PDEs in Naturwissenschaft und Technik

Lösungen zu 2.4, 2.7(I) und 2.8

Aufgabe 2.4: Ober- und Unterlösungen. Wir betrachten das folgende (skalare) nichtlineare parabolische Problem:

$$Nu := u_t - (\Delta u - u^3) \quad \text{auf} \quad D := \Omega \times \mathbb{R}^+$$

Die Anfangsbedingung sei gegeben auf S_0 durch $u = u_0$. Für die Funktion soll gelten: $u_0 \in [m, M]$, wobei m das (kleinste) Minimum und M das (größte) Maximum von u_0 auf Ω ist. Auf dem Rand Γ soll die äußere Normalenableitung verschwinden:

$$Bu := \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}} = 0$$

Hierbei bezeichnet $\mathfrak{n}$ den nach außen zeigenden Normalenvektor von Γ. Anschaulich: Der Normalenvektor zeigt nie in das Innere des in der Vorlesung eingeführten Zylinders.

Wir sind jetzt nicht an der exakten Lösung der PDE interessiert (aufwändig), sondern wollen wissen, wie sie sich ungefähr verhält. Dazu bestimmt man sogenannte *Ober-* und *Unterlösungen.* Kennt man diese, so weiß man, dass die exakte Lösung sich irgendwie zwischen diesen bewegt.

Wenn man wissen möchte, wie sich die Lösung der PDE für große Zeiten verhält, und man erhält z. B. gegen einen Wert abklingende Unter- und Oberlösungen, so weiß man, dass sich auch die exakte Lösung gegen diesen Wert bewegt.

Wie man sicherlich einsieht, kann es für jedes Problem mehrere mögliche Unter- bzw. Oberlösungen geben, die sich im Allgemeinen in ihrer Aussagekraft stark unterscheiden. Doch dazu am Ende der Aufgabe mehr.

Wie findet man ober- bzw. Unterlösungen? Ein recht allgemeiner Zugang ist, die Ober- bzw. Unterlösung als Funktion *einer* Variablen zu suchen. Dann erhält man aus der PDE eine ODE, von der man annimmt, dass man sie leichter lösen kann als die PDE. Anschließend hat man diese Lösung dann noch zu verfizieren, also festzustellen, dass es sich tatsächlich um eine Unter- bzw. Oberlösung handelt. – Diesen Weg werden wir für das obige Problem beschreiten.

Wir wollen zeigen, dass die x-unabhängigen Lösungen $v(t)$ und $w(t)$, die den ODEs $v_t = -v^3$ mit $v(t = 0) = m$ bzw. $w_t = -w^3$ mit $w(0) = M$ gehorchen, Unter- bzw. Oberlösung des nichtlinearen parabolischen Problems sind. Dazu ist zu zeigen, das $Nv \leq 0$, $Bv \leq 0$ und $v(0) \leq u_0$ gilt. Für die Oberlösung w müssen die Bedingungen $Nw \geq 0$, $Bw \geq 0$ und $w(0) \geq u_0$ überprüft werden.

Beginnen wir mit der Überprüfung von $Nv \leq 0$: v ist eine reine t-abhängige Funktion und erfüllt die ODE $v_t = -v^3$:

$$Nv = v_t - (\Delta v - v^3) = v_t - (0 - v^3) = -v^3 + v^3 = 0 \leq 0$$

Zur Erinnerung: $\Delta v = 0$, da v keine Funktion von x ist. Für die Funktion w erhält man analog: $Nw = 0 \geq 0$. Dies folgt natürlich auch schon aus dem Ansatz zur Konstruktion der Lösungen.

Als nächstes betrachten wir die *Anfangsbedingung*. Dazu führen wir die beiden Differenzen $\delta_1 := v - u$ und $\delta_2 := w - u$ ein (nicht wirklich notwendig, aber offensichtlicher). Wir erhalten unter Beachtung von $u_0 \in [m, M]$:

$$\begin{aligned} \delta_1(t = 0) = v(0) - u_0 = m - u_0 \leq 0 \quad &\Rightarrow v(0) \leq u_0 \\ \delta_2(t = 0) = w(0) - u_0 = M - u_0 \geq 0 \quad &\Rightarrow w(0) \geq u_0 \end{aligned}$$

Die Bedingung an die Anfangsbedingungen sind also auch erfüllt. Bleibt nur noch zu überprüfen, ob auch die *Randbedingungen* erfüllt werden.

Unser Rand bzw. Mantel Γ ist parallel zur Zeitachse t. In unserem orthogonalen Koordinatensystem ist Richtung der Achse $\mathfrak{t} = [0, 0, \ldots, 0, 1]$, wobei die Nullen für die x-Richtungen stehen und die 1 für die t-Richtung. Ein normal zu $\mathfrak{t}$ stehender Vektor steht damit auch normal zu Γ. Zwei Vektoren sind dann orthognonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Man kann sich leicht überzeugen, dass

$$\mathfrak{n}^* = [x_1, x_2, \ldots, x_n, 0]$$

diese Bedingung für beliebige Werte $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt. Diese seien so gewählt, dass der Vektor nach außen zeigt. Den äußeren Normalenvektor $\mathfrak{n}$ erhalten wir dann durch eine entsprechende Nomierung von $\mathfrak{n}^*$. Nun sind wir bereit die Bedingungen $Bv \leq 0$ bzw. $Bw \geq 0$ zu überprüfen. Dazu bezeichne $(\mathfrak{n}, \nabla\star)$ das Skalarprodukt zwischen $\mathfrak{n}$ und $\nabla\star$, dem Spaltenvektor der ersten Ableitungen von $\star$. Mit den bisherigen Vereinbarungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} Bv &= \frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}} = (\mathfrak{n}, \nabla v) = 0 \leq 0 \\ Bw &= \frac{\partial w}{\partial \mathfrak{n}} = (\mathfrak{n}, \nabla w) = 0 \geq 0 \end{aligned}$$

Damit sind alle Bedingungen, die an Unter- und Oberlösungen gestellt werden, erfüllt und wir wissen nun, dass v und w Unter- bzw. Oberlösungen des nichtlinearen Problems sind.

Aus der Bestimmungsgleichung von v und w wird ersichtlich, dass es sich um auf Null abklingende Funktionen handelt – unsere Lösung u wird also auch für $t \to \infty$ gegen Null streben. (Wem es nicht klar ist, kann ja mal schnell die ODEs lösen und dann die Grenzwertbestimmung durchführen.)

Noch eine Bemerkung zur Güte von solchen Unter- und Oberlösungen: Wie man sich leicht überzeugen kann, sind auch $v = m$ und $w = M$ möglich. Hier ist es aber nicht möglich weitere Aussagen über u zu treffen – die Lösung ist zwar richtig, aber nur von begrenztem Nutzen.

Aufgabe 2.7(I): Abklingende Oberlösung. Wir betrachten im Folgenden die *Fisher*-Gleichung:

$$Nu := u_t - (\Delta u + f(u)) = 0 \quad \text{auf } D_T,\ \Omega = (0, L)$$

mit $f(u) = su(1-u)$ ($s > 0$), der Anfangsbedingung $u = u_0$ auf S_0 und der *Dirichlet*-Randbedingung $u = 0$ auf Γ.

Diese Gleichung stammt aus der Populationsdynamik und beschreibt die Entwicklung einer Anfangspopulation u_0. Wie in der Vorlesung gezeigt, ist im Fall $s = 1$ $v = 0$ eine Unterlösung des Gleichung, $w = 1$ eine Oberlösung. Wie wir im weiteren Verlauf sehen werden, ist die Oberlösung zu grob.

Aussagekräftigere Oberlösungen erhält man im Allgemeinen dadurch, dass man den Kandidaten w mit Hilfe der Eigenfunktion zum führenden Eigenwert des rein räumlichen Problems beschreibt. In unserem Fall ist der führende Eigenwert $\rho = \pi^2/L^2$ und die zugehörige Eigenfunktion ist $\sin(\pi x/L)$. Ein möglicher Kandidat für eine Oberlösung wäre zum Beispiel:

$$w(x,t) = A\exp(-\alpha t)\sin(\pi x/L)$$

Mit $A > 0$ und $\alpha > 0$ ist dies eine exponentiell auf Null abklingende Oberlösung. Bezogen auf die Populationsdynamik steckt in unserem Ansatz die Vermutung, dass die Population ausstirbt. Sollte sich w als Oberlösung erweisen, ist offensichtlich, dass diese viel aussagekräftiger ist, als es $w = 1$ für $s = 1$ ist.

Wir überprüfen nun, ob es sich bei der Funktion w tatsächlich um eine Oberlösung handelt:

$$\begin{aligned} Nw &= w_t - \Delta w - f(w) = -\alpha w - (-\rho)w - sw(1-w) \\ &= w[-\alpha + \rho - s(1-w)] \geq w[-\alpha + \rho - s] \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, da w auf Ω nicht-negativ ist. Wenn wir jetzt Werte für α finden können, für die $w[-\alpha + \rho - s]$ größer oder gleich Null ist, haben wir gezeigt, dass $Nw \geq 0$ ist.

Da w nicht-negativ ist, muss also folgende Ungleichung gelten:

$$-\alpha + \rho - s \geq 0$$

Daraus ergibt sich: $\alpha \leq \rho - s$, d. h. für hinreichend kleine Werte s existieren Werte α, so dass $Nw \geq 0$.

Die Überprüfung der Randbedingung ist trivial: Der Rand von Ω wird gebildet aus $x = 0$ und $x = L$, den Nullstellen der Eigenfunktion. Damit gilt $w = 0$ auf Γ.

Die Bedingung $w_0 \geq u_0$ auf S_0 lässt sich durch eine geeignete Wahl des bisher nicht benutzten Parameters A „erzwingen". Damit ist gezeigt, dass unsere Funktion w eine Oberlösung ist. Schön für uns, für unsere Population bedeutet es aber das Ende – sie wird aussterben.

Aufgabe 2.8: Turing-Instabilität. Diese Aufgabe soll auf ein Phänomen bei der Behandlung parabolischer PDEs und PDE-Systemen aufmerksam machen: die sogenannte *Diffusion-Driven Turing Instability.*

Bisher: Bei der Behandlung skalarer parabolischer Probleme der Form $u_t = Du_{xx} + cu$ auf $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$; den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, 0) = 0$ und einer Anfangsbedingung $u(x, 0) = h(x)$ gab es folgende Resultate: Für $D = 0$ und $c > 0$ unbeschränkt wachsende Lösungen, für $D > 0$ und $c = 0$ eine exponentiell abklingende Lösung und für $D > 0$ und $c > 0$ eine Lösung der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \exp[(c - Dn^2)t] \sin(nx)$$

mit den h_n als Fourier-Koeffizienten von $h(x)$. Hier ergab sich für $D > c$ ebenfalls eine exponentiell abklingende Lösung. *Allgemein:* Der Diffusionkoeffizient D wirkte dämpfend auf die Lösung $u(x, t)$ der skalaren PDE.

Dies ist für Systeme parabolischer PDEs nicht mehr in allen Fällen gegeben! Betrachten wir das folgende lineare (!) System:

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Mit solchen Systemen lassen sich z. B. bestimmte Vorgänge in Meeren modellieren, bei denen Temperatur und Dichte interagieren.

Betrachten wir zuerst den Fall $D_1 = D_2 = 0$: Man erhält eine gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Ob dieses System eine stabile Lösung besitzt, lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix klären. Das charakteristische Polynom lautet $\mu^2 + \mu + 2 = 0$. Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung besitzen negativen Realteil, das heißt es gibt eine asymptotisch stabile Ruhelage und zwar $[u, v] = [0, 0]$. (Dies kann man durch Entkoppeln des Systems und Lösung der einzelnen ODEs zeigen (siehe *Einführung in die Systemtheorie*).)

Um es noch einmal hervorzuheben: *Das System besitzt ohne Diffusionsterme eine asymptotisch stabile Ruhelage.*

Nun lassen wir Diffusion zu und setzen $D_2 = 1$. Den Koeffizienten D_1 kann man nun so wählen, dass er (a) positiv ist und (b) eine unbeschränkt wachsende Lösung zur Folge hat.

Unser System sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Die Lösungen des Systems haben die Form:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \exp(\lambda t) \sin(kx) \quad k = 1/2, 1, 3/2, \ldots$$

Diese sind (für $a > 0$, $b > 0$) unbeschränkt wachsend, wenn λ größer als Null ist. Wir wollen nun zeigen, dass es Werte für D_1 gibt, so dass dies erfüllt ist. Dazu setzen wir die Lösung in das System ein und erhalten nach entsprechendem Differenzieren und Umordnen:

$$\begin{bmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k^2 D_1 - 2 & -2 \\ 2 & 1 - k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Wenn wir die Koeffizientenmatrix mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen, so erkennen wir recht schnell, dass sich für λ ein Eigenwertproblem ergibt:

$$\begin{bmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{bmatrix} = \mathfrak{B} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (\mathfrak{B} - \lambda I) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Die Determinante von $\mathfrak{B} - \lambda I$ erhält man nach einigem Umsortieren und Zusammenfassen zu:

$$\det(\mathfrak{B} - \lambda I) = \lambda^2 + ((D_1 + 1)k^2 + 1)\lambda - (1 - k^2)(2 + D_1 k^2) + 4 = 0$$

Die Wurzeln dieses quadratischen Polynoms lassen sich mit Hilfe der „Mitternachtsformel“ bestimmen. Mit $\zeta := ((D_1 + 1)k^2 + 1)/2$ erhält man:

$$\lambda_{1/2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + (1 - k^2)(2 + D_1 k^2) - 4}$$

Um zu zeigen, dass unsere Ruhelage instabil werden kann, müssen wir nun noch zeigen, dass es möglich ist durch die Wahl von D_1 dafür zu sorgen, dass einer der beiden Eigenwerte *positiven* Realteil besitzt. Näheres Betrachten der Gleichung für λ zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$(1 - k^2)(2 + D_1 k^2) - 4 > 0$$

gilt. Damit haben wir eine Möglichkeit für ein gegebenes k den Wert für D_1 zu berechnen, ab dem das ursprünglich stabile System durch Diffusionseffekte instabil wird. Für $k = 1/2$ ergibt sich dieser Wert zu $D_1 > 13.33\ldots$, d. h. ist der Diffusionskoeffizient größer als dieser Wert, wird das System instabil. – Es lässt sich mit der Ungleichung bei gegebenen D_1 auch der Wert für k berechnen, bis zu dem das System stabil bleibt oder instabil wird.

Die Betrachtung lässt sich natürlich noch verallgemeinern, zum Beispiel dadurch, dass man D_2 ebenfalls unbestimmt lässt und alle restlichen Koeffizienten auch als unbestimmte Konstanten annimmt (siehe [Oc, S.289]).

— E N D E —

Dezember 2005, Andreas Bück
Andreas.Bueck@student.uni-magdeburg.de