weiterverarbeitet werden kann.
- σ stellt graphisch gesehen den Abstand der Wendepunkte in unserer Kurve vom Zentralwert dar.

Da wir aber eine fest vorgegebene Verteilung (Gauß) annehmen, gibt uns s mehr:

- Im Intervall $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ befinden sich ca. 68% aller Messwerte.
- Im Intervall $\mu - 2\sigma$ bis $\mu + 2\sigma$ befinden sich ca. 95% aller Messwerte.
- Im Intervall $\mu - 3\sigma$ bis $\mu + 3\sigma$ befinden sich ca. 99,7% aller Messwerte.

Problematisch ist einzig die Tatsache, dass die oben genannten Gesetzmäßigkeiten nur bei unendlich vielen Werte gelten.

Solange möchten Sie sicher nicht messen?

Deshalb hat man Ersatz geschaffen und benutzt folgende Kenngrößen für Messungen, die nur näherungsweise unendlich oft durchgeführt wurden:

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ Mittelwert (als Näherung für den wahren Wert)
- $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$ empirische Standardabweichung (als Näherung für s)

Neu eingeführt werden kann nun die Größe

- $\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$ Vertrauensbereich.

Dabei handelt es sich um eine Größe, die in engem Zusammenhang mit der empirischen Streubreite (im weiteren Streubreite) steht. Sie gibt ein Intervall an, dass wie die Streubreite ober- und unterhalb des Mittelwertes abgetragen wird.

In dem so durch den Vertrauensbereich abgegrenzte Intervall befindet sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% der mit der Messung eigentlich gesuchte "wahre Wert".

Verdoppeln wir das Intervall, befindet sich der wahre Wert darin mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95%, im dreifachen Intervall mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7%.

Einschränkend sei noch einmal erinnert:

Das Gesagte bezieht sich auf eine Zahl von Messungen, die praktisch unendlich groß ist. Für kleinere Zahlen von Messungen muss der Vertrauensbereich nach oben korrigiert werden; es wird ein Korrekturfaktor (t) eingeführt, der einen Ausgleich schaffen soll. Mit diesem Faktor ist dann der Wert des Vertrauensbereichs zu multiplizieren. Verschiedentlich wird auch die statistische Sicherheit nicht getrennt, sondern gemeinsam mit der Berücksichtigung der Stichprobenzahl verankert, was sich in dem Faktor t ausdrücken lässt.

Zahl der Messungen n	Faktor t bei 99,7% Sicherheit
2	235,0
3	19,0
4	8,2
5	6,6
6	5,5
7	4,9
8	4,5
9	4,3
10	4,1
15	3,6
20	3,3
100	3,0

Statistische Faktoren bei
Stichprobenmessungen
(Zahl der Messungen n begrenzt)

Damit ergibt sich letztendlich für die Angabe experimentell ermittelter Größen bei Mehrfachmessung folgende Form:

$$x = \bar{x} \pm t \cdot \bar{s}$$

3. Messunsicherheit

In den beiden vorangegangenen Kapiteln ist klar geworden, wie man Fehler einer unmittelbaren Messung behandelt.

Entweder wurde der Fehler durch eine Fehlerabschätzung aus den Daten des Messgerätes gewonnen oder durch Fehlerstatistik aus einer Messreihe ermittelt.

Wenn wir uns aber an das Bild aus Abschnitt 1 erinnern wird klar, dass es mehr zu berücksichtigen gilt. Wieder wollen wir uns auf zeitlich konstante Fehleranteile konzentrieren - wir sehen aber, dass sich die Summe aller möglichen Fehler (Fehler werden immer addiert !) aus mehreren Anteilen zusammensetzt.

- Bei Einfachmessung geht der Garantiefehler des Messgerätes ein, der Ablesefehler des Experimentators, Fehler, die aus Umwelteinflüssen resultieren und gegebenenfalls noch vieles andere. Alle diese Fehler werden so gut es eben geht abgeschätzt, addiert und bilden in ihrer Gesamtheit die sogenannte Messunsicherheit.
- Bei Mehrfachmessung ist die Lage etwas komplizierter. Hier gilt es den statistisch ermittelten Vertrauensbereich zu berücksichtigen, gegebenenfalls aber auch Fehler wie die Garantiefehlergrenze des Messgerätes (ist ein Maßstab z.B. zu kurz, ergibt sich ein systematischer Fehler, der im Vertrauensbereich keinen Niederschlag findet !), Umwelteinflüsse u.ä. Auch hier werden die einzelnen Fehleranteile addiert (der Vertrauensbereich mit der entsprechend vereinbarten statistischen Sicherheit - meist Faktor 2t) und ergeben die Messunsicherheit.

4. Fehlerfortpflanzung

Schwierig wird es, wenn das von uns gewünschte Endergebnis erst durch eine Rechnung ermittelt werden muss, in die verschiedene fehlerbehaftete Größen eingehen.

Wir erinnern uns an das Beispiel ganz am Anfang:

Ein Auto fährt von Magdeburg nach Hannover; wie viel Benzin wird verbraucht?

Berechnung des Benzinverbrauchs: Verbrauch = Entfernung · durchschnittlicher Kilometersverbrauch

Hier sind 2 fehlerbehaftete Größen im Spiel:

- die Entfernungsangabe mit ihrem Messfehler,
- der durchschnittliche Benzinverbrauch mit Messfehler.

Die in die Rechnung eingehenden Fehler müssen vorab ermittelt werden oder bekannt sein.

Dann lässt sich die interessierende Größe - der zu erwartende Benzinverbrauch sowie die entsprechende "Unschärfe", d.h. der Fehler im Benzinverbrauch, ermitteln.

Sie wissen dann, wie viel Benzin Sie im günstigen oder ungünstigen Fall tanken müssen, um Hannover zu erreichen.

Wie bereits bei der Behandlung des Fehlers bei unmittelbarer Messung existieren auch hier, bei der Behandlung des Fehlers einer mittelbaren Messung, 2 Vorgehensweisen um zu ermitteln, wie sich die Fehler der Einzelgrößen zum Fehler des Resultats fortpflanzen:

- die lineare Fehlerfortpflanzung
- die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.

Wann benutzt man nun welchen der beiden Formalismen?

Diese Frage ist nicht ganz einfach zu beantworten - aber einen Versuch sollten wir schon wagen:

- die lineare Fehlerfortpflanzung wird benutzt, wenn die eingehenden Einzelfehler durch Fehlerabschätzung ermittelt wurden, d.h. bei Einzelmessungen.
Als Fehleranteile gehen hier die einzelnen Messunsicherheiten der Einzelgrößen ein.
- Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung basiert auf rein statistischen Überlegungen - sie ist also zur Verarbeitung statistisch ermittelter Fehler geeignet.
Entsprechend gehen hier als Fehlerangaben die entsprechenden Vertrauensbereiche (mit entsprechender statistischer Sicherheit 1σ , 2σ oder 3σ) ein.
- Ein Problem stellt die Verarbeitung von Messunsicherheiten dar, die sich aus Vertrauensbereich und abgeschätzten Fehleranteilen zusammensetzen.
Hier ist die Verwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ungeeignet, da es sich um Fehler handelt, die nicht ausschließlich auf der Basis statistischer Methoden ermittelt wurden.
Zwei Verfahren haben sich zur Behandlung dieses Problems in der Praxis etabliert:
 1. Es wird die lineare Fehlerfortpflanzung unter Verwendung der Messunsicherheiten genutzt.
 2. Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung wird unter Verwendung der Vertrauensbereiche benutzt und mit einem Fehleranteil addiert, der aus abgeschätzten Fehlern und linearer Fortpflanzung gewonnen wurde.

Beide Verfahren sind wohl gleich gut (oder schlecht) als Kompromiss in der Laborpraxis geeignet.

Im folgenden sollen nun lineare Fehlerfortpflanzung und Gauß'sche Fehlerfortpflanzung näher erläutert werden.

6. lineare Fehlerfortpflanzung

Wie bemerkt interessieren in der Praxis meist die Fehler mittelbar zu messender Größen (wir denken an das Beispiel Benzinverbrauch). Das heißt es interessiert eine Größe f , die von anderen Größen x, y, z, \dots abhängig ist:

$$f = f(x, y, z)$$

Für die Fehlerbetrachtung interessiert nun, wie sich die Größtfehler $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (oder die Messunsicherheiten) der einzelnen Größen auf den Fehler Δf der Größe f auswirken.

Unter der Voraussetzung kleiner Fehler (gegenüber den Messwerten) lässt sich der gesuchte Fehler mittels einer Reihenentwicklung (Taylorreihe) und Abbruch der Entwicklung nach dem ersten Glied berechnen:

Die Größe $\partial f / \partial x$ z.B. steht dabei für eine "partielle Ableitung"; die Funktion f wird nach x abgeleitet, alle anderen Größen werden in diesem Moment als Konstanten betrachtet. Analog verfährt man für y, z, \dots

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) &= \\ f(x, y, z, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z + \dots &= \\ f + \Delta f \end{aligned}$$

Die dargestellte Formel hat noch einen inhaltlichen Fehler:

entsprechend dieser Vorgehensweise wäre es denkbar, dass sich einzelne Fehler gegenseitig aufheben. Der Gedanke - man muss y etwas ungenauer messen, damit der Fehler von f klein wird - wäre sonderbare Realität.

Da sich Fehler (wie bereits oben festgestellt) immer addieren, werden in der dargestellten Formel immer die Absolutbeträge der partiellen Ableitungen benutzt. Damit werden alle Glieder positiv; eine Fehler-Kompensation ist ausgeschlossen.

Es ergibt sich:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots$$

7. Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

In der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wird im Gegensatz zur linearen davon ausgegangen, dass sich die statistisch festgestellten Messwertstreuungen bei ihrer Weiterverarbeitung in definierter Weise kompensieren können.

Aus dieser Einschränkung heraus lässt sich die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung eben nicht auf Fehlerabschätzungen und Größtfehler anwenden - diese heben sich nie gegenseitig auf.

Man verfährt also folgendermaßen:

$$\bar{f} = f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}; \dots)$$

Die gesuchte Größe errechnet sich aus den Mittelwerten der Ausgangsgrößen.

Für die Standardabweichung gilt

$$\bar{s}_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{s}_x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{s}_y \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{s}_z \right)^2 + \dots}$$

Eine Ergebnisangabe kann nun entsprechend erfolgen:

$$f = \bar{f} \pm \bar{s}_f$$

wobei noch einmal auf die Schwierigkeiten der Anwendung des Gauß'schen Ansatzes im Falle gemischter (statistischer und abgeschätzter) Fehler hingewiesen wird.