

# Kapitel 0

## Einführung

### 0.1 Eindeutigkeit

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(\tau) = \xi, \quad (1)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und stetigem  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Gesucht ist eine *Lösung*  $x = \phi(t; \tau, \xi)$  oder kurz  $x = \phi(t)$ , falls Anfangszeit  $\tau$  und Anfangswert  $\xi$  fixiert sind, welche auf einem  $t$ -Intervall  $I$  um die Anfangszeit  $\tau$  folgende Beziehungen erfüllt:

$$\dot{\phi}(t; \tau, \xi) = f(\phi(t; \tau, \xi)) \quad \text{für } t \in I, \quad \phi(\tau; \tau, \xi) = \xi. \quad (2)$$

#### Beispiel 0.1

Betrachte ein skalares Anfangswertproblem (1) mit  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $f(x) = -\sqrt{x}$  für  $x \geq 0$  und mit  $x(0) = \xi \geq 0$  (Tank – Torricelli!).

- Eine Lösung ist  $\phi(t; 0, 0) \equiv 0$ .
- Hat man eine Lösung  $\phi(t; 0, \xi)$ , so gilt

$$\phi(t; 0, \xi) = (\sqrt{\xi} - \frac{t}{2})^2 \quad \text{für } 0 \leq t < 2\sqrt{\xi}$$

mit  $\phi(t; 0, 0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 2\sqrt{\xi}$ . Umgekehrt lässt sich verifizieren, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \phi^*(t; 0, \xi) &= \phi(t; 0, \xi) && \text{auf } [0, 2\sqrt{\xi}), \\ \phi^*(t; 0, \xi) &= 0 && \text{auf } [2\sqrt{\xi}, \infty) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Lösung von (1) ist.

- Da  $f(x) \leq 0$  für alle  $x$  gilt, sind etwaige Lösungen notwendig monoton fallend. Da sie auch nach unten durch 0 beschränkt sind, sind sie notwendigerweise konvergent. Als Grenzwert kommt keine positiver Wert in Frage (warum?). Also konvergieren alle etwaigen Lösungen gegen 0. Weiss man irgendwoher, dass das Anfangswertproblem überhaupt eine Lösung besitzt, so weiss man – ohne explizite Lösungsformel! – schon, dass sie gegen 0 konvergiert. Ob in endlicher Zeit oder asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$ , bleibt noch offen.
- Wegen  $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq 0$  für  $x_1, x_2 \geq 0$  liegt *Eindeutigkeit in Vorwärtszeit* vor, wie die nachfolgende Bemerkung 0.2 zeigt. ■

**Bemerkung 0.2** [Eindeutigkeit in Vorwärtszeit]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi, \quad (3)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und stetigem  $f$  auf

$$Q = \{(t, x) : \tau \leq t \leq \tau + \alpha, |x - \xi| \leq \beta\}$$

mit der Eigenschaft

$$(x_2 - x_1)^T (f(t, x_2) - f(t, x_1)) \leq 0 \quad \text{auf } Q. \quad (4)$$

Sind dann  $\phi_1(t; \tau, \xi)$  und  $\phi_2(t; \tau, \xi)$  zwei Lösungen über  $[\tau, \tau + \alpha]$  in  $Q$ , so sind sie identisch.

*Beweisidee:*  $\delta(t) := |\phi_2(t; \tau, \xi) - \phi_1(t; \tau, \xi)|^2 \geq 0$  erfüllt  $\delta(\tau) = 0$  und  $\dot{\delta} \leq 0$ . ■

**Bemerkung 0.3** [Eindeutigkeit/Lipschitz]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi, \quad (5)$$

mit stetigem  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf

$$Q = \{(t, x) : |t - \tau| \leq \alpha, |x - \xi| \leq \beta\}$$

mit der Lipschitz-Eigenschaft

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \text{auf } Q. \quad (6)$$

Sind dann  $\phi_1(t; \tau, \xi)$  und  $\phi_2(t; \tau, \xi)$  zwei Lösungen über  $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$  in  $Q$ , so sind sie identisch.

Diese Aussage folgt aus der nachstehenden Bemerkung 0.4. ■

**Bemerkung 0.4** [Differentialungleichungen/Lipschitz]

Gegeben sei ein stetiges, skalares  $f$  auf

$$Q = \{(t, x) : \tau \leq t \leq \tau + \alpha, |x - \xi| \leq \beta\}$$

mit der Lipschitz-Eigenschaft

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \text{auf } Q. \quad (7)$$

Sind dann  $\phi(t)$  und  $\psi(t)$  stetig differenzierbare Funktionen über  $[\tau, \tau + \alpha]$  in  $Q$  mit

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\geq f(t, \phi(t)), \\ \dot{\psi}(t) &\leq f(t, \psi(t)), \\ \phi(\tau) &\geq \psi(\tau), \end{aligned} \quad (8)$$

so gilt  $\phi(t) \geq \psi(t)$  auf  $[\tau, \tau + \alpha]$ .

• *Beweisidee:* Die Annahme, dass  $\Delta(t) = \phi(t) - \psi(t)$  mit  $\Delta(s) = 0$  für ein  $s \in [\tau, \tau + \alpha]$  auf einem Intervall  $(s, s + \varepsilon)$  negativ ist, führt mit (8) zu einem Widerspruch: Man hat

$$\dot{\Delta}(t) \geq -L|\Delta(t)| = L\Delta(t) \quad \text{auf } [s, s + \varepsilon]$$

mit  $\Delta(s) = 0$ , woraus  $\frac{d}{dt}[e^{-Lt}\Delta(t)] \geq 0$  und  $\Delta(t) \geq 0$  auf dem offenen Intervall folgen.

• Dass ein stetiges  $f$  hierfür nicht ausreicht, zeigt das Wurzelbeispiel  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = 0$ , mit  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $f(x) = \sqrt{x}$  für  $x \geq 0$ , denn es hat die Lösungen  $\phi(t) \equiv 0$  und  $\psi(t) = t^2/4$  auf  $[0, \alpha]$  – mit  $\Delta(t) < 0$  auf  $(0, \infty)$ .

• Der Spezialfall  $\dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t))$  mit  $\phi(\tau) = \psi(\tau)$  in (8) besagt, dass  $\phi(t)$  rechts von  $\tau$  über der Lösung  $\psi(t)$  liegt.  $\phi(t)$  nennt man daher auch *Oberlösung*. Noch spezieller ist Bemerkung 0.3 im skalaren Fall, wo auch noch  $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$  vorausgesetzt wird.

• Im nichtskalaren Fall betrachte man in Bem. 0.3 die Norm von Lösungsdifferenzen  $\Delta$  mit

$$|\Delta(t)| \leq L \int_{\tau}^t |\Delta(s)| ds =: LV(t), \quad V(\tau) = 0.$$

Man hat dann rechts von  $\tau$  definitionsgemäss  $V(t) \geq 0$  und darüberhinaus  $\frac{d}{dt}[e^{-Lt}V(t)] \leq 0$  mit  $V(\tau) = 0$ . Also ist  $V \equiv 0$  rechts von  $\tau$ . ■

**Bemerkung 0.5** [Hinreichend für Lipschitz-Bedingung]

Ist  $f(x)$  stetig differenzierbar in einer Umgebung  $x_0$ , so erfüllt  $f$  lokal eine Lipschitzbedingung wegen

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \int_0^1 |f'(x_1 + s(x_2 - x_1))| ds |x_2 - x_1| \leq L|x_2 - x_1|, \quad (9)$$

wobei  $L$  eine obere Schranke von  $|f'(x_1 + s(x_2 - x_1))|$  auf dem  $s$ -Intervall  $[0, 1]$  ist. ■

## 0.2 Existenz (ohne Beweis)

### Ausgangspunkt :

Gegeben sei ein Element  $(\tau, \xi)$  aus einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und ein  $f \in C^{0,1}(D, \mathbb{R}^n)$  (oder aus  $C^{0,Lip}$ ). Meist in der Form  $D = J \times G$  mit einem offenen Intervall  $J$  und einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

### Fragestellung:

Existieren ein offenes (Zeit-)Intervall  $I \ni \tau$  und ein  $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  mit

- (a)  $(t, \phi(t)) \in D \quad \forall t \in I,$
- (b)  $\phi(\tau) = \xi,$
- (c)  $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I.$

Wenn  $\phi(\cdot)$  diese drei Eigenschaften hat, so nennt man  $\phi(\cdot)$  Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi \quad (10)$$

über  $I$  bzgl.  $D$ . Eine präzisere Notation wäre  $\phi(\cdot, \tau, \xi)$  (über  $I$  bzgl.  $D$ ).

### Literatur:

Für die grundlegenden Resultate in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen kann man viele Bücher heranziehen, z.B.

$$[\text{Am}], [\text{Au}], [\text{CL}], [\text{H}], [\text{Ha}] [\text{HiS}], [\text{KK}], [\text{PB}] [\text{Pe}] [\text{Re}].$$

Vgl. auch [Ve], wo in der Introduction eine Übersicht über zentrale ODE-Resultate gegeben ist.

### Satz 0.6 (Existenz und Eindeutigkeit)

Zu jedem  $(\tau, \xi) \in D$  existieren ein eindeutig bestimmtes maximales offenes Intervall

$$I_D(\tau, \xi) = (t^-, t^+) \ni \tau$$

und eine eindeutig bestimmte  $C^1$ -Funktion  $\phi(\cdot, \tau, \xi) : I_D(\tau, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche das AWP (10) löst. Es gilt also

$$\phi(t, \tau, \xi) = \phi(t, s, \phi(s, \tau, \xi)) \quad \forall t, s \in I_D(\tau, \xi).$$

Für  $t \rightarrow t^+$  – analog für  $t \rightarrow t^-$  – hat man

- (a) entweder  $t^+ = \infty$
- (b) oder  $t^+ < \infty$  und  $\phi(\cdot, \tau, \xi)$  ist unbeschränkt auf  $(\tau, t^+)$

(c) oder  $t^+ < \infty$  und  $\lim_{t \rightarrow t^+} \text{dist}((t, \phi(t, \tau, \xi), \partial D) = 0$ .

Dies kann als Kausalitätsprinzip formuliert werden:

- Gleiche Ursachen (Anfangswerte) implizieren gleiche Wirkungen (Lösungen).

Die Standardbeispiele für mangelnde Eindeutigkeit und endliche Entweichzeit sind

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}(1 + \text{sgn}(x)) \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = 1 + x^2$$

mit Anfangswert  $x(0) = 0$  in beiden Fällen. Vgl. auch Bsp. 0.1.

**Note:** Bemerkung zu über Orbits bei autonomen Gleichungen!

Ein zentrales Hilfsmittel in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist das folgende *Gronwall-Lemma* (cf. Lemma 1.10). Eine erste Anwendung bietet Korollar 0.7.

- *Gronwall-Lemma*

Auf dem Intervall  $I = [\tau, T]$  seien nichtnegative stetige Funktionen  $u, \mu, \rho$  gegeben. Dann folgt aus der impliziten Abschätzung

$$u(t) \leq \mu(t) + v(t) := \mu(t) + \int_{\tau}^t \rho(s)u(s)ds \quad \text{auf } I \quad (11)$$

die explizite Abschätzung

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{\tau}^t \mu(s)\rho(s)\exp\left[\int_s^t \rho(\sigma)d\sigma\right]ds \quad \text{auf } I. \quad (12)$$

Ist  $\mu(\tau) \leq \mu(s) \leq \mu(t)$  für  $\tau \leq s \leq t \leq T$ , so folgt aus (12) noch  $u(t) \leq \mu(t)\exp\left[\int_{\tau}^t \rho(\sigma)d\sigma\right]$ .

### Korollar 0.7 (Linear beschränkte rechte Seite und maximales Existenzintervall)

$f \in C^{0,1}(D, \mathbb{R}^n)$  (oder auch  $C^{0,Lip}$ ) mit  $D = (a, b) \times \mathbb{R}^n$  genüge einer Abschätzung

$$|f(t, x)| \leq \rho(t)|x| + \mu(t) \quad \text{auf } D \quad (13)$$

mit nichtnegativen stetigen Funktionen  $\rho, \mu$  auf  $(a, b)$ . Dann ist für jedes  $(\tau, \xi) \in D$  das maximale Existenzintervall der Lösung  $\phi(t) \equiv x(t, \tau, \xi)$  gleich  $(a, b)$ .

Konsequenz: Ist  $(a, b)$  endliches Intervall und sind obige  $\rho, \mu$  auf  $(a, b)$  beschränkt, so lässt sich jede Lösung  $\phi(\cdot, \tau, \xi)$  auf  $[a, b]$  fortsetzen.

*Widerspruchsbeweis:* Sei für ein  $(\tau, \xi)$  das maximale Existenzintervall gleich  $(t^-, t^+)$  mit  $t^+ < b$ . Betrachte dann  $J = [\tau, s]$  mit  $t^+ < s \equiv \frac{1}{2}(t^+ + b) < b$ . Auf  $J$  sei  $\rho(t) \leq R, \mu(t) \leq M$ . Man hat dann

$$\phi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \phi(s))ds \quad \text{auf } [\tau, t_+)$$

und wegen (13) auch  $|\phi(t)| \leq |\xi| + M(t - \tau) + R \int_{\tau}^t |\phi(s)|ds$  auf  $[\tau, t^+)$ . Mit dem Gronwall-Lemma folgt

$$|\phi(t)| \leq [|\xi| + M(t - \tau)]\exp[R(t - \tau)] \leq [|\xi| + M(s - \tau)]\exp[R(s - \tau)] < \infty.$$

Also hat man neben  $t^+ < b$  noch: die Lösung  $\phi(t)$  ist auf  $[\tau, t^+)$  beschränkt und  $(t, \phi(t))$  ist vom Rand von  $D$  wegbeschränkt. Widerspruch (wozu?)! ■

A11/07 - 6

*KAPITEL 0. EINFÜHRUNG*

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Kontraktionsprinzip

#### 1.1.1 Banachs Fixpunktsatz mit Anwendungen

*Literatur: Chow and Hale: Methods of Bifurcation Theory (Springer Grundlehren 251, 1982) Ambrosetti and Prodi: A Primer of Nonlinear Analysis (Cambridge Studies 34, 1993) Zeidler: Applied Functional Analysis (Springer AMS 109, 1995), Granas–Dugundji: Fixed Point Theory (Springer Monographs in Mathematics 2003).*

#### **Satz 1.1 (Kontraktionsprinzip/Banachscher Fixpunktsatz)**

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum mit  $X \neq \emptyset$ . Sei  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktion:

$$\exists \rho \in [0, 1) \quad \forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq \rho d(x, y).$$

Dann gibt es genau einen Fixpunkt  $x^* \in X$  von  $T$ :  $T(x^*) = x^*$ . Überdies konvergiert für beliebiges  $x_0 \in X$  die Folge der Iterierten  $(x_i) = (T(x_{i-1}))$  gegen den Fixpunkt  $x^*$  mit  $d(x_m, x^*) \leq \frac{\rho^m}{1-\rho} d(x_1, x_0)$ .

Insbesondere gilt dies in einem Banachraum  $(\mathcal{X}, |\cdot|)$  mit  $d(x, y) = |x - y|$ .

*Beweis:*

Wir zeigen, daß  $(x_i)$  eine Cauchy-Folge ist. Dies folgt aus

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq \rho d(x_m, x_{m-1}) \leq \cdots \leq \rho^m d(x_1, x_0)$$

und – mit der Dreiecksungleichung für  $n > m$  –

$$d(x_m, x_n) \leq (\rho^m + \cdots + \rho^{n-1})d(x_1, x_0) = \rho^m \frac{1 - \rho^{n-m}}{1 - \rho} d(x_1, x_0) \leq \frac{\rho^m}{1 - \rho} d(x_1, x_0),$$

der sogenannten a-priori-Abschätzung. Daraus folgt die Konvergenz gegen ein  $x \in X$ . Dieses  $x$  ist Fixpunkt von  $T$ , denn es gilt

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x_m) + d(x_m, T(x)) \leq d(x, x_m) + \rho d(x_{m-1}, x),$$

wobei die rechte Seite für  $m \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.  $T$  hat nur einen Fixpunkt, denn aus  $T(x) = x, T(y) = y$  folgt  $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \rho d(x, y)$ . Als a-posteriori-Abschätzung hat man

$$d(x_{m+1}, x^*) \leq \frac{\rho}{1-\rho} d(x_{m+1}, x_m)$$

□

Für Differenzierbarkeit in Banachräumen verweisen wir auf Appendix B.

### Satz 1.2 (Uniform Contraction Principle)

$X$  und  $Y$  seien Banachräume und  $U \subset X$  und  $\Lambda \subset Y$  seien offene Mengen. Die Abbildung  $T : \overline{U} \times \Lambda \rightarrow \overline{U}$  sei eine gleichmäßige Kontraktion auf  $\overline{U}$ , d.h. es existiere ein  $\theta \in [0, 1)$  mit

$$|T(u, \lambda) - T(v, \lambda)| \leq \theta |u - v| \quad \forall u, v \in \overline{U} \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Der nach Satz 1.1 existierende eindeutige Fixpunkt sei  $g(\lambda) \in \overline{U}$ .

- (a) Ist dann  $T(x, \cdot)$  stetig, so ist  $g$  stetig. Ist  $T(x, \cdot)$  Lipschitz mit der (in  $x$  gleichmäßigen) Lipschitzkonstanten  $L$ , so hat  $g$  die Lipschitzkonstante  $\frac{L}{1-\theta}$ .
- (b) Ist  $T \in C^k(\overline{U} \times \Lambda, X)$  für  $0 \leq k < \infty$ , so ist  $g \in C^k(\Lambda, X)$ . Ist  $DT$   $C^{k-1}$ -beschränkt, so auch  $Dg$ .

*Bemerkung:* (a) gilt entsprechend in vollständigen metrischen Räumen.

*Beweis:*

Für  $k = 0, \lambda \in \Lambda$  und kleine  $|h|$  gilt

$$\begin{aligned} |g(\lambda + h) - g(\lambda)| &\leq |T(g(\lambda + h), \lambda + h) - T(g(\lambda), \lambda)| \\ &= \theta |g(\lambda + h) - g(\lambda)| + |T(g(\lambda), \lambda + h) - T(g(\lambda), \lambda)|, \end{aligned}$$

woraus die Stetigkeit folgt:

$$|g(\lambda + h) - g(\lambda)| \leq \frac{1}{1-\theta} |T(g(\lambda), \lambda + h) - T(g(\lambda), \lambda)|.$$

Ist hier noch  $T$   $L$ -Lipschitz in  $\lambda$ , so ist  $g$   $\frac{L}{1-\theta}$ -Lipschitz in  $\lambda$ .

Sei nun  $k = 1$ . Dann gilt  $\|D_x T(x, \lambda)\| \leq \theta < 1$  auf  $U \times \Lambda$ . Andernfalls ergibt sich ein Widerspruch.<sup>1</sup> Wenn  $g$  differenzierbar mit  $M = D_\lambda g(\lambda)$  wäre, so folgte aus  $T(g(\lambda), \lambda) = g(\lambda)$  mit der Kettenregel

$$D_x T(g(\lambda), \lambda) M + D_\lambda T(g(\lambda), \lambda) = M.$$

Nun hat diese Gleichung gemäß Neumann eine eindeutige Lösung

$$M = M(\lambda) = (I - D_x T(g(\lambda), \lambda))^{-1} D_\lambda T(g(\lambda), \lambda),$$

welche stetig in  $\lambda$  ist. Wir zeigen nun, daß dieses  $M$  die Ableitung von  $g$  an  $\lambda$  ist. Mit  $\delta(h) := g(\lambda+h) - g(\lambda)$  hat man

$$\delta(h) = T(g(\lambda + h), \lambda + h) - T(g(\lambda), \lambda) = D_x T(g(\lambda), \lambda) \delta(h) + D_\lambda T(g(\lambda), \lambda) h + R(\delta(h), h),$$

<sup>1</sup>Aus  $(T(x+h, \lambda) - T(x, \lambda))/|h| = D_x T(x, \lambda) h/|h| + o(1)$  folgen  $\theta \geq |D_x T(x, \lambda) h/|h|| - o(1)$  und  $\theta \geq \|D_x T(x, \lambda)\|$ . Wäre  $\|D_x T(x, \lambda)\| = \theta' > \theta$ , so gäbe es ein  $\eta$  der Norm 1 mit  $|D_x T(x, \lambda) \eta| = \theta'' > \theta$ .  $h = \tau \eta$  mit  $\tau \rightarrow 0$  liefert Widerspruch.

wobei  $R$  dadurch definiert ist.  $R$  läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$R(\delta(h), h) = (I - D_x T(g(\lambda), \lambda)) [\delta(h) - M(\lambda)h].$$

Nun folgt aus  $T \in C^1$ , daß es zu jedem  $\epsilon \in (0, 1 - \theta)$  ein  $\rho > 0$  gibt mit

$$|R(\delta, h)| < \epsilon(|\delta| + |h|) \quad \text{für } |\delta| < \rho, |h| < \rho.$$

Da  $\delta$  stetig ist mit  $\delta(0) = 0$ , kann man ein  $\rho > 0$  so wählen, daß folgendes richtig ist:

$$|R(\delta(h), h)| < \epsilon(|\delta(h)| + |h|) \quad \text{für } |h| < \rho.$$

Damit ergibt sich  $|h| < \rho$  die Abschätzung

$$|\delta(h)| \leq \theta|\delta(h)| + \|D_\lambda T(g(\lambda), \lambda)\| |h| + \epsilon|\delta(h)| + \epsilon|h|.$$

Mit  $k(\epsilon) := (1 - \theta - \epsilon)^{-1}[\|D_\lambda T(g(\lambda), \lambda)\| + \epsilon]$  folgt dann

$$|R(\delta(h), h)| \leq \epsilon[k(\epsilon) + 1] |h| \quad \text{für } |h| < \rho.$$

Dies ergibt schließlich mit Neumann

$$|\delta(h) - M(\lambda)h| \leq \frac{\epsilon[1 + k(\epsilon)]}{1 - \theta} |h|.$$

Für  $k > 1$  sei  $T \in C^{k+1}$  und  $g \in C^k$  (Induktionsvoraussetzung). Da  $D_\lambda g$  obige Gleichung für  $M$  löst, ist dann  $g \in C^{k+1}$ . □

### Satz 1.3 (Existenzsatz für Integralgleichungen und ODEs ([46] 55-57))

Sei  $F : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |F(t, s, x) - F(t, s, y)| \leq L |x - y|$$

und sei  $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann besitzt die Integralgleichung

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$$

eine und nur eine stetige Lösung  $x \in C([0, T])$  (welche iterativ berechnet werden kann).

Im Spezialfall  $\xi(t) \equiv \xi_0$  und  $F(t, s, x) = f(s, x)$  entspricht dies der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für ODE-Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = \xi_0,$$

über vorgegebenem Zeitintervall  $[0, T]$ .

*Beweis:*

Im Banachraum  $\mathcal{B}$  stetiger Funktionen  $h$  mit Norm

$$\|h\| := \max_{[0, T]} e^{-Lt} |h(t)|_{\mathbb{R}^n}$$

betrachte den Operator  $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  gegeben durch

$$A(h)(t) = \xi(t) + \int_0^t K(t, s, h(s)) ds \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \|A(g) - A(h)\| &\leq L \max_{[0, T]} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} e^{-Ls} |g(s) - h(s)| ds \\ &\leq L \|g - h\| \max_{[0, T]} e^{-Lt} \frac{e^{Lt} - 1}{L} \leq (1 - e^{-LT}) \|g - h\|. \end{aligned}$$

Die Behauptungen des Satzes 1.3 folgen nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Man beachte, dass man mit der standardmässigen sup-Norm die Kontraktionsbedingung  $LT < 1$  in Kauf nehmen müsste. ■ □

### Satz 1.4 (Implicit Function Theorem)

Seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $U \subset X$  und  $V \subset Y$  offene Mengen. Die Abbildung  $f : U \times V \rightarrow Z$  sei stetig. Die Ableitung von  $f(\cdot, y)$  nach  $x$  existiere und  $D_x f$  sei stetig auf  $U \times V$ . Ist dann

$$f(u, v) = 0 \quad \text{für ein } (u, v) \in U \times V \quad \text{und ist } A := D_x f(u, v) \text{ invertierbar,}$$

so existieren eine Umgebung  $U_0 \times V_0 \subset U \times V$  von  $(u, v)$  und eine eindeutig bestimmte Funktion  $g : V_0 \rightarrow U_0$  mit

$$g(v) = u \quad \text{und} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{auf } U_0 \times V_0 \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Ist  $f \in C^k(U \times V, Z)$ , so ist  $g \in C^k(V_0, X)$ . Ableitungen von  $g$  errechnen sich mit der Kettenregel.

*Beweis:*

O.B.d.A.  $u = 0$  und  $v = 0$ . Definiere  $T(x, y) = x - A^{-1}f(x, y)$  und suche einen Fixpunkt  $x = g(y)$  von  $T(\cdot, y)$ . Lokal gilt

$$\begin{aligned} |T(x_1, y) - T(x_2, y)| &= |x_1 - x_2 - A^{-1}[f(x_1, y) - f(x_2, y)]| \\ &= |x_1 - x_2 - A^{-1}[(A + (D_x f(x_2, y) - A))(x_1 - x_2) + R(x_1 - x_2)]| \\ &= |A^{-1}[(D_x f(x_2, y) - A)(x_1 - x_2) + R(x_1 - x_2)]| \leq \theta |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

mit einem  $\theta \in [0, 1)$  und dem üblichen Restglied. Weiter gilt lokal

$$|T(x, y)| \leq |T(x, y) - T(u, y)| + |T(u, y) - T(u, v)| \leq \theta |x - u| + \|A^{-1}\| O(|y - v|).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, daß für geeignetes  $U_0 \times V_0$  das gleichmäßige Kontraktionsprinzip auf  $T : \overline{U_0} \times V_0 \rightarrow \overline{U_0}$  anwendbar ist. ■ □

Wendet man Satz 1.4 auf  $F(x, y) = y - f(x) \stackrel{!}{=} 0$  an, so ergibt sich

### Korollar 1.5 (Inverse Function Theorem)

Sei  $f \in C^1(U, Y)$  und sei  $A := f'(u^*) \in \mathcal{L}(X, Y)$  invertierbar. Dann ist  $f$  an  $u^*$  lokal invertierbar mit  $C^1$ -Inverser: Es gibt Umgebungen  $U$  von  $u^*$  und  $V$  von  $v^* := f(u^*)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $f : U \rightarrow V$  ist homöomorph.  
 (b)  $f^{-1} \in C^1(V, X)$  mit  $Df^{-1}(v) = [Df(f^{-1}(v))]^{-1}$ .  
 (c) Ist  $f \in C^k$ , so ist  $f^{-1} \in C^k$ .

## 1.2 IFT-Anwendungen

### 1.2.1 Bifurkationen und Newtondiagramm

Fürs Newtondiagramm verweisen wir auf Appendix A.

**Bemerkung 1.6** [Stationäre und Hopf Bifurkationen]

Wir betrachten auf  $D = \mathbb{R} \times U \times \Lambda$  mit Nullumgebungen  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$  ein  $C^k$ -System

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad \text{mit} \quad f(0, 0) = 0 \quad (1.1)$$

für hinreichend grosses  $k \geq 2$ . Nach dem Reduktionsprinzip kann man für Bifurkationsuntersuchungen das auf eine center manifold reduzierte kritische System folgender Bauart zugrundelegen:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^0(\lambda)u + F(u, v, \lambda), \\ \dot{v} &= N(\lambda)v + b(\lambda)\lambda + G(u, v, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

mit kritischer Linearisierung

$$\sigma(A^0(0)) \subset i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \sigma(N(0)) = 0,$$

und Termen höherer Ordnung

$$F = O(|u|^2 + |v|^2), \quad G = O(|u|^2 + |v|^2).$$

- (a) Die  $u$ -Variable ist nicht präsent und  $v$  und  $\lambda$  sind eindimensional, so dass (1.2) von folgender Form ist:

$$\dot{v} = \beta\lambda + \gamma v^2 + \gamma_1\lambda v + \gamma_2\lambda^2 + \text{hot}. \quad (1.3)$$

Standardbeispiele:

- (a1) Saddle-node bifurcation:  $\dot{v} = \lambda - v^2$ ,  
 (a2) Transcritical bifurcation:  $\dot{v} = (\lambda - v)v$ ,  
 (a3) Pitchfork bifurcation:  $\dot{v} = (\lambda - v^2)v$ .

Die allgemeine Theorie der *stationären Bifurkationen* ist recht einfach und beruht auf dem Satz über Implizite Funktionen: es gilt ja nur – in Abhängigkeit von den Koeffizienten – die Nullstellenmenge der rechten Seite von (1.3) zu diskutieren (z.B. mit dem Newton–Diagramm aus Appendix A). Was die Generizität/Robustheit angeht: Betrachte beispielhaft die obigen 3 Systeme mit einem Extraterm  $\pm\varepsilon$  auf der rechten Seite. Nur die saddle–node bifurcation erweist sich als generisch (bzgl. solcher Störungen).

(b) Die  $v$ –Variable ist nicht präsent,  $u$  ist zwei– und  $\lambda$  ist eindimensional mit

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & -\omega(\lambda) \\ \omega(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix} u + F(u, \lambda) \quad (1.4)$$

mit

$$\alpha(0) = 0, \alpha'(0) \equiv \alpha_1 \neq 0, \omega(0) \equiv \omega_0 \neq 0, F = O(|u|^2).$$

Als Standardbeispiel dieser *Hopf–Bifurkation* nimmt man

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} u - |u|^2 u \quad \text{oder} \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda - \kappa |u|^2 & -1 - L|u|^2 \\ 1 + L|u|^2 & \alpha_1 \lambda - \kappa |u|^2 \end{pmatrix} u \quad (1.5)$$

mit  $\alpha_1 \neq 0, \kappa \neq 0$ , was in Polarkoordinaten (*Exkurs!*) zu

$$\dot{r} = r(\alpha_1 \lambda - \kappa r^2), \quad \dot{\phi} = 1 + Lr^2$$

führt. Hieraus ergibt sich das Entstehen eines geschlossenen Orbits  $r = (\alpha_1 \lambda / \kappa)^{1/2}$  für positives Argument.

(c) Weitaus schwieriger sind die sogenannten *Kodimension–2–Bifurkationen*, wo man

- einen doppelten Eigenwert 0:

z.B. *Takens–Bogdanov* mit Linearteil  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $u$  nicht präsent,  $\dim v = 2$ :

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = \alpha + \beta u + u^2 \mp uv + \mathcal{O}(3). \quad (1.6)$$

- oder ein Paar rein imaginärer Eigenwerte plus einem Eigenwert 0:  
 $\dim u = 2, \dim v = 1$
- oder zwei Paare rein imaginärer Eigenwerte:  $\dim u = 4$ .

hat. Siehe [AP], [CH], [F12], [GH], [PB]. ■

## 1.2.2 IFT und Variationsgleichungen

### Satz 1.7 (ODEs ([8] 89, [39] 254))

Sei  $\Lambda$  ein Banachraum mit offener Teilmenge  $\Omega$ . Für offenes  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  sei  $f : G \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $D_x f$  existiere stetig auf  $G \times \Omega$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda), \quad x(t_0) = \xi,$$

für  $(t_0, \xi) \in G$  genau eine stetige Lösung  $x(t_0, \xi, \lambda)$ . Ist  $f \in C^k(G \times \Omega)$ , so hat  $x(t_0, \xi, \lambda)$  im Definitionsbereich stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ .

*Beweis:*

Ist  $x$  eine Lösung auf  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , so setze  $\tau = (t - t_0)/\alpha$  und  $z(\tau) = x(\alpha\tau + t_0) - \xi$ , so daß  $z$  das Anfangswertproblem

$$z'(\tau) = \alpha f(\alpha\tau + t_0, z(\tau) + \xi, \lambda), \quad z(0) = 0,$$

auf  $\tau \in [-1, 1]$  löst (und umgekehrt). Für die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen setze man

$$X = \{\phi \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^n) : \phi(0) = 0\}, \quad Y = C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$$

und definiere man

$$F(\alpha, \sigma, \eta, \lambda, \phi)(\tau) = \phi'(\tau) - \alpha f(\alpha\tau + \sigma, \phi(\tau) + \eta, \lambda)$$

auf einer geeigneten Umgebung  $U = \prod_{j=1}^5 U_{\delta_j} \in \mathbb{R} \times G \times \Omega \times X$  von  $(0, t_0, \xi, \lambda_0, 0)$  mit hinreichend kleinen  $\delta_j$ .  $F$  ist dort stetig und nach  $\phi$  stetig differenzierbar (vgl. Bem. Mittelwertsatz B.2 und Abschnitt 12.5), z.B. mit

$$\begin{aligned} &|F(\alpha, \sigma, \eta, \lambda, \phi + h)(\tau) - F(\alpha, \sigma, \eta, \lambda, \phi)(\tau)| = \\ &|h'(\tau) - \alpha[f(\alpha\tau + \sigma, \phi(\tau) + h(\tau) + \eta, \lambda) - f(\alpha\tau + \sigma, \phi(\tau) + \eta, \lambda)]| = \\ &|h'(\tau) - \alpha D_x f(\alpha\tau + \sigma, \phi(\tau) + \eta, \lambda) h(\tau) - \alpha \iota(|h|)| \end{aligned}$$

was für  $|h|_1 \rightarrow 0$  die Ableitung

$$DF(\alpha, \sigma, \eta, \lambda, \phi)(h)(\tau) = h'(\tau) - \alpha D_x f(\alpha\tau + \sigma, \phi(\tau) + \eta, \lambda) h(\tau)$$

liefert. Es folgt somit

$$D_\phi F(0, t_0, \xi, 0, \lambda_0) = \frac{d}{d\tau} \in L(X, Y)$$

mit der stetigen Inversen  $y \in Y \rightarrow \int_0^1 y(s) ds \in X$ . Aus Satz 1.4 folgt dann die Existenz einer eindeutigen Lösung  $\phi^*(\alpha, \sigma, \eta, \lambda)$  in einer Umgebung von  $(0, t_0, \xi, \lambda_0)$  mit denselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie  $f$ . Die 'gewohnte' Fortsetzung liefert dann das maximale Existenzintervall. ■ □

Wir betrachten nun die Lösung  $\phi$  des AWP's (10), i.e des Anfangswertproblems (AWP)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi \tag{1.7}$$

über  $I$  bzgl.  $D$ , als Funktion aller Argumente auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D} = \{(t, \tau, \xi) : t \in I_D(\tau, \xi), (\tau, \xi) \in D\}. \tag{1.8}$$

**Satz 1.8 (Abhängigkeiten / Variationsgleichung)**

$\mathcal{D}$  aus (1.8) ist offen in  $\mathbb{R}^{2+n}$  und  $\phi$  ist  $C^1$  bzgl.  $t, \tau$  und den Komponenten  $\xi_i$  von  $\xi$ .  
Überdies sind  $\phi_{t\tau}$  und  $\phi_{t\xi_i}$  stetig und somit gleich  $\phi_{\tau t}$  bzw.  $\phi_{\xi_i t}$ .

Bei festem  $\tau, \xi, i$  erfüllen  $y(t) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi(t, \tau, \xi)$  und  $z(t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(t, \tau, \xi)$  die

$$\text{Variationsgleichung } \dot{\Delta} = f_x(t, \phi(t, \tau, \xi))\Delta \quad (1.9)$$

mit  $\Delta(\tau) = e_i$  bzw.  $\Delta(\tau) = -f(\tau, \xi)$ . Weiter gilt: Ist  $f \in C^{0,m}$ , so ist  $\phi \in C^m$  bzgl.  $\xi$ .

**Bemerkung 1.9**

- (a) Die Variationsgleichung (1.9) ist die Linearisierung der ODE längs der Referenzlösung  $\phi(t, \tau, \xi_0)$ . Betrachte dazu

$$\delta(t) = \phi(t, \tau, \xi) - \phi(t, \tau, \xi_0) = \phi_\xi(t, \tau, \xi_0)(\xi - \xi_0) + h.o.t.$$

Man erhält z.B. auf einer schlauchförmigen Umgebung  $B_\varepsilon(\phi(t, \tau, \xi_0))$  der Referenzlösung

$$\dot{\delta} = [f_x(\phi(t, \tau, \xi_0)) + R(t, \xi, \delta)]\delta$$

mit Rest

$$R = \int_0^1 f_x(t, \phi(t, \tau, \xi_0) + s\delta(t))ds = o(1)$$

bzgl.  $\delta \rightarrow 0$  auf kompaktem  $(t, \xi)$ -Bereich. Beachte, dass der Linearterm von  $\delta(t)$  der Linearisierung der  $\delta$ -Differentialgleichung genügt.

Eine andere Darstellung von Lösungsdifferenzen ist mit  $h(t, s) := \phi(t, \tau, \xi_0 + s(\xi - \xi_0))$ :

$$\delta(t) = h(t, 1) - h(t, 0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} h(t, s) ds = \int_0^1 \phi_\xi(t, \tau, \xi_0 + s(\xi - \xi_0)) ds \cdot (\xi - \xi_0).$$

Letzter Integrand erfüllt wiederum die nun vom Parameter  $s$  abhängigen Variationsgleichungen (1.9) mit Anfangswert  $I$ . Weiss man z.B., dass  $|\phi_\xi(t, \tau, \xi_0 + s(\xi - \xi_0))| \leq Ke^{-\lambda(t-\tau)}$  mit positiven  $K, \lambda$  für alle  $s \in [0, 1]$  und  $\xi$  gilt, so klingen die Nachbarlösungen exponentiell gegen die Referenzlösung ab.

- (b) Auf kompakten Zeitintervallen  $J \subset I_D(\tau, \xi)$  gilt das Kausalitätsprinzip in der Form
- Ähnliche Ursachen (Anfangswerte) implizieren ähnliche Wirkungen (Lösungen).

Genauer: Zu  $\varepsilon > 0$  und  $J$  existiert eine Kugel  $K$  mit Mittelpunkt  $\xi$ , so dass gilt:

- Für  $\eta \in K$  existiert  $\phi(t, \tau, \eta)$  mit  $|\phi(t, \tau, \eta) - \phi(t, \tau, \xi)| < \varepsilon$  über  $J$ . Überdies ist der Rand von  $\phi(t, \tau, K)$  gleich  $\phi(t, \tau, \partial K)$  über  $J$ .

- (c) Hängt die rechte Seite der ODE zusätzlich von einem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  ab, so erweitere man  $\dot{x} = f(t, x, \alpha)$  zu  $\dot{x} = f(t, x, y), \dot{y} = 0$  mit Anfangswert  $x(\tau) = \xi$  und  $y(\tau) = \alpha$ . Benutze obige Resultate dann für das erweiterte System. Die Variationsgleichung bzgl. des Parameters, auch *Sensitivitätsgleichung* genannt, lautet dann

$$\dot{\Delta} = f_x(t, \phi(t, \tau, \xi, \alpha), \alpha)\Delta + f_\alpha(t, \phi(t, \tau, \xi, \alpha), \alpha) \quad (1.10)$$

mit Anfangswert  $\Delta(\tau) = 0$ . Vgl. Khalil [Kh] pp.81.

*Beispiel:*

$$\dot{x} = x(\alpha - x^2), \quad x(0) = 1,$$

mit  $\alpha \in (0, 1)$  und Referenzwert  $\alpha_0 = 0$ . Was liefert die Sensitivitätsgleichung wirklich? ■

## 1.3 Unkritische Linearisierungen

### 1.3.1 Gronwall–Lemma/Satz von Liapunov

#### Lemma 1.10 (Gronwall)

Auf dem Intervall  $I = [\tau, T]$  seien nichtnegative stetige Funktionen  $u, \mu, \rho$  gegeben. Dann folgt aus der impliziten Abschätzung

$$u(t) \leq \mu(t) + v(t) := \mu(t) + \int_\tau^t \rho(s)u(s)ds \quad \text{auf } I \quad (1.11)$$

die explizite Abschätzung

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_\tau^t \mu(s)\rho(s)\exp\left[\int_s^t \rho(\sigma)d\sigma\right]ds \quad \text{auf } I. \quad (1.12)$$

Ist  $\mu(\tau) \leq \mu(s) \leq \mu(t)$  für  $\tau \leq s \leq t \leq T$ , so folgt aus (12) noch  $u(t) \leq \mu(t)\exp\left[\int_\tau^t \rho(\sigma)d\sigma\right]$ .

*Beweis:* Aus (1.11) folgt  $\dot{v} = \rho u \leq \rho\mu + \rho v$ . Multipliziert man dies mit dem positiven

$$m(t, \tau) = \exp\left[-\int_\tau^t \rho(\sigma)d\sigma\right],$$

so ergibt sich  $(mv)' \leq m\rho\mu$ . Durch Integration über  $[\tau, t]$  erhält man mit (11)

$$u(t) \leq \mu(t) + \frac{1}{m(t, \tau)} \int_\tau^t m(s, \tau)\rho(s)\mu(s)ds = \mu(t) + \int_\tau^t \mu(s)\rho(s)m(s, t)ds,$$

also (1.12). Für monotonen  $\mu$  schätze man  $\mu(s)$  unter dem Integral durch  $\mu(t)$  nach oben ab und integriere dann. ■

Auf  $D = \mathbb{R} \times B_R$  mit  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$  betrachte man

$$\dot{x} = f(x) \equiv Ax + g(x) \quad (1.13)$$

mit  $g \in C^1$  und  $g(0) = 0, g_x(0) = 0$ , also  $g(x) = o(|x|)$ . Ist das

$$\text{Spektrum } \sigma(A) \text{ in der linken Halbebene } \mathbb{C}^-, \quad (1.14)$$

so streben alle Lösungen der Linearisierung  $\dot{x} = Ax$  exponentiell gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$ . Dies gilt dann lokal auch für das nichtlineare System (1.13).

### Satz 1.11

Gibt es für (1.13) Konstanten  $M \geq 1, \eta > 0$  und  $\gamma > 0$  mit

$$(a) \|e^{A(t-\tau)}\| \leq Me^{-\eta(t-\tau)} \text{ für } t \geq \tau \geq 0,$$

$$(b) |g(x)| \leq \gamma|x| \text{ für } |x| < R,$$

$$(c) \gamma M < \eta \text{ (i.e. } \gamma \text{ hinreichend klein!)},$$

so existiert für alle  $\xi \in B_{R/M}$  die Lösung  $\phi(t, \tau, \xi)$  von (1.13) mit  $x(\tau) = \xi$  auf  $[\tau, \infty)$  mit

$$|\phi(t, \tau, \xi)| \leq M|\xi| \exp[-(\eta - M\gamma)(t - \tau)] \text{ für } t \geq \tau \geq 0.$$

Darüberhinaus existiert keine nichttriviale Lösung  $\phi(\cdot)$ , welche für  $t \rightarrow -\infty$  gegen 0 strebt.

Der Beweis der Abschätzung ergibt sich aus der Formel der Variation der Konstanten und dem Gronwall-Lemma 1.10 und Satz 0.6. Längs einer Lösung  $x(t)$  von (1.13) gilt mit Variation der Konstanten

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}\xi + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)}g(x(s))ds.$$

Für  $t \geq \tau$  erhält man daraus

$$|x(t)| \leq Me^{-\eta(t-\tau)}|\xi| + \int_{\tau}^t Me^{-\eta(t-s)}\gamma|x(s)|ds,$$

solange  $|x(t)| \leq R$  gilt. Multipliziert man dies Ungleichung mit  $e^{\eta t}$  und benutzt man anschliessend das Gronwall-Lemma 1.10, so erhält man

$$|x(t)| \leq M|\xi|e^{-(\eta-\gamma M)t}$$

für  $t \geq \tau$ , solange  $|x(t)| \leq R$  gilt. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt dies auf  $[\tau, \infty)$ .

Ein anderer Zugang – mit anderen Konstanten – beruht auf der Existenz einer positiv definiten Lösung  $P$  der Liapunovgleichung

$$A^T P + P A = -I$$

und der verallgemeinerten Norm  $V(x) = x^T P x$ , für welche man längs Lösungen eine Ungleichung der Form

$$\frac{d}{dt}V(\phi(t)) \leq -cV(\phi(t)) \text{ mit einem } c > 0$$

herleitet. Wie in Bem. 0.4 folgt dann das exponentielle Abklingen einer jeden Lösung, welche hinreichend nahe 0 startet.

### 1.3.2 Satz von Hartman–Grobman

#### Satz 1.12 (Lipeomorphismus im $\mathbb{R}^n$ )

Gegeben sei der Banachraum

$$X = \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \phi \text{ stetig mit } \|\phi\|_X := \sup_{x \in X} |\phi(x)| < \infty\}.$$

Sei  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  und sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine globale Lipschitz–Abbildung aus

$$Y = \{\psi \in X : \|\psi\|_Y = \|\psi\|_X + \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} < \infty\}.$$

Für hinreichend kleine  $L$  und  $f \in Y_L = \{\phi \in Y : \|\phi\|_Y \leq L\}$  ist dann  $\Phi = A + f$  ein Lipeomorphismus des  $\mathbb{R}^n$  mit der Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}$  der Form  $A^{-1} + G(f)$ , wobei  $G$  Lipschitz in  $f$  ist. Ist  $f \in C_\mu^1 = \{\phi \in C^1 : |\phi|_1 < \mu\}$  mit hinreichend kleinem  $\mu$ , so ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus.

*Beweis:*

Betrachte  $y = [A + f](x) = Ax + f(x)$  bzw.  $A^{-1}[y - f(x)] = x$  und mit  $x = A^{-1}y + z$

$$T(z, y, f) = -A^{-1}f(A^{-1}y + z) \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y_\mu.$$

Es gelten dann mit  $\alpha := \|A^{-1}\|$ :  $|T(z, y, f) - T(\tilde{z}, y, f)| \leq \alpha\mu|z - \tilde{z}|$  und

$$|T(z, y, f) - T(z, \tilde{y}, \tilde{f})| \leq \alpha[|f(A^{-1}y + z) - \tilde{f}(A^{-1}\tilde{y} + z)|] \leq \alpha[\alpha\mu|y - \tilde{y}| + \|f - \tilde{f}\|_Y].$$

Für  $\alpha\mu < 1$  ist  $T$  also eine gleichmäßige Kontraktion (in  $z$ ), welche in den Parametern  $y$  und  $f$  Lipschitz ist. Nach Satz 1.2 erhält man einen Lipschitz Fixpunkt  $z = z(y, f)$ , welcher die Inverse  $\Phi^{-1}$  in der Form  $A^{-1} + z(\cdot, f)$  liefert. Die Diffeomorphismus–Aussage folgt aus Korollar 1.5. ■ □

#### Satz 1.13 (Hartman–Grobman)

Sei  $A = \text{diag}(A_s, A_u) \in GL(n, \mathbb{R})$  mit  $\alpha := \max\{\|A_s\|, \|A_u^{-1}\|\} < 1$ . Dann existiert ein  $L > 0$ , so daß es zu jedem  $f \in Y_\mu$  mit  $\mu \in (0, L)$  genau einen Homöomorphismus  $h(f)$  auf  $\mathbb{R}^n$  gibt mit  $h(0) = \text{id}$  und

$$h \circ (A + f) = A \circ h.$$

$h(f)$  hat die Form  $h(f) = I + G(f)$  mit einem stetigen  $G$ ,  $G(0) = 0$ .

*Beweis:*

Sei  $\mu \in (0, 1 - \alpha)$  so gewählt, daß nach Satz 1.12  $A + f$  für  $f \in Y_\mu$  ein Lipeomorphismus ist. Wir betrachten dann die allgemeinere Gleichung  $-\tilde{f} = 0$  ist dann die Gleichung aus dem Satz :

$$(I + g) \circ (A + f) = (A + \tilde{f}) \circ (I + g), \text{ i.e. } g \circ (A + f) - Ag = \tilde{f} \circ (I + g) - f.$$

Beide nachstehenden Gleichungen sind äquivalent hierzu:

$$\begin{aligned} g &= [Ag + \tilde{f} \circ (I + g) - f] \circ (A + f)^{-1} && (\text{stabiler Fall}) \\ g &= A^{-1}[g \circ (A + f) - \tilde{f} \circ (I + g) + f] && (\text{instabiler Fall}). \end{aligned}$$

Mit den  $A_{s/u}$  entsprechenden Einschränkungen  $\Pi_{s/u}$  definiere nun auf  $X \times Y_\mu \times Y_\mu$  (mit  $X$  wie in Satz 1.12)

$$\begin{aligned} T_s(g, f, \tilde{f}) &:= (\Pi_s[(Ag + \tilde{f} \circ (I + g) - f) \circ (A + f)^{-1}], 0) \\ T_u(g, f, \tilde{f}) &:= (0, A_u^{-1}\Pi_u[g \circ (A + f) - \tilde{f} \circ (I + g) + f]), \\ T(g, f, \tilde{f}) &:= T_s(g, f, \tilde{f}) + T_u(g, f, \tilde{f}). \end{aligned}$$

$T$  ist dann stetig in allen Argumenten mit Werten in  $X$  und Lipschitz in  $g$  mit der Lipschitzkonstanten  $\alpha + \mu < 1$ . Also hat  $T$  einen eindeutigen stetigen Fixpunkt  $g(f, \tilde{f})$ , welcher dann

$$(I + g) \circ (A + f) = (A + \tilde{f}) \circ (I + g)$$

erfüllt. Nun gilt weiter

$$\begin{aligned} (I + g(\tilde{f}, f)) \circ (I + g(f, \tilde{f})) \circ (A + f) &= (I + g(\tilde{f}, f)) \circ (A + \tilde{f}) \circ (I + g(f, \tilde{f})) \\ &= (A + f) \circ (I + g(\tilde{f}, f)) \circ (I + g(f, \tilde{f})). \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat aber nach Obigem eine eindeutige Lösung. Daraus folgt

$$(I + g(\tilde{f}, f)) \circ (I + g(f, \tilde{f})) = I = (I + g(f, \tilde{f})) \circ (I + g(\tilde{f}, f)),$$

was  $I + g(f, \tilde{f}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  als Homöomorphismus nachweist. ■ □

### Korollar 1.14 (Hartman–Grobman für ODEs)

Sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ . Sei  $f \in Y_L$  und sei  $\Phi_{B+f}(t, \xi)$  der von

$$\dot{x} = Bx + f(x), \quad x(0) = \xi,$$

erzeugte Fluß. Für hinreichend kleines  $L$  existiert ein stetig von  $f$  abhängiger Homöomorphismus  $h(f)$  des  $\mathbb{R}^n$  mit

$$h(\Phi_{B+f}(t, \xi)) = \Phi_B(t, h(\xi)) \quad \forall t, \xi.$$

*Beweis:*

Man hat  $\Psi_B(\xi) := \Phi_B(1, \xi) = e^B \xi$  und

$$\Psi_{B+f}(\xi) := \Phi_{B+f}(1, \xi) = e^B \xi + e^B \int_0^1 e^{-Bs} f(\Phi_{B+f}(s, \xi)) ds =: e^B \xi + F(\xi).$$

Mit der Gronwall–Ungleichung (Amann's [41] 99) erhält man  $F \in Y_\mu$  mit hinreichend kleinem  $\mu$ , falls nur  $\|f\|_Y$  hinreichend klein ist. Also gibt es nach Satz 1.13 einen eindeutigen Homöomorphismus  $h$  mit  $h \circ \Psi_{B+f} = \Psi_B \circ h$ . Betrachte nun für festes  $t$  die Abbildung

$$H(t, \xi) := \Phi_B(t, h(\Phi_{B+f}(-t, \xi))).$$

Man verifiziert  $H(t, \cdot) \circ \Psi_{B+f} = \Psi_B \circ H(t, \cdot)$ , so daß aus der Eindeutigkeitsaussage  $H(t, \cdot) = h(\cdot)$  für jedes feste  $t$  folgt. ■ □

### Aufgabe: Lokale Version von Hartman–Grobman

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $0 \in U$ . Sei  $f \in C_\mu^1(U, \mathbb{R}^n)$  mit  $f(0) = 0$  und  $A := Df(0) \in GL(n, \mathbb{R}^n)$  und gleichmäßig stetiger Ableitung. Für hinreichend kleine  $\mu > 0$  wende man auf  $\Phi(g, f, \tilde{f}) = g - T(g, f, \tilde{f}) = 0$

den Satz über Implizite Funktionen an, um eine lokale Version des Satzes von Hartman–Grobman zu erhalten (Lösungsweg in [8] 109).

**Ausblick: Invariante Mannigfaltigkeiten ([44] 132):**

Gegeben sei auf einer Nullumgebung  $U \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  eine  $C^{k,Lip}$ -Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  der Form

$$F(z) = Lz + R(z) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X(x, y) \\ Y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = F(x, y)$$

mit

$$a \equiv \|A^{-1}\| < 1, \quad b \equiv \|B\| < 1 \quad \text{und} \quad R(z) = o(|z|).$$

Dann existieren auf einer Nullumgebung zwei eindeutig bestimmte Lipschitz–Graphen

$$W^s = \{x = s(y)\} \ni (0, 0) \quad \text{und} \quad W^u = \{y = u(x)\} \ni (0, 0)$$

mit  $C^{k,Lip}$ -Abbildungen  $s$  und  $u$ , welche für  $k \geq 1$  auch  $Ds(0) = 0$  und  $Du(0) = 0$  erfüllen. Überdies gelten:

- (a)  $W^s$  und  $W^u$  sind lokal invariant unter  $F$ ,  $W^u$  ist lokal attraktiv unter  $F$ .
- (b)  $z \in W^s \Rightarrow F^n(z) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $z \in W^u \Rightarrow F^{-n}(z) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Es existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $z \notin W^s$  ein  $n(z) \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|F^{n(z)}(z)| > \delta$ .

$W^s$  heißt stabile,  $W^u$  instabile (lokale) Mannigfaltigkeit (des Fixpunkts  $z = 0$ ).

A11/07 - 20

*KAPITEL 1. GRUNDLAGEN*

# Appendix A

## Implizite Funktionen und Newton–Diagramm

### Vorbemerkung:

Es geht beim **Satz über implizite Funktionen** um die Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems

$$F(x, p) = 0 \quad (F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

in der Form  $x = g(p)$  nahe einer bekannten Lösung  $(x_0, p_0)$ , sagen wir nahe  $(0, 0)$ . In einer Dgl.  $x' = F(x, p)$  entspricht dies der Bestimmung der Ruhelagen.

Der Satz besagt (bei glattem  $F \in C^1$ ):

Wenn die Linearisierung

$$AL + B = 0 \quad \text{mit} \quad A = F_x(0, 0), B = F_p(0, 0)$$

eine eindeutige Lösung

$$L = -A^{-1}B \quad (A \text{ regulär!})$$

besitzt, so besitzt das nichtlineare System  $F(x, p) = 0$  lokal eine eindeutige glatte Lösung

$$x = x(p) = Lp + o(|p|) \quad \text{für} \quad |p| < \varepsilon.$$

D.h. in der Negation: Gehen durch  $(0, 0)$  mehrere (glatte) Lösungen  $x(p)$  oder lässt sich eine (glatte) Lösung nicht über  $(0, 0)$  hinaus glatt fortsetzen, so kann  $L$  nicht regulär sein, muss also einen Eigenwert gleich 0 haben.

*Beispiele (für Bifurkationen):*

$$F(x, p) = x(p - x), \quad F(x, p) = x(p - x^2), \quad F(x, p) = x^2 + p.$$

Bei  $F(x, p) = x^3 + p = 0$  gibt es zwar genau eine Lösung  $x = (-p)^{1/3}$  links und rechts von  $p = 0$ , diese ist aber nicht diffb. an  $p = 0$ .

Anders gewendet:

Hat man in einer Umgebung von  $(0, 0)$  eine glatte Lösung  $x = g(p)$  mit

$$0 = g(0) \quad \text{und} \quad F(g(p), p) \equiv 0,$$

so ergibt Differentiation nach  $p$

$$F_x(g(p), p) g_p(p) + F_p(g(p), p) \equiv 0,$$

insbesondere an  $p = 0$ :

$$A g_p(0) + B = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat entweder (i) keine Lösung oder (ii) unendlich viele Lösungen oder (iii) genau eine Lösung, nämlich obiges  $L$ . Der Satz über implizite Funktionen liefert die Umkehrung im Fall (iii). Er garantiert nämlich bei regulärem  $L$  die lokale Existenz einer glatten Lösung  $x = g(p)$ . ■

Gegeben sei eine glatte Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Nullumgebung  $U$  im  $\mathbb{R}^2$  der Form

$$f(x, y) = \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j + O(n+1) \tag{A.1}$$

mit Nullstelle  $(0, 0)$ . Bestimme alle Nullstellen von  $f$  nahe  $(0, 0)$ , z.B. für

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y + y^3 + O(3), \\ f_2(x, y) &= x^2 - y^3 + xy^2 + O(4), \\ f_3(x, y) &= x^3 - xy + y^3 + O(4), \\ f_4(x, y) &= [x^3 + xy + y^4][1 + O(1)], \\ f_5(x, y) &= [x^3 + x^2y - xy^2 + y^5][1 + O(1)], \\ f_6(x, y) &= x^2 - 2xy + y^2 + ax^3 \pm x^4. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ist  $f_x(0, 0) \neq 0$  oder  $f_y(0, 0) \neq 0$ , so erhält man mit dem Satz über implizite Funktionen (IFT) lokal genau eine Lösung  $x = s(y)$  bzw.  $y = \sigma(x)$ .

- Für  $f_1$  ist  $(f_1)_y(0, 0) = 1$ , also existiert genau eine Lösung  $y = \sigma(x)$  mit  $f(x, \sigma(x)) \equiv 0$  nahe  $x = 0$ . Die Taylorpolynome erhält man durch Koeffizientenvergleich:  $y = -x^2 + O(3)$ .

Sind nun  $f_x(0, 0)$  und  $f_y(0, 0)$  beide gleich 0, so ist die Nullstellenfrage offen:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$  hat keine Nullstellenkurve durch  $(0, 0)$ ,
- $f(x, y) = x^2 - y^2$  hat zwei Nullstellenkurven durch  $(0, 0)$ .

Wie findet man nichttriviale Nullstellenkurven?

Ist  $f(x, 0) \equiv 0$ , so hat man die triviale Lösung  $y \equiv 0$ . Analog ist für  $f(0, y) \equiv 0$   $x \equiv 0$  eine triviale Nullstellenkurve. Seien nun  $f(x, 0)$  und  $f(0, y)$  nicht identisch 0. Trage für  $a_{ij}x^i y^j$  mit  $a_{ij} \neq 0$  in ein ebenes Diagramm die Paare  $(i, j)$  ein und bestimme den konvexen Polygonzug durch  $(0, j_{\min})$  und  $(i_{\min}, 0)$ , so dass alle Paare in dessen Epigraphen liegen. Die auftretenden negativen Steigungen seien  $-s_1, \dots, -s_m$ . Sei  $\frac{p}{q}$  mit teilerfremden  $p, q \in \mathbb{N}$  eines dieser  $s_k$ . Die Skalierungen

$$x = u^p \quad \text{und} \quad y = vu^q \quad \text{in} \quad f(x, y) = 0 \quad (\text{A.3})$$

führen dann zu einer Gleichung der Form

$$P(v) + O(|u|) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.4})$$

mit einem Polynom  $P(v)$  mit  $N$  Summanden, wenn  $N$  Paare auf der Polygonzugkante der Steigung  $-s_k$  gelegen sind. Für einfache Nullstellen  $v^* \neq 0$  von  $P$  mit  $P(v^*) = 0$  und  $P_v(v^*) \neq 0$  erhält man mit IFT genau eine Lösung  $v = v^* + O(|u|)$  von (A.4) und mit (A.3) eine Lösung

$$y = v^* x^{q/p} + O(|x|^{(q+1)/p}) \quad (\text{A.5})$$

von (A.1). Für mehrfache Nullstellen von  $P$  ist das Verfahren zu wiederholen. Auf diese Weise findet man eine jede lokale Nullstellenkurve durch  $(0, 0)$ .

Zu den Beispielen in (A.3):

- Für  $f_2$  gibt es nur die Steigung  $-\frac{3}{2}$  für die Paare  $(2, 0), (0, 3)$ . Die Skalierung  $y = vu^2, x = u^3$  führt zu

$$u^6 - v^3 u^6 + O(|u|^7) \stackrel{!}{=} 0.$$

Also ist  $P(v) = 1 - v^3$  mit der einfachen Nullstelle  $v^* = 1$ . Einzige lokale Nullstellenkurve ist somit  $y = x^{2/3} + O(|x|)$ .

- Für  $f_3$  gibt es die Steigungen  $-2$  und  $-\frac{1}{2}$  für die Paare  $(3, 0), (1, 1), (0, 3)$ . Die Skalierung  $y = vu, x = u^2$  führt zu  $P(v) = -v + v^3$  mit den einfachen Nullstellen  $v = \pm 1$ . Diese liefern

$$y = \pm \sqrt{x} + O(|x|), \quad x \geq 0.$$

Die zweite Skalierung  $y = vu^2, x = u$  führt zu  $P(v) = 1 - v$  und somit zur Nullstellenkurve  $y = x^2 + O(|x|^3)$ .

- Nullstellenkurven von  $f_4$  sind  $y = -x^{1/3} + O(|x|^{2/3})$  und  $y = -x^2 + O(|x|^3)$ .
- Für  $f_5$  hat man die Steigungen  $-3$  und  $1$ . Erstere führt zur Nullstellenkurve

$$y = -x^{1/3} + O(|x|^{2/3}).$$

Letztere führt zum Polynom  $P(v) = 1 + v - v^2$ , welches zwei einfache Nullstellen  $v_1$  und  $v_2$  hat. Daher erhält man zwei weitere Nullstellenkurven

$$y = v_k x + O(|x|^2), \quad k = 1, 2.$$

- Für  $f_6$  ergibt sich die Steigung  $-1$ . Die Skalierung  $y = vu, x = u$  führt zu

$$u^2[(v-1)^2 + au \pm u^2] \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit  $w = v-1$  führt dies zum Nullstellenproblem  $w^2 + au \pm u^2 \stackrel{!}{=} 0$ , worauf das Verfahren nochmals anzuwenden ist. Für  $a \neq 0$  ergibt sich  $w = \pm\sqrt{|au|} + O(|u|)$ ,  $au \leq 0$ , für  $a = 0$  erhält man keine bzw. zwei Lösungen  $w = \pm u$ .

*Literatur: Chow & Hale: Methods of Bifurcation Theory, pp.45, Springer Verlag 1982.*

# Appendix B

## Differenzierbarkeit

**Definition B.1** ([AP] 9, [39] 228)

$f$  heißt am Punkt  $u \in U$  Gâteaux-differenzierbar, wenn ein  $df(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , genannt Gâteaux-Ableitung an  $u$ , existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(u + th) - f(u)] - df(u)h = 0 \quad \forall h \in X.$$

Man schreibt auch  $df(u)h = \frac{d}{dt} f(u + th) |_{t=0}$ .  $f$  heißt am Punkt  $u \in U$  differenzierbar oder F(réchet)-differenzierbar, wenn es ein  $f'(u) \equiv Df(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , genannt Ableitung oder F(réchet-)Ableitung an  $u$ , gibt mit

$$|f(u + h) - f(u) - Df(u)h| = o(|h|) \quad \text{für } |h| \rightarrow 0$$

für alle  $h \in X$  mit  $u + h \in U$ . Ist  $f$  für jedes  $u \in U$  differenzierbar, so nennt man  $f$  differenzierbar auf  $U$ . Ist dann die Abbildung

$$f' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y), \quad u \mapsto Df(u) = f'(u),$$

stetig, so nennt man  $f$  stetig differenzierbar und schreibt  $f \in C^1(U, Y)$ .

**Satz B.2 (Mittelwertsatz ([AP] 13))**

Für  $u, v \in U$  sei das Segment  $\Gamma = \{\gamma(t) = tu + (1 - t)v : t \in [0, 1]\}$  in  $U$ . Für auf  $U$  G-differenzierbares  $f : U \rightarrow Y$  gilt dann

$$|f(u) - f(v)| \leq \sup\{\|df(\gamma)\| : \gamma \in \Gamma\} \cdot |u - v|.$$

Insbesondere:  $C^1$ -Abbildungen sind lokal Lipschitz, denn es gilt:

Ist  $\|Df(x)\| \leq \kappa$  auf konvexem  $U$ , so hat  $f$  dort die Lipschitzkonstante  $\kappa$ .

*Beweis:*

Sei  $f(u) \neq f(v)$  und sei  $\ell \in Y'$  nach Hahn-Banach so gewählt, daß

$$\|\ell\| = 1 \quad \text{und} \quad \langle f(u) - f(v), \ell \rangle = |f(u) - f(v)|$$

gelten. Für  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(t) = \langle f(\gamma(t)), \ell \rangle$  gilt dann

$$\frac{h(t + \tau) - h(t)}{\tau} = \left\langle \frac{f(\gamma(t) + \tau(u - v)) - f(\gamma(t))}{\tau}, \ell \right\rangle,$$

woraus mit der G-Differenzierbarkeit und mit  $\tau \rightarrow 0$  folgt:  $h'(t) = \langle df(\gamma(t)), u - v \rangle, \ell \rangle$ . Also gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $\theta \in [0, 1]$  mit  $h(1) - h(0) = h'(\theta)$ . Umgeschrieben heißt dies

$$|f(u) - f(v)| = \langle df(\gamma(\theta)), u - v \rangle, \ell \rangle \leq \|\ell\| \|df(\gamma(\theta))\| |u - v| \text{ mit } \|\ell\| = 1 \quad \blacksquare$$

□

(Fréchet-)Differenzierbarkeit impliziert offensichtlich G-Differenzierbarkeit. Nun zur Umkehrung.

### Satz B.3 ([AP] 14)

Sei  $f : U \rightarrow Y$  G-differenzierbar in  $U$  und sei  $u \mapsto df(u)$  als Abbildung von  $U$  nach  $\mathcal{L}(X, Y)$  stetig an  $u^* \in U$ . Dann ist  $f$  differenzierbar an  $u^*$  mit  $Df(u^*) = df(u^*)$ .

*Beweis:*

Weise mit Satz B.2 nach:  $R(h) := f(u^* + h) - f(u^*) - df(u^*)h \stackrel{!}{=} o(|h|)$ .  $R$  ist für kleine  $h$  offensichtlich G-differenzierbar mit  $dR(h)\eta = [df(u^* + h) - df(u^*)]\eta$ . Mit  $R(0) = 0$  und  $\gamma(t) = th, t \in [0, 1]$ , liefert Satz B.2

$$|R(h)| \leq \sup_{[0,1]} \|dR(th)\| |h| = \sup_{[0,1]} \|df(u^* + th) - df(u^*)\| |h|.$$

Aus der Stetigkeit von  $df(\cdot)$  an  $u^*$  folgt die Behauptung. ■ □