



0.1 Systembeschreibung

Voraussetzung für die Anwendung modellbasierter Verfahren der System- und Regelungstheorie sind *mathematische Modelle* der betrachteten Prozesse. Diese Modelle können z.B. bei technischen Prozessen durch Anwendung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, wie etwa den *Newtonschen* Axiomen hergeleitet werden oder aus experimentell gewonnenen Prozessdaten abgeleitet werden. Die mathematische Beschreibung muss dabei so detailliert sein, dass sie einerseits die für die zu lösende Aufgabe relevanten Eigenschaften des Prozesses ausreichend gut widerspiegelt, andererseits aber handhabbar bleibt. Bei allen folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass dieses Ziel mit Hilfe eines Modells, bestehend aus *gewöhnlichen Differentialgleichungen* der Form

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u)
 \end{aligned} \tag{1}$$

erreicht wird. Die Prozessbeschreibung liegt dann als ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung vor, n ist die so genannte *Systemordnung*. Die *Zustandsvariablen* x_1, x_2, \dots, x_n sind Funktionen des reellen Zeitparameters t . Der Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt t_0 , d.h. die „Vorgeschichte“ des Systems, wird durch die Anfangszustände $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ repräsentiert. Mit $u(t)$ wird eine von Aussen auf das System wirkende Eingangsgröße bezeichnet.

Da die rechte Seite obiger Differentialgleichungen nicht explizit von t abhängt, besitzt das durch (1) beschriebene System die Eigenschaft der *Zeitinvarianz*. Aus diesem Grund kann t_0 ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu Null gewählt werden.

Oft ist man an Systemgrößen, die sich über *algebraische* Beziehungen aus den Verläufen der Zustandsvariablen ermitteln lassen, interessiert. Solche Systemgrößen können als Ausgangsgröße $y(t)$ des Modells (1) interpretiert werden, die sich gemäß

$$y = c(x_1, \dots, x_n) \tag{2}$$

darstellen lässt. Durch (1) und (2) wird ein *Zustandsraummodell* eines Systems mit der (skalaren) Eingangsgröße u und der (skalaren) Ausgangsgröße y beschrieben.

Führt man den Zustandsvektor \mathbf{x} und den Vektor \mathbf{f} gemäß

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}^T$$

ein, so lautet die Systembeschreibung (1) und (2) in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y &= c(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{3}$$

der Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wird mit \mathbf{x}_0 bezeichnet. Ist die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ *linear* in der Eingangsgröße u , so spricht man von einem *eingangslinaren* System oder von einem *AI-System* („affine input“). Die Systembeschreibung nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) u, \\ y &= c(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{4}$$

an. Einen wichtigen, wohlbekanntem Sonderfall von (3) bzw. (4) stellen Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei sind \mathbf{A} , \mathbf{b} und \mathbf{c} konstante Größen passender Dimension, d.h. \mathbf{A} ist eine (n, n) -Matrix, \mathbf{b} und \mathbf{c} sind n -dimensionale (Spalten-)Vektoren.

Systeme (3), deren rechte Seite ausschließlich vom Zustandsvektor \mathbf{x} abhängt, werden *autonom* genannt. Nach einer anfänglichen Anregung durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 verlaufen die Trajektorien eines autonomen System ohne weitere Beeinflussung von Aussen. Das System ist „sich selbst überlassen“. Die Beschreibung von autonomen System ergibt sich unter der Annahme von $u(t) \equiv 0$ aus (4) bzw. (5):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) & \text{bzw.} & & \text{(ii)} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ y &= c(\mathbf{x}) & & & y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Lösungen $\mathbf{x}(t)$ der Systemgleichungen (3) hängen vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 und vom Verlauf der Eingangsgröße $u(\tau)$ im Intervall $0 \leq \tau < t$ ab. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden durch

$$\mathbf{x}(t) = \Gamma \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ u(\tau), 0 \leq \tau < t \end{array} \right] \quad \text{oder kurz} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ u \end{array} \right) \tag{7}$$

symbolisiert. Die Kurve, die eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ im Zustandsraum beschreibt wenn der Zeitparameter t von null nach Unendlich strebt, wird *Trajektorie* genannt. Der Richtungssinn von Trajektorien für wachsende Zeiten t wird bei einer graphischen Darstellung durch Pfeile gekennzeichnet.

B Das mathematische Modell des in Bild 1 dargestellten Pendels soll aufgestellt werden. Dabei wird idealisierend vorausgesetzt, dass das Pendel aus einem drehbar gelagerten, masselosen Stab der Länge l und einer punktförmigen Masse m am Stabende besteht. Das der Pendelbewegung entgegenwirkende Reibungsmoment (Lagerreibung) sei der Winkelgeschwindigkeit proportional (Proportionalitätsfaktor k). Mit Hilfe des Drallsatzes¹ lautet die Differentialgle-

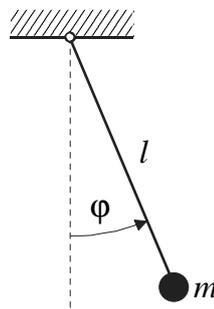


Bild 1: Pendel

ichung zur Ermittlung der Ausgangsgröße φ :

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - k \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{mit } k \geq 0$$

Führt man als Zustandsvariablen den Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit ein, d.h.

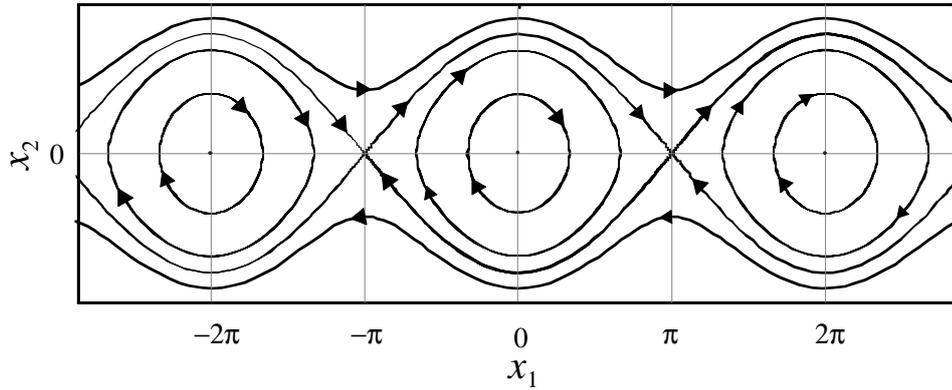
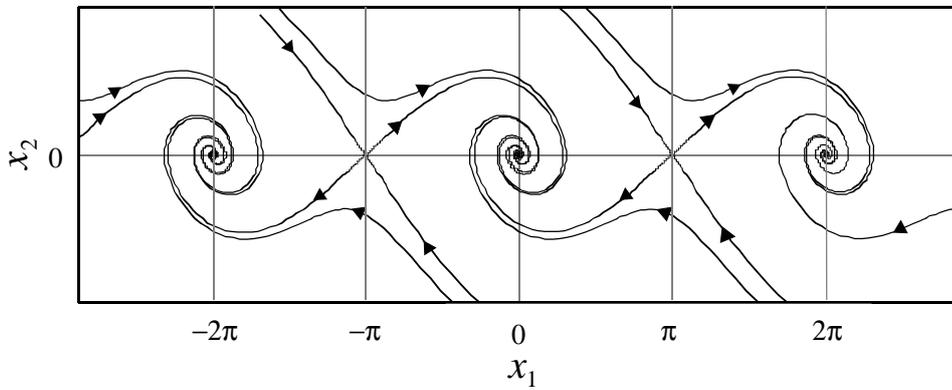
$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \frac{d\varphi}{dt},$$

so ergibt sich das folgende Zustandsraummodell:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{ml^2} x_2 \end{pmatrix}, \quad y = x_1. \quad (8)$$

Die zu dem Pendelmodell gehörigen Trajektorien sind in Bild 2 für $k = 0$, d.h. für den reibungsfreien Fall, dargestellt. Die ungedämpften Pendelbewegungen sind hier deutlich zu erkennen. In Bild 3 sind die entsprechenden Trajektorien für $k > 0$ dargestellt. ■

¹Mit g wird die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Bild 2: Trajektorien des Pendelmodells für $k = 0$ Bild 3: Trajektorien des Pendelmodells für $k > 0$

0.2 Linearität

Ein System (3) heisst *linear*, wenn es bezüglich seiner Anfangszustände und seiner Eingangsgröße dem *Superpositionsprinzip* genügt. Das bedeutet, dass die zu beliebigen Anfangszuständen und Eingangsgrößen gehörigen Lösungen (7) für beliebige Konstanten α und β den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u \end{pmatrix} \\
 \text{(ii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{x}_{0,1} + \beta \mathbf{x}_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,1} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{(iii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha u_1 + \beta u_2 \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u_1 \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Bei vorgegebener Ausgangsgröße muss außerdem die (algebraische) Ausgangsgleichung $y = c(\mathbf{x})$ eine entsprechende Eigenschaft besitzen, nämlich:

$$c(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \alpha c(\mathbf{x}_1) + \beta c(\mathbf{x}_2) \quad (10)$$

Systeme, die den Bedingungen (9) und (10) nicht genügen, nennt man *nichtlinear*.

B Gegeben sei das System

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) =: x_0.$$

Es soll untersucht werden, ob das System linear ist. Da auf das System keine Eingangsgröße wirkt, muss lediglich Bedingung (9,ii) überprüft werden. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$x(t) = e^{-t} x_0.$$

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die Linearitätsbedingung erfüllt ist. ■

Systeme der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

erfüllen die Bedingungen (9) und (10), d.h. sie sind linear[2]. Sie repräsentieren eine praktisch bedeutungsvolle Klasse von linearen, zeitinvarianten Systemen.

B Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - u, \quad x(0) =: x_0 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllt die Ausgangsgleichung die Bedingung (10) nicht, das System ist nichtlinear. ■

0.3 Ruhelagen

Die Ruhelagen \mathbf{x}_R eines Systems (3) sind diejenigen Punkte des Zustandsraumes, in denen bei konstanter Eingangsgrößen $u(t) = u_R$ die Bedingung

$$\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \mathbf{0} \quad (11)$$

erfüllt ist. Somit ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Ruhelagen eines Systems (3):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Trajektorien, die in einer Ruhelage \mathbf{x}_R starten, bleiben bei konstanter Eingangsgröße u_R für alle Zeiten in \mathbf{x}_R . Das System verharrt im Zustand der Ruhe, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_R), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_R \quad \implies \quad \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_R.$$

Ruhelagen sind demnach spezielle Trajektorien, die als „Gleichgewichtszustände“ eines Systems interpretiert werden können.

B Es sollen *alle* Ruhelagen des autonomen Systems

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - x$$

ermittelt werden. Aus Bedingung (12) folgt

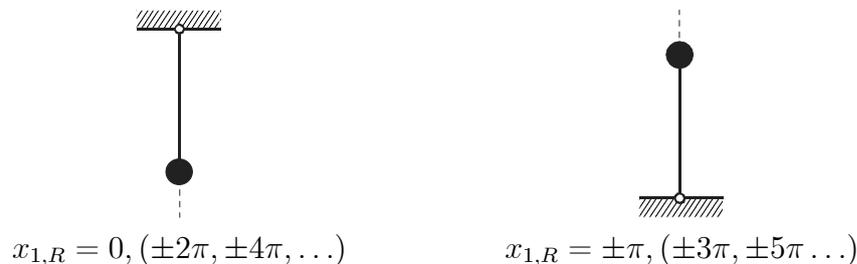
$$x_R^2 - x_R = x_R(x_R - 1) = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass das System zwei Ruhelagen, nämlich $x_R = 0$ und $x_R = 1$ besitzt. ■

B Die Ruhelagen des Pendelmodells (8) sind in Bild 2 bzw. Bild 3 leicht zu erkennen. Sie lauten:

$$x_{1,R} = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi \dots, \quad x_{2,R} = 0$$

Diese unendlich vielen Ruhelagen entsprechen den beiden möglichen Gleichgewichtszuständen des realen Pendels in der hängenden bzw. in der aufrechten Position:



0.4 Lineare Systeme - ein Überblick

0.4.1 Ruhelagen

Die Ermittlung der Ruhelagen eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{13}$$

führt mit Hilfe (12) auf die Bedingung

$$-\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{b}u_R. \tag{14}$$

Bezeichnet man mit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ die Spalten der (n, n) -Matrix \mathbf{A} , d.h.

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n \right)$$

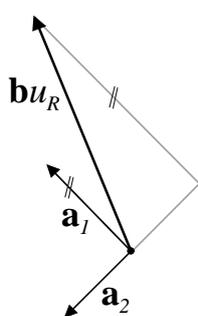
und mit $x_{R,1}, \dots, x_{R,n}$ die Komponenten der gesuchten Ruhelage \mathbf{x}_R , also

$$\mathbf{x}_R = \left(x_{R,1} \quad \dots \quad x_{R,n} \right)^T,$$

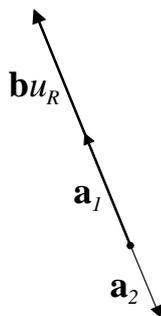
so kann (14) folgendermaßen dargestellt werden:

$$-(\mathbf{a}_1 x_{R,1} + \mathbf{a}_2 x_{R,2} + \dots + \mathbf{a}_n x_{R,n}) = \mathbf{b} u_R$$

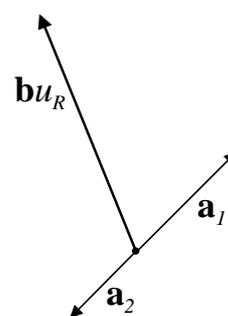
Die Ermittlung möglicher Ruhelagen reduziert sich also auf die Beantwortung der Frage, ob der Vektor $(\mathbf{b} u_R)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von \mathbf{A} dargestellt werden kann. Ist das der Fall, so gibt es mindestens eine Ruhelage, anderenfalls existiert keine Ruhelage. Eine geometrische Interpretation für $n = 2$ liefern die folgenden Abbildungen:



1 Ruhelage



∞ viele Ruhelagen



keine Ruhelagen

Über den so genannten Rang einer Matrix kann die vorliegende Problemstellung prägnant formuliert werden. Er gibt an, wieviele linear unabhängige Spalten (bzw. Zeilen) eine Matrix besitzt. Offensichtlich kann der Vektor $(\mathbf{b} u_R)$ genau dann als Linearkombination der Spalten von \mathbf{A} dargestellt werden, wenn gilt:

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R)$$

Das bedeutet, dass die $(n, n + 1)$ -Matrix, die sich durch das Hinzufügen des Vektors $(\mathbf{b} u_R)$ als zusätzliche Spalte ergibt, den gleichen Rang besitzt wie die Matrix \mathbf{A} . Dies trifft auf jeden Fall zu, wenn \mathbf{A} regulär ist, also den Höchststang, d.h. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ besitzt. Dann gibt es genau *eine* Ruhelage, nämlich

$$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} u_R$$

Im Falle einer singulären Matrix \mathbf{A} mit $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R) < n$ gibt es unendlich viele Ruhelagen, man spricht dann von einer *Ruhezone*.

Die gefundenen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

rang(\mathbf{A}) < rang($\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R$)	rang(\mathbf{A}) = rang($\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R$)	
	rang(\mathbf{A}) < n	rang(\mathbf{A}) = n
keine Ruhelage	∞ viele Ruhelagen	genau <i>eine</i> Ruhelage $\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} u_R$

B Es sollen die Ruhelagen des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

ermittelt werden. Es gilt:

$$(\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_R \end{pmatrix}$$

Für den Fall $u_R = 0$, d.h. rang(\mathbf{A}) = rang($\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R$) = 1 gibt es unendlich viele Ruhelagen, nämlich

$$\mathbf{x}_R = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei α eine beliebige reelle Konstante ist. Die Trajektorienverläufe, die in Bild 4 für verschiedene Anfangszustände $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0} \ x_{2,0})^T$ dargestellt sind und die gefundene Ruhezone ergeben sich unmittelbar aus der Lösung der Systemgleichungen:

$$\mathbf{x}(t) = (x_{1,0} - x_{2,0}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + x_{2,0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $u_R \neq 0$, also rang(\mathbf{A}) < rang($\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R$) = 2 existiert keine Ruhelage. ■

0.4.2 Lösung der Systemgleichungen

Für einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0 = 0)$ und eine Eingangsgröße $u(\tau)$ mit $0 \leq \tau < t$ lautet die Lösung[2] des linearen Differentialgleichungssystems (13):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (15)$$

Die Matrixexponentialfunktion $e^{\mathbf{A}t}$ ist die so genannte *Transitionsmatrix*. Ihre Elemente sind (zeit-)gewichtete Summen von Exponentialfunktionen der Form $e^{s_i t}$, wobei mit s_i die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} bezeichnet werden. Daraus folgt unter anderem, dass ohne äußere Erregung (d.h. $u(t) \equiv 0$), der Zustandsvektor für *endliche* Werte von t keinesfalls gegen unendlich oder Null streben kann.

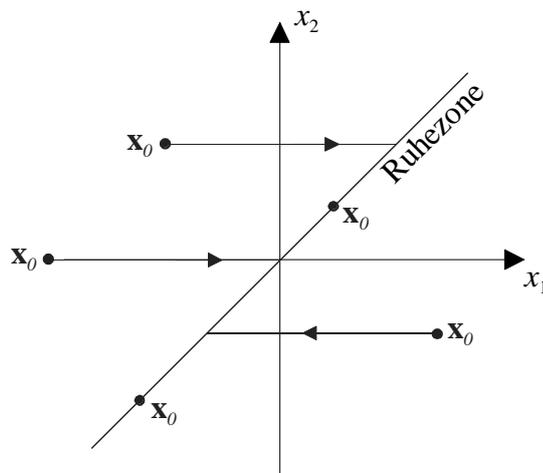


Bild 4: Lineares System mit unendlich vielen Ruhelagen

Periodische Lösungen

Ein autonomes lineares System, also

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

besitzt für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0 = 0)$ gemäß (15) die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0.$$

Aufgrund der oben beschriebenen Struktur der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ sind periodische Lösungen („Dauerschwingungen“), also Lösungen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \quad T \dots \text{Periode}$$

dann und nur dann möglich, wenn die Systemmatrix \mathbf{A} Eigenwerte mit verschwindendem Realteil besitzt. Dies verdeutlicht das folgende Beispiel.

B Gegeben sei ein so genannter linearer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} lauten $s_{1,2} = \pm j\omega$. Für die Transitionsmatrix ergibt sich²

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

In Bild ?? sind die Trajektorien $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ für verschiedene Anfangszustände \mathbf{x}_0 graphisch dargestellt. Dabei sind die Fälle $\omega = 0$ und $\omega \neq 0$ zu unterscheiden. Bei verschwindendem

²Z.B. durch Anwendung der Laplace-Transformation[2].

ω stellt nämlich *jeder* Punkt der Zustandsebene eine Ruhelage dar, d.h. es gilt $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ für beliebige Anfangszustände \mathbf{x}_0 . Für $\omega \neq 0$ sind die Trajektorien konzentrische Kreise um den Ursprung der Zustandsebene, die mit einer Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ durchlaufen werden. Dieses Ergebnis kann auch ohne Berechnung von $e^{\mathbf{A}t}$ gefunden werden. Dazu ist die zeitliche

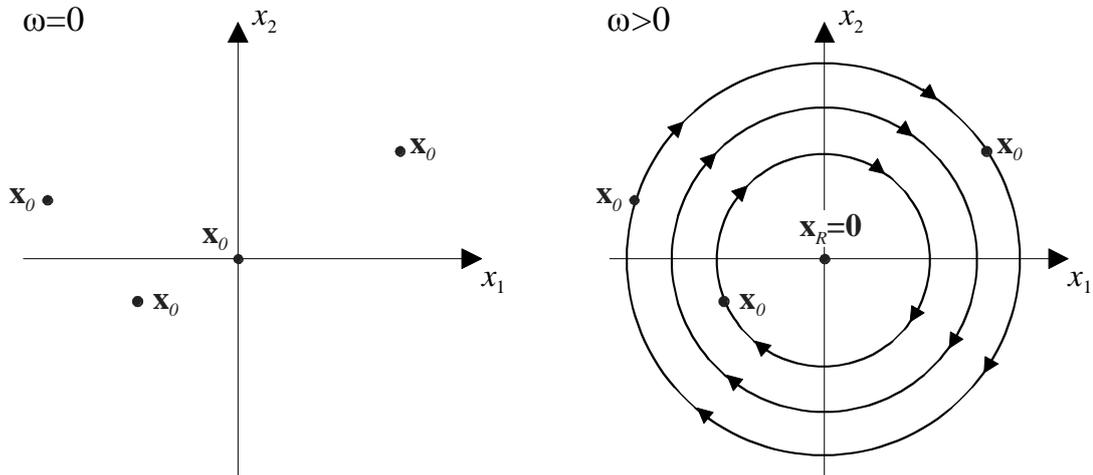


Bild 5: Periodische Lösungen in einem linearen System

Änderung des Abstandes eines auf einer Trajektorie liegenden Punktes (x_1, x_2) vom Ursprung der Zustandsebene zu untersuchen. Es gilt nämlich für den quadratischen Abstand

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 \omega x_2 - 2x_2 \omega x_1 = 0.$$

Das bedeutet, der Abstand vom Ursprung ist zeitunabhängig, also konstant. Da das System für $\omega \neq 0$ nur eine einzige Ruhelage im Ursprung besitzt, kann der Schluss gezogen werden, dass die Trajektorien Kreise um den Ursprung sind. Die „Drehrichtung“ kann ebenfalls mühelos ermittelt werden. Dazu muss beispielsweise nur die erste Differentialgleichung, also

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega x_2$$

betrachtet werden. In der oberen Halbebene der Zustandsebene, d.h. $x_2 > 0$ gilt somit beispielsweise für $\omega > 0$

$$\frac{dx_1}{dt} > 0,$$

was einer „Drehung“ im Uhrzeigersinn entspricht. ■

Periodische Vorgänge in linearen Systemen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Periode durch die entsprechenden (rein imaginären) Eigenwerte vorgegeben ist, während ihre Amplitude und Phasenlage durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 bestimmt werden. Eine (beliebig geringfügige) Verschiebung der Eigenwerte von der imaginären Achse aufgrund von Parametervariationen der Systemparameter führt dazu, dass die harmonische Schwingung in eine aufklingende oder gedämpfte Schwingung übergeht.

0.4.3 Stabilität

Stabilität von Ruhelagen

Für die Stabilität sind die Eigenwerte s_i der Systemmatrix \mathbf{A} maßgeblich. Somit besitzen *alle* Ruhelagen³ des Systems den gleichen „Stabilitätscharakter“. Das bedeutet, dass im linearen Fall die Stabilität eine *Eigenschaft* des betrachteten Systems ist.

Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y wird durch seine *Übertragungsfunktion*⁴

$$G(s) = \left. \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \right|_{\mathbf{x}_0=0} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

beschrieben. Die Lage der Pole von $G(s)$, die eine Teilmenge der Eigenwerte s_i von \mathbf{A} darstellen, sind entscheidend für die Eingangs - Ausgangs - Stabilität des Systems.

0.5 Nichtlineare Systeme - ein Überblick

0.5.1 Ruhelagen

Über die Anzahl möglicher Ruhelagen kann bei nichtlinearen Systemen *keine* allgemeine Aussage getroffen werden.

B Das nichtlineare System

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)(x + 1)$$

besitzt *zwei* Ruhelagen, nämlich $x_{R,1} = 1$ und $x_{R,2} = -1$. Man beachte, dass diese Situation im linearen Fall *nicht* möglich ist! ■

B Das nichtlineare System

$$\frac{dx}{dt} = \sin x + u$$

besitzt für konstante Eingangsgrößen $u = u_R$ mit der Eigenschaft $|u_R| \leq 1$ unendlich viele Ruhelagen, im Falle $|u_R| > 1$ existiert keine Ruhelage. ■

³Zur Erinnerung: unendlich viele Ruhelagen kann es nur dann geben, wenn \mathbf{A} singulär ist.

⁴Mit $\mathcal{L}\{z(t)\}$ wird die Laplacetransformierte des Zeitsignals $z(t)$ bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{L}\{z(t)\} = \int_0^{\infty} z(t)e^{-st} dt$$

0.5.2 Lösung der Systemgleichungen

Im Allgemeinen muss bei nichtlinearen Differentialgleichungen die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit möglicher Lösungen gestellt werden. Dies verdeutlicht das folgende einfache Beispiel.

B Für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0$$

findet man z.B. mit Hilfe der Trennung der Variablen die beiden(!) Lösungen

$$x(t) = \frac{t^2}{4} \quad \text{und} \quad x(t) \equiv 0.$$

Für den angegebenen Anfangswert $x(0) = 0$ gibt es also *keine* eindeutige Lösung. ■

Wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird, stellen hinreichende *Lipschitz*-Bedingungen den Schlüssel zur Beantwortung der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung dar [1, 3].

Existenz und Eindeutigkeit

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf ein System von n Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (16)$$

Diese Darstellung ergibt sich aus (3), wenn für die Eingangsgröße $u(t)$ ein vorgegebener Zeitverlauf eingesetzt wird. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ stückweise stetig in t ist. Diese Annahme erlaubt die Berücksichtigung von Eingangsgrößen $u(t)$ mit sprunghaften Zeitverläufen.

Wenn nun $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ für alle \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 aus einer Umgebung von \mathbf{x}_0 , also⁵

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{B} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$$

und alle t aus einem Intervall $[t_0, t_0 + \tau]$ mit $\tau > 0$ die *Lipschitz*-Bedingung

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, t) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad (17)$$

erfüllt, dann existiert in einem Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$ eine eindeutige Lösung für die Differentialgleichung (16) mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Gelingt es also bei gegebenem $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ und \mathbf{x}_0 eine *Lipschitzkonstante* L so zu ermitteln, dass (17) für alle (\mathbf{x}_1, t) und (\mathbf{x}_2, t) aus einer Umgebung von (\mathbf{x}_0, t_0) gilt, so gibt es in einem *beliebig kleinen* Zeitintervall eine eindeutige Lösung.

⁵Mit $\|\mathbf{y}\|$ wird eine beliebige *Norm* des reellen (Spalten-) Vektors \mathbf{y} bezeichnet. Eine bekannte Norm ist z.B. die „Euklidische Länge“ des Vektors \mathbf{y} , d.h. $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}$.

Ist Bedingung (17) erfüllt, so bezeichnet man $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ (lokal) lipschitzstetig bezüglich \mathbf{x} in \mathcal{B} . Aus der *Lipschitz*-Stetigkeit folgt die Stetigkeit, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

B Die zu dem Anfangszustand $x(0) = 1$ gehörige Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

lautet

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

In Bild 6 ist der Verlauf von $x(t)$ graphisch dargestellt. Für $t \rightarrow 1$ strebt $x(t)$ gegen Unendlich,

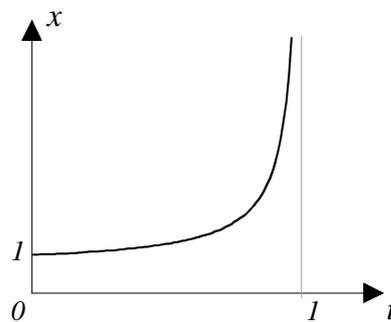


Bild 6: Endliche Entweichzeit

man spricht von einem System mit *endlicher Entweichzeit* bzw. mit *endlicher Fluchtzeit*. Wie bereits erwähnt, ist ein solches Verhalten bei autonomen linearen Systemen aufgrund der Struktur der Transitionsmatrix nicht möglich! ■

Die Existenz und Eindeutigkeit für beliebig große Zeitintervalle kann mit einer *globalen Lipschitz*-Bedingung garantiert werden. Gilt nämlich (17) für *beliebige* Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 , d.h. $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ und für *alle* t aus dem beliebigen Intervall $[t_0, t_1]$, so besitzt (17) mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ eine eindeutige Lösung im Intervall $[t_0, t_1]$.

Periodische Lösungen

Im Gegensatz zum linearen Fall sind bei autonomen nichtlinearen Systemen periodische Lösungen möglich, bei denen Periode *und* Amplitude durch die beschreibenden Differentialgleichungen vorgegeben sind. Trajektorien, deren Startpunkte in bestimmten Bereichen des Zustandsraumes starten, münden nach hinreichend langer Zeit in die vom Anfangszustand unabhängige gleiche periodische Lösung. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Grenzschwingung* bzw. von einem *Grenzyklus*.

B Eine nichtlineare Erweiterung des linearen Oszillators stellt das folgende System dar:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1 - x_1^2 - x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Um qualitative Aussagen über den Verlauf der Trajektorien des Systems treffen zu können, wird die gleiche Vorgangsweise wie beim linearen Oszillator gewählt. D.h. es wird die zeitliche Änderung des Abstandes eines Punktes (x_1, x_2) vom Koordinatenursprung untersucht, also

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2) (1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Für den Fall $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also am Einheitskreis, stimmen die Trajektorien des nichtlinearen Systems mit denen des linearen Oszillators überein, es gilt

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Trajektorien, deren Startpunkte der Bedingung $x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 = 1$ genügen, durchlaufen also mit wachsender Zeit den Kreis mit dem Radius 1 im Uhrzeigersinn. Für Punkte außerhalb des Einheitskreises, d.h. $x_1^2 + x_2^2 > 1$ gilt für die zeitliche Änderung des Abstandes zum Ursprung

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) < 0.$$

Trajektorien, die außerhalb des Einheitskreises starten, nähern sich mit wachsender Zeit diesem

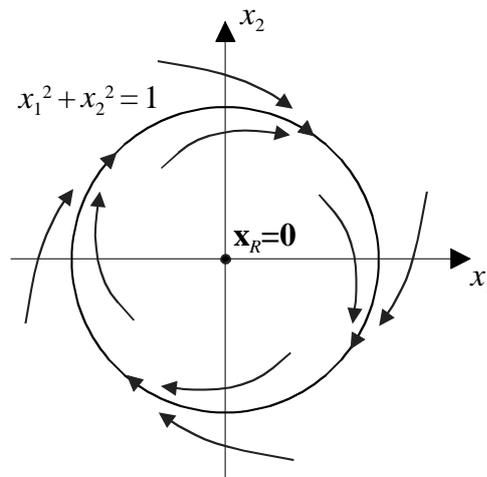


Bild 7: Grenzschwingung

beliebig nahe. Analog dazu gilt für Punkte im Inneren des Einheitskreises:

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

Alle Trajektorien - bis auf die Ruhelage im Ursprung - streben also für wachsende Werte von t zum Einheitskreis. Im Gegensatz zum linearen Oszillator, bei dem *jeder* Anfangszustand \mathbf{x}_0 Startpunkt einer periodischen Lösung ist, münden hier alle Trajektorien in einen einzigen „isolierten“ Grenzyklus. Einen Überblick über den Verlauf der Trajektorien für verschiedene Anfangszustände des betrachteten Systems gibt Bild 7. ■

Chaos

Nichtlineare Systeme können chaotisches Verhalten besitzen. Kennzeichen von chaotischen Systemen ist die extreme Empfindlichkeit bezüglich der gewählten Anfangszustände. Minimale Variationen in den Anfangszuständen \mathbf{x}_0 haben vollkommen veränderte Lösungen $\mathbf{x}(t)$ zur Folge. Obwohl die betrachteten Systeme bekannten Gesetzmäßigkeiten folgen, also deterministisch sind, ist eine Vorhersage des Systemverhaltens auch über kurze Zeiträume nicht möglich. Beispiele für chaotische Systeme sind das Lorenz Modell[4] bzw. Wettermodelle in der Meteorologie.

0.5.3 Stabilität

Stabilität von Ruhelagen

Dass bei nichtlinearen Systemen die Stabilität *keine* Systemeigenschaft ist, ist anhand des Pendelmodells leicht einzusehen.

B Das Modell des reibungsbehafteten Pendels aus Bild 1 besitzt unendlich viele Ruhelagen, die den zwei Gleichgewichtslagen des Pendels entsprechen. Die durch

$$\begin{aligned}x_{1,R} &= \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\x_{2,R} &= 0\end{aligned}$$

charakterisierten Ruhelagen beschreiben das Pendel in der „hängenden“ Stellung. Hinreichend kleine Auslenkungen des Systems aus der Gleichgewichtslage klingen aufgrund der Reibungseffekte ab, das System kehrt (für $t \rightarrow \infty$) in die Ausgangslage zurück (siehe Bild 3). Ganz anders ist das Systemverhalten in der „oberen“ Gleichgewichtslage, also

$$\begin{aligned}x_{1,R} &= \pm(2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\x_{2,R} &= 0\end{aligned}$$

Schon kleinste Störungen haben zur Folge, dass das Pendel seine labile Lage verlässt und (für $t \rightarrow \infty$) in die „hängende“ Stellung übergeht. ■

Bei nichtlinearen Systemen können also verschiedene Ruhelagen auch unterschiedlichen Stabilitätscharakter besitzen. Die Stabilität ist somit eine Eigenschaft der betrachteten Ruhelage, man spricht von der *Stabilität der Ruhelage*.

Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Die Eingangs - Ausgangsstabilität eines nichtlinearen Übertragungssystems (3) mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y kann mit dem Konzept der so genannten L - Stabilität behandelt werden. Dabei wird mit speziellen Normbeschränkungen⁶ für die Eingangsgröße u und die Ausgangsgröße y operiert.

⁶Unter einer Norm ist dabei ein Maß für die „Größe“ eines Zeitsignals, wie z.B. das Betragsmaximum zu verstehen.

0.6 Aufgaben

A Zeigen Sie, dass das System

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1, \quad x(0) =: x_0$$

den Linearitätsbedingungen *nicht* genügt.

A Zeigen Sie, dass ein zeitinvariantes System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

den Linearitätsbedingungen genügt.

A Ermitteln Sie *alle* Ruhelagen des Systems

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

A Gegeben sei das autonome, lineare System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(a) Ermitteln Sie das charakteristische Polynom der Systemmatrix \mathbf{A} . Bestimmen Sie die Eigenwerte von \mathbf{A} .

(b) Simulieren Sie für $0 \leq t \leq 20$ den Verlauf der Trajektorien für folgende Anfangszustände. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

- (i) $\mathbf{x}_0 = (0.125 \quad -0.125 \quad 0.125 \quad -0.125 \quad 0.125 \quad -0.125)^T$
- (ii) $\mathbf{x}_0 = (0.125 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.125)^T$
- (iii) $\mathbf{x}_0 = (0 \quad 0.25 \quad 0 \quad -0.25 \quad 0 \quad 0.25)^T$

A Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Trajektorien der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 & 1 \\ -1 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

durch Einführung von *Polarkoordinaten*, d.h. $x_1 = r \cos \varphi$ und $x_2 = r \sin \varphi$.

A Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.1 \frac{dy}{dt} + y^5 = u.$$

(a) Geben Sie durch Einführung der Zustandsvariablen

$$x_1 := y \quad \text{und} \quad x_2 := \frac{dy}{dt}$$

ein entsprechendes Zustandsraummodell der Form (3) an, wobei als Ausgangsgröße $y(t)$ gewählt werden soll.

(b) Für die Eingangsgröße wird nun der Verlauf

$$u(t) = 6 \sin t$$

vorgegeben. Untersuchen Sie durch numerische Simulation, wie empfindlich der Verlauf der Ausgangsgröße y bezüglich kleiner Variationen des Anfangszustandes ist.

Literaturverzeichnis

- [1] COLLATZ L.: Differentialgleichungen, Band 1, 6. Auflage, Teubner, 1981
- [2] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Studium, 2004
- [3] KHALIL H.K.: Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall, 2002
- [4] VERHULST F.: Nonlinear Differential Equations and Dynamical System, 2nd edition, Springer, 1996



1 Stabilitätsbegriffe nach Ljapunov

Definition: Die Ruhelage \mathbf{x}_R eines autonomen Systems wird *stabil* (im Sinne von Ljapunov) genannt, wenn die Trajektorien für $t \geq 0$ in einer *beliebig* kleinen Umgebung der Ruhelage \mathbf{x}_R verbleiben, sofern deren Anfangszustand $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t = 0)$ in einer *hinreichend* kleinen Umgebung von \mathbf{x}_R gelegen war.

Zur mathematischen Präzisierung des obigen Stabilitätsbegriffes gebraucht man das Konzept der *Vektornorm* als Maß für die „Größe“ eines Vektors. Die so genannte *p-Norm* eines Vektors $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ ist gemäß

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

definiert. Hierbei ist p eine positive, ganze Zahl. Übliche Normen sind:

$$p = 1 : \quad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{Einsernorm}$$

$$p = 2 : \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{Zweiernorm oder Euklidische Norm}$$

$$p = \infty : \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{Unendlichnorm}$$

In Bild 1 sind für den Fall $n = 2$ die Kurven konstanter Norm, d.h. $\|\mathbf{x}\|_p = 1$ für $p = 1, 2, 5, 10, \infty$ in der x_1 - x_2 -Ebene eingezeichnet.

Im Weiteren wird auf die explizite Kennzeichnung der jeweils verwendeten Norm verzichtet, da prinzipiell jede der oben definierten Normen verwendet werden kann.

Mit diesem Hilfsmittel kann die Definition einer stabilen Ruhelage \mathbf{x}_R folgendermaßen formuliert werden:

Definition: Die Ruhelage \mathbf{x}_R heißt stabil, wenn zu jeder *beliebig kleinen*(!) positiven Zahl ε eine Zahl δ existiert, so dass für Anfangszustände, die die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R\| < \delta \quad (2)$$

erfüllen, die Gültigkeit von

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_R\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

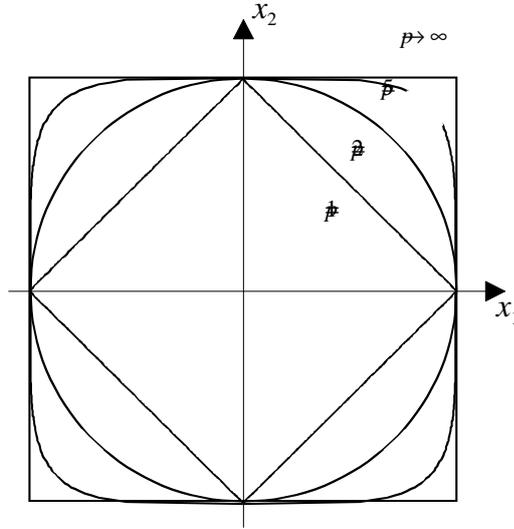


Bild 1: Visualisierung der Beschränkung $\|\mathbf{x}\|_p = 1$ für $p = 1, 2, 5, 10$

folgt (siehe Bild 2, dem die Euklidische Norm zugrunde liegt).

Genügt eine Ruhelage obiger Stabilitätsdefinition nicht¹, so nennt man sie *instabil*.

Definition: Die Ruhelage \mathbf{x}_R eines autonomen Systems heisst *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist *und* wenn Trajektorien, die hinreichend nahe bei der Ruhelage beginnen, für $t \rightarrow \infty$ zu dieser zurückstreben, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R.$$

Anmerkung: Die Eigenschaft $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R$ für Anfangszustände hinreichend nahe bei \mathbf{x}_R wird auch als *Attraktivität* der Ruhelage bezeichnet. Bedingungen für die asymptotische Stabilität der Ruhelage \mathbf{x}_R sind die Stabilität *und* die Attraktivität.

Die Attraktivität einer Ruhelage alleine ist im Allgemeinen nicht hinreichend für die asymptotische Stabilität.

Definition: Unter dem *Einzugsbereich* einer asymptotisch stabilen Ruhelage \mathbf{x}_R versteht man die Menge aller Punkte des Zustandsraumes, von denen aus die Trajektorien für $t \rightarrow \infty$ zur Ruhelage \mathbf{x}_R zurückstreben.

Definition: Ist der *Einzugsbereich* einer asymptotisch stabilen Ruhelage \mathbf{x}_R der gesamte Zustandsraum, so nennt man die Ruhelage \mathbf{x}_R *global asymptotisch stabil*.

In den folgenden Abschnitten werden Verfahren zur Ermittlung des Stabilitätscharakters von Ruhelagen autonomer Systeme vorgestellt.

¹D.h. man kann ein ε angeben, zu dem es kein entsprechendes δ gibt, sodass (2) und (3) erfüllt sind.

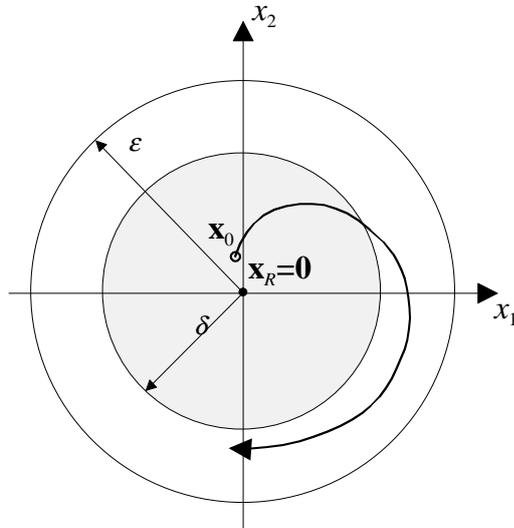


Bild 2: Stabilität nach Ljapunov

2 Die Methode der ersten Näherung

Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, das nichtlineare System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

in der Nähe einer Ruhelage \mathbf{x}_R durch ein lineares System zu approximieren. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Linearisierung des nichtlinearen Systems um die Ruhelage \mathbf{x}_R . Mit Hilfe des ermittelten linearen Systems können dann Aussagen über den Stabilitätscharakter der Ruhelage des nichtlinearen Systems getroffen werden. Man schliesst also vom Stabilitätsverhalten des linearen Systems auf das Stabilitätsverhalten der Ruhelage des nichtlinearen Systems! Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *indirekten Methode von Ljapunov*.

Das nichtlineare System wird in einer kleinen Umgebung der zu untersuchenden Ruhelage \mathbf{x}_R betrachtet, man setzt

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi} \quad (5)$$

an, wobei $\boldsymbol{\xi}$ eine (hinreichend) kleine Auslenkung aus der Ruhelage darstellt. Eingesetzt in (4) gilt also:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}) \quad (6)$$

bzw.

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}). \quad (7)$$

Die rechte Seite von (7) wird nun in eine Taylorreihe um \mathbf{x}_R entwickelt, d.h.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R}, \quad (8)$$

wobei die vektorwertige Funktion $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ alle Terme höherer Ordnung der Reihenentwicklung repräsentiert. Die Matrix $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ist die sogenannte *Jacobi-Matrix* und errechnet sich gemäß

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ausgewertet an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ erhält man eine konstante Matrix, die im folgenden mit dem Buchstaben \mathbf{J} bezeichnet wird, d.h.

$$\mathbf{J} := \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R}. \quad (10)$$

Unter der Annahme, dass in der Nähe der Ruhelage \mathbf{x}_R die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können, d.h.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_R} \approx \mathbf{0},$$

kann man für das um die Ruhelage linearisierte System schreiben:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{J} \boldsymbol{\xi}.$$

Mit Hilfe der konstanten Matrix \mathbf{J} können nun folgende 3 Aussagen getroffen werden:

I Besitzen alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{J} negativen Realteil, so ist die Ruhelage \mathbf{x}_R des nichtlinearen Systems (4) *asymptotisch stabil*.

II Besitzt mindestens ein Eigenwert der Matrix \mathbf{J} einen positiven Realteil, so ist die Ruhelage \mathbf{x}_R des nichtlinearen Systems (4) *instabil*.

III Besitzt die Matrix \mathbf{J} keine Eigenwerte mit positivem Realteil, aber Eigenwerte mit verschwindendem Realteil, so ist *keine Aussage möglich*.

Beispiel: Gegeben sei folgendes nichtlineare System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \alpha x - x^3 \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der Methode der ersten Näherung soll die Stabilität der Ruhelagen untersucht werden. Die Ruhelagen sind die Lösungen der Gleichung

$$\alpha x_R - x_R^3 = (\alpha - x_R^2) x_R = 0.$$

Es existiert auf jeden Fall eine Ruhelage bei $x_R = 0$, für $\alpha > 0$ gibt es zwei weitere Ruhelagen bei $x_R = \pm\sqrt{\alpha}$. Zunächst wird die Ruhelage im Ursprung untersucht. Die Jacobi-Matrix lautet

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = (\alpha - 3x^2) \Big|_{x=x_R=0} = \alpha,$$

für das linearisierte System gilt also:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha \xi$$

Bei der Beurteilung der Stabilität von $x_R = 0$ sind somit drei Fälle möglich:

- $\alpha < 0 \Rightarrow x_R = 0$ ist asymptotisch stabil (Fall **I**)
- $\alpha > 0 \Rightarrow x_R = 0$ ist instabil (Fall **II**)
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich² (Fall **III**)

Im Falle $\alpha > 0$ ergibt sich

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\pm\sqrt{\alpha}} = (\alpha - 3x^2) \Big|_{x=x_R=\pm\sqrt{\alpha}} = -2\alpha.$$

Das um die Ruhelagen $x_R = \pm\sqrt{\alpha}$ linearisierte System lautet

$$\frac{d\xi}{dt} = -2\alpha \xi,$$

d.h. beide Ruhelagen sind asymptotisch stabil (Fall **I**).

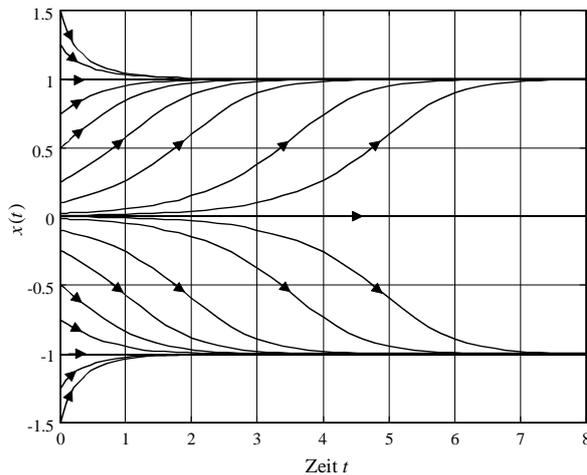


Bild 3a: Trajektorien für $\alpha = 1$

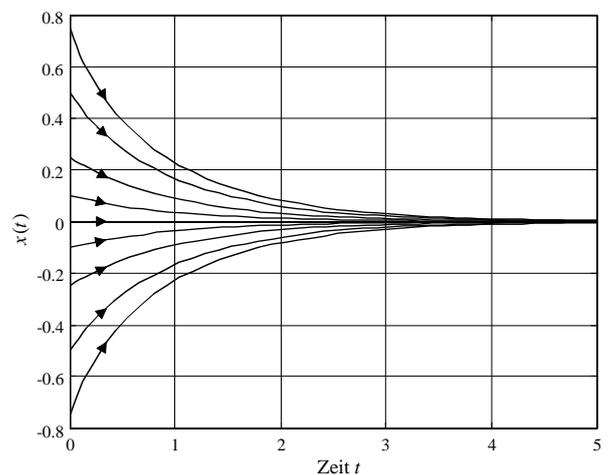


Bild 3b: Trajektorien für $\alpha = -1$

In den Bildern 3a und 3b sind die Trajektorien $x(t)$ für die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ dargestellt.

Beispiel:

²Mit Hilfe der Direkten Methode von Ljapunov kann problemlos nachgewiesen werden, dass für $\alpha = 0$ die Ruhelage $x_R = 0$ (global) asymptotisch stabil ist.

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + x_2 - x_1x_2^2 - x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Methode der ersten Näherung soll die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ untersucht werden. Die Jacobi-Matrix lautet

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 - x_2^2 - 3x_1^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_2x_2 & -1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

für das linearisierte System gilt also:

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xi.$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{J} liegen bei $s_{1,2} = -1 \pm j$, d.h. die Ruhelage \mathbf{x}_R des nichtlinearen Systems ist asymptotisch stabil (Fall **I**). Die zugehörigen Trajektorien für verschiedene Anfangszustände sind in Bild 4 dargestellt.

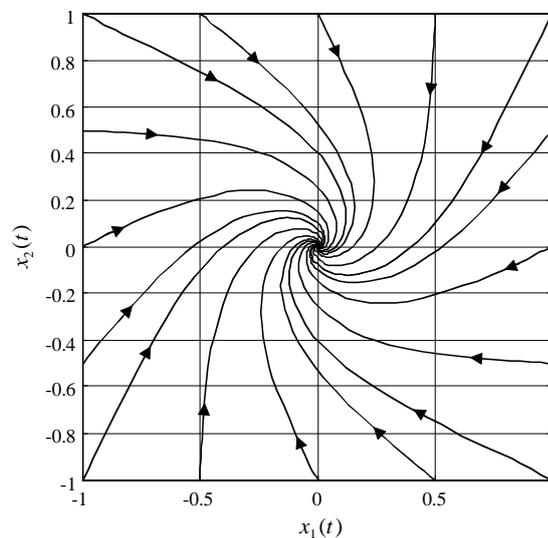


Bild 4: Trajektorien des nichtlinearen Systems

Man beachte, dass die Methode der ersten Näherung lediglich *lokale* Aussagen liefert, d.h. anhand des linearisierten Systems sind *keine* Aussagen über die Größe des Einzugsbereichs einer asymptotisch stabilen Ruhelage möglich.

Literatur

- [1] SLOTINE J.J.E., LI W.: Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991
- [2] KHALIL H.K.: Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall, 2002
- [3] FÖLLINGER O.: Nichtlineare Regelungen I, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1993

1 Die Methode der Beschreibungsfunktion

1.1 Einführung

Die Methode der Beschreibungsfunktion ist ein Verfahren zur Ermittlung von entstandenen periodischen Zeitvorgängen in einem *nichtlinearen Standardregelkreis* nach Bild 1. Diese Regelkreiskonfiguration besteht aus einem linearen, zeitinvarianten Systemanteil (*LZI*) und einem nichtlinearen Anteil (*NL*). Da das Verfahren aufgrund vereinfachender Annahmen *approximativen Charakter* hat, müssen gewonnene Erkenntnisse nachträglich mittels Simulation verifiziert werden. Es wird vorausgesetzt, dass der lineare Systemteil (*LZI*) durch eine Über-

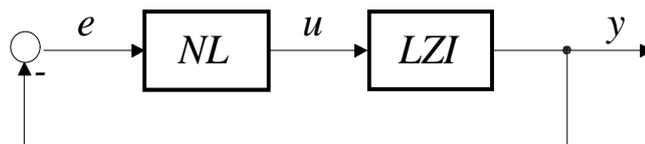


Bild 1: nichtlinearer Standardregelkreis

tragungsfunktion $G(s)$ repräsentiert wird und der nichtlineare Zusammenhang (*NL*) zwischen den Größen $u(t)$ und $e(t)$ durch eine Funktion

$$u(t) = F(e, \dot{e})$$

beschrieben wird.

1.2 Die Gleichung der Harmonischen Balance

Alle weiteren Überlegungen basieren auf der Annahme, dass sich der betrachtete nichtlineare Regelkreis bereits im Zustand einer Dauerschwingung befindet (d.h. im Zustand einer so genannten *harmonischen Balance*), die Größen $e(t)$, $u(t)$ und $y(t)$ sind also *periodische* Zeitfunktionen. Der Verlauf der Funktion $e(t)$ kann näherungsweise als Sinusschwingung der Form

$$e(t) = A \sin(\omega_d t) \tag{1}$$

dargestellt werden. Hierbei sind die Amplitude A und die Kreisfrequenz ω_d die gesuchten Größen. Beschränkt man sich auf Nichtlinearitäten, die die Bedingung

$$F(-e, -\dot{e}) = -F(e, \dot{e}) \tag{2}$$

erfüllen, so kann die Fourierreihendarstellung der periodischen Funktion $u(t)$ folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \sin(\nu\omega_d t) + b_{\nu} \cos(\nu\omega_d t)] = \\ &= c_1 \sin(\omega_d t + \varphi_1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} c_{\nu} \sin(\nu\omega_d t + \varphi_{\nu}). \end{aligned} \quad (3)$$

Der entsprechende Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ kann mit Hilfe des *Frequenzganges* $G(j\omega)$ des linearen Systemteils angegeben werden. Im eingeschwungenen Zustand gilt für die Größe $y(t)$ unter Annahme einer Eingangsgröße der Form (3) nämlich

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 |G(j\omega_d)| \sin[\omega_d t + \varphi_1 + \arg G(j\omega_d)] + \\ &+ \sum_{\nu=2}^{\infty} c_{\nu} |G(j\nu\omega_d)| \sin[\nu\omega_d t + \varphi_{\nu} + \arg G(j\nu\omega_d)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Da in einem realen Regelkreis das lineare Teilsystem meistens *Tiefpaßcharakter* besitzt, nimmt der Wert $|G(j\nu\omega_d)|$ für wachsende Werte von ν rasch ab. Für hinreichend große Werte von ω_d (siehe Bild 2) gilt also

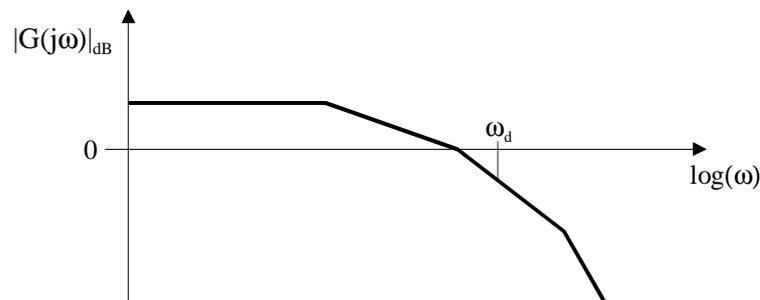


Bild 2: typische Betragskennlinie $|G(j\omega)|$

$$|G(j\nu\omega_d)| \ll |G(j\omega_d)|, \quad \nu \geq 2, \quad (5)$$

es können demnach *näherungsweise* alle Oberschwingungen in $y(t)$ vernachlässigt werden, d.h.:

$$y(t) \approx c_1 |G(j\omega_d)| \sin[\omega_d t + \varphi_1 + \arg G(j\omega_d)]. \quad (6)$$

Für Betrachtungen im Zustand des Schwingungsgleichgewichtes kann also die Funktion $u(t)$ - bezüglich ihrer Wirkung am Ausgang des linearen Systems - durch ihre Grundwelle

$$u_1(t) = c_1 \sin(\omega_d t + \varphi_1) = a_1 \sin(\omega_d t) + b_1 \cos(\omega_d t) \quad (7)$$

ersetzt werden. Man ersetzt also die periodischen Zeitvorgänge im Regelkreis näherungsweise durch ihre Grundschwingungen. Geht man von den Sinusfunktionen zu den entsprechenden Zeigerdarstellungen über, also

$$\tilde{e}(t) = Ae^{j\omega_d t} \quad (8)$$

$$\tilde{u}_1(t) = c_1 e^{j(\omega_d t + \varphi_1)}, \quad (9)$$

so wird deutlich, dass sich die (komplexe) Funktion (9) als Produkt der Funktion (8) und des komplexen Verstärkungsfaktors

$$N(A, \omega_d) = |N(A, \omega_d)| e^{j \arg N(A, \omega_d)} := \frac{c_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A}, \quad (10)$$

ergibt (vgl. Frequenzgang !). Die Größe N nennt man *Beschreibungsfunktion* oder *äquivalenten komplexen Verstärkungsfaktor* der Nichtlinearität $F(e, \dot{e})$.

Man beachte, dass die Beschreibungsfunktion $N(A, \omega_d)$ *nur im Zustand der Dauerschwingung* eine dem Frequenzgang linearer, zeitinvarianter Systeme analoge Beschreibung des Verhaltens der Nichtlinearität darstellt!

Mit Hilfe der Beschreibungsfunktion ergibt sich somit gemäß (6) für die Ausgangsgröße

$$y(t) = A |N(A, \omega_d)| |G(j\omega_d)| \sin [\omega_d t + \arg N(A, \omega_d) + \arg G(j\omega_d)]. \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Annahme (1) ergeben sich somit unmittelbar folgende Beziehung, die die komplexen Zahlen $N(A, \omega_d)$ und $G(j\omega_d)$ erfüllen müssen:

$$N(A, \omega_d) G(j\omega_d) \stackrel{!}{=} -1. \quad (12)$$

Man nennt die Beziehung (12) auch die *Gleichung der Harmonischen Balance*. Mit ihrer Hilfe können die gesuchten Größen A und ω_d ermittelt werden.

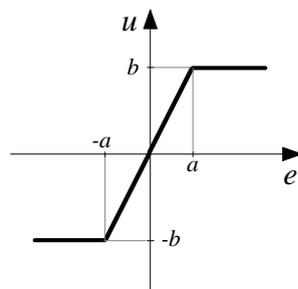
1.3 Ermittlung der Beschreibungsfunktion

Die Berechnung der Beschreibungsfunktion (10) erfordert die Ermittlung der Fourierkoeffizienten a_1 und b_1 der Reihe (3). Setzt man $\tau = \omega_d t$, so erhält man folgende allgemeine Berechnungsvorschrift für $N(A, \omega_d)$:

$$N = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \tau, A \omega_d \cos \tau) \sin \tau d\tau + \frac{j}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \tau, A \omega_d \cos \tau) \cos \tau d\tau. \quad (13)$$

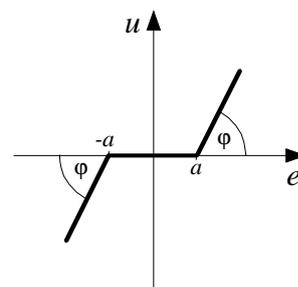
Für die *Begrenzungskennlinie* und die *Tote Zone* findet man mit Hilfe obiger Beziehung:

Begrenzungskennlinie



$$N(A) = \frac{2b}{\pi a} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$

Tote Zone



$$N(A) = \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{A} + \frac{2a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] \tan \varphi$$

Aus der Beschreibungsfunktion der *allgemeinen Relaiskennlinie* (siehe Bild 3)

$$N(A) = \frac{2b}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{qa}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2ab}{\pi A^2} (q - 1). \quad (14)$$

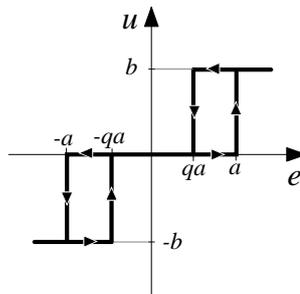
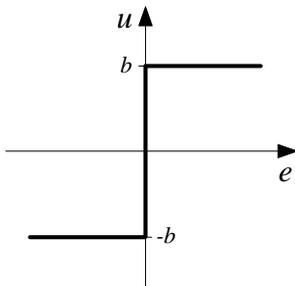


Bild 3: allgemeine Relaiskennlinie

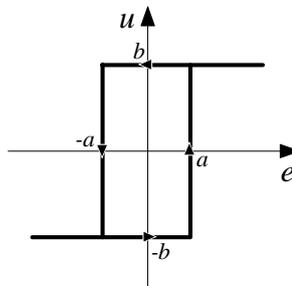
können die Beschreibungsfunktionen verschiedener Nichtlinearitäten sofort ermittelt werden:

Zweipunktglied



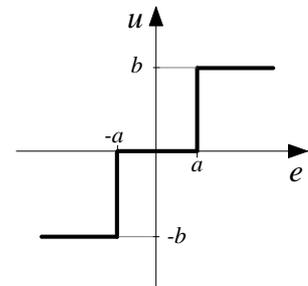
$$N(A) = \frac{4b}{\pi A}$$

**Zweipunktglied
mit Hysterese**



$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}$$

Dreipunktglied



$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

1.4 Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance

Die gesuchten Parameter A und ω_d werden durch Lösung der (nichtlinearen) Gleichung der Harmonischen Balance (12) ermittelt. Die Lösung kann auf verschiedene Weise erfolgen, einige Möglichkeiten sollen hier erwähnt werden:

- **analytische Lösung**
- **Ortskurven-Verfahren:** Zeichne die Ortskurven $N(A, \omega)G(j\omega)$ mit A als Parameter. Diejenige Ortskurve, die durch den Punkt -1 geht, liefert die Größen A und ω_d .

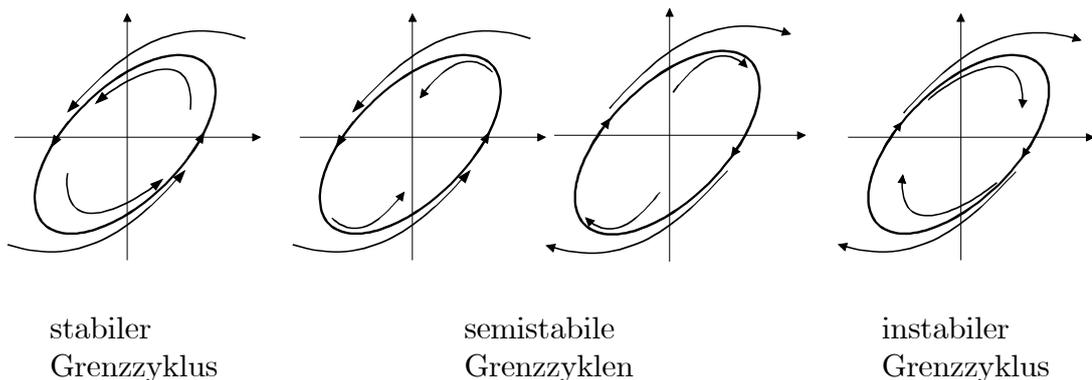
- **Lösung mit Frequenzkennlinien** (für reelles, positives $N(A, \omega)$): Die gesuchten Werte ω_d und A ergeben sich aus den Beziehungen:

$$\arg G(j\omega_d) = -\pi \quad \text{und} \quad |N(A, \omega_d)|_{dB} = -|G(j\omega_d)|_{dB}.$$

- **Zwei-Ortskurven-Verfahren:** Die Schnittpunkte der Ortskurven $G(j\omega)$ und $-\frac{1}{N(A, \omega)}$ liefern die Lösungen A und ω_d .
- **Lösung mit Wurzelortskurven** (für reelles $N(A)$): Die Schnittpunkte der Wurzelortskurven zu $NG(s)$ mit der imaginären Achse liefern die gesuchten Größen ω_d und A .

1.5 Stabilitätsverhalten von Grenzschwingungen

Es soll untersucht werden, wie sich das betrachtete nichtlineare System verhält, wenn es durch eine kurze äußere Einwirkung im Zustand der Dauerschwingung gestört wird. Die folgende Darstellung faßt besonders wichtige Möglichkeiten für das Systemverhalten zusammen:



Zur Bestimmung der Stabilität von Grenzschwingungen wird die Stabilität des linearen, zeit-invarianten Ersatzregelkreises in Bild 4 für $N = N(A + \Delta A, \omega_d)$ bzw. $N = N(A - \Delta A, \omega_d)$

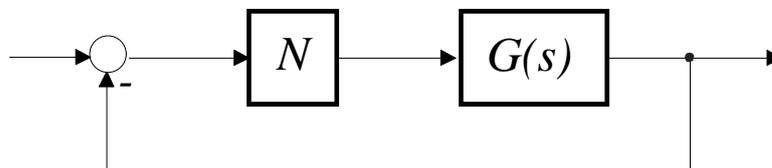


Bild 4: linearer Ersatzregelkreis

für $\Delta A > 0$ z.B. mit Hilfe des *Nyquist-Kriteriums* untersucht. Wie aus der Stabilität des Ersatzregelkreises auf die Stabilität der Grenzschwingung geschlossen werden kann, zeigt die folgende Tabelle.

$N(A + \Delta A, \omega_d)G(j\omega_d)$	$N(A - \Delta A, \omega_d)G(j\omega_d)$	Grenzschwingung
stabil	instabil	stabil
instabil	stabil	instabil
stabil	stabil	semistabil
instabil	instabil	semistabil

Der Eintrag „stabil“ in der Spalte $N(A - \Delta A, \omega_d)G(j\omega_d)$ bedeutet z.B., dass die Stabilität des zugehörigen linearen Ersatzregelkreises nachgewiesen werden kann

Beispiel

Gegeben sei der nichtlineare Standardregelkreis mit einem Zweipunktglied mit $b = \frac{1}{2}$ (siehe weiter vorne) als Nichtlinearität und dem linearen Systemteil

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0.1s)}.$$

Mögliche Dauerschwingungen können durch Lösung von Gleichung (12) ermittelt werden, d.h.

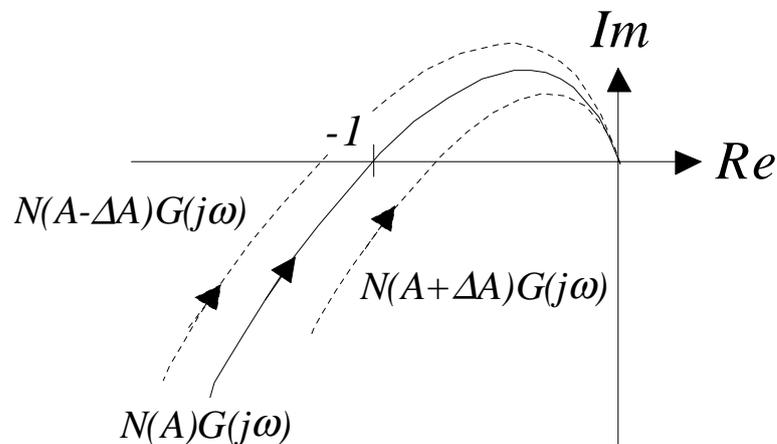
$$\underbrace{\frac{2}{\pi A}}_{=N(A)} = \underbrace{-j\omega(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}_{=-\frac{1}{G(j\omega)}} = 1.1\omega^2 + j(0.1\omega^3 - \omega)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{10} \approx 3.16, \quad A = \frac{2}{11\pi} \approx 0.058$$

Im Zustand der harmonischen Balance gilt also für die periodische Funktion $e(t)$ näherungsweise:

$$e(t) = 0.058 \sin(\sqrt{10}t).$$

Zur Bestimmung der Stabilität der gefundenen Grenzschwingung mit Hilfe des Nyquistkriteriums sind die Ortskurven der offenen linearen Ersatzregelkreise $N(A - \Delta A)G(j\omega)$ und $N(A + \Delta A)G(j\omega)$ zu zeichnen:



Wie man leicht überprüfen kann erweist sich der Ersatzregelkreis mit $N = N(A + \Delta A)$ als stabil während der Regelkreis mit $N = N(A - \Delta A)$ instabil ist. Daraus folgt, dass die gefundene Grenzschwingung stabil ist.

Literatur

- [1] FÖLLINGER O.: Nichtlineare Regelungen II, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1993
- [2] SLOTINE J.J., LI W.: Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991
- [3] COOK P.A.: Nonlinear Dynamical Systems, Prentice Hall, 1986
- [4] FRIEDLAND B.: Advanced Control System Design, Prentice Hall, 1996