Protokollbuch

zum

Physikalischen Praktikum für Ingenieurstudiengänge

am Institut für Experimentelle Physik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Sommersemester 2006

Tobias Bäthge **Norbert Ehms**

Matrikel STK 05

Praktikumsbetreuer:
Dipl.-Phys. Bernd Garke
Dr. rer. nat. Wolfgang Jantoß

Übersicht der Versuche

Versuch	Bezeichnung des Versuchs	Seite	Datum
M01	Dichtebestimmung	1	06.04.2006
M11	Trägheitsmomente aus Drehschwingungen	16	20.04.2006
W05	Kondensationswärme des Wasserdampfes	31	04.05.2006
E12	Elektronen im Magnetfeld	46	18.05.2006
M08	Pendelschwingungen	53	15.06.2006
O11	Beugung an Spalt und Gitter	62	29.06.2006

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Versuche ii

1 M01 - Dichtebestimmung 1
1.1 Aufgabenstellung . . . 1
1.2 Grundlagen zum Versuch . . . 2
1.2.1 Voraussetzungen . . . 2
1.2.2 Formeln und Versuchsablauf . . . 2
1.3 Versuchsaufbau . . . 5
1.4 Messergebnisse . . . 6
1.4.1 Messreihe Durchmesser mit digitaler Bügelmessschraube . . . 6
1.4.2 Messung des Durchmessers mit analogem Messschieber . . . 7
1.4.3 Bestimmung der Masse des Probekörpers mit Feinwaage . . . 7
1.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen . . . 7
1.6 Zusammenfassung und Diskussion . . . 14

2 M11 - Trägheitsmomente aus Drehschwingungen 16
2.1 Aufgabenstellung . . . 16
2.2 Grundlagen zum Versuch . . . 17
2.2.1 Statische Methode der Direktionsmomentbestimmung . . . 17
2.2.2 Dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung . . . 17
2.2.3 Dynamische Methode der Schwerpunktbestimmung . . . 19
2.3 Versuchsaufbau . . . 20
2.4 Messergebnisse . . . 22
2.4.1 Statische Methode der Direktionsmomentbestimmung . . . 22
2.4.2 Dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung . . . 24
2.4.3 Dynamische Methode der Schwerpunktbestimmung . . . 26
2.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen . . . 28
2.5.1 Unsicherheiten bei der statischen Messung . . . 28
2.5.2 Unsicherheiten bei der dynamischen Messung . . . 28
2.6 Zusammenfassung und Diskussion . . . 28

3 W05 - Kondensationswärme des Wasserdampfes **31**
3.1 Aufgabenstellung . . . 31
3.2 Grundlagen zum Versuch . . . 32
3.2.1 Wärmekapazität des Kalorimeters . . . 32
3.2.2 Spezifische Kondensationswärme von Wasserdampf . . . 33
3.3 Versuchsaufbau . . . 34
3.3.1 Verwendete Geräte . . . 34
3.3.2 Messgenauigkeiten der verwendeten Geräte . . . 35
3.3.3 Durchführung . . . 35
3.4 Messergebnisse . . . 36
3.4.1 Bestimmung der Wärmekapazität des Kalorimeters . . . 36
3.4.2 Bestimmung der Verdampfungswärme von Wasserdampf . . . 39
3.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen . . . 41
3.6 Zusammenfassung und Diskussion . . . 44

4 E12 - Elektronen im Magnetfeld **46**
4.1 Aufgabenstellung . . . 46
4.2 Grundlagen zum Versuch . . . 47
4.3 Versuchsaufbau . . . 48
4.4 Messergebnisse . . . 50
4.4.1 Geometrie der Spule . . . 50
4.4.2 Ablenkung und Radius . . . 50
4.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen . . . 52
4.6 Zusammenfassung und Diskussion . . . 52

5 M08 - Pendelschwingungen **53**
5.1 Aufgabenstellung . . . 53
5.2 Grundlagen zum Versuch . . . 54
5.3 Versuchsaufbau . . . 55
5.4 Messergebnisse . . . 56
5.4.1 Messung mittels Fadenpendel . . . 56
5.4.2 Messung mittels Reversionspendel . . . 57
5.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen . . . 60
5.6 Zusammenfassung und Diskussion . . . 60

6 O11 - Beugung an Spalt und Gitter **62**
6.1 Aufgabenstellung 62
6.2 Grundlagen zum Versuch 63
6.2.1 Beugung am Gitter 63
6.2.2 Beugung am Spalt 64
6.2.3 Beugung an der Lochblende 64
6.2.4 Vergrößerte Projektion 64
6.3 Versuchsaufbau 65
6.4 Messergebnisse 66
6.4.1 Beugung am Gitter 66
6.4.2 Beugung am Spalt 67
6.4.3 Vergrößerte Projektion des Spaltes 69
6.4.4 Vergrößerte Projektion der Lochblende 70
6.4.5 Beugung an der Lochblende 70
6.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen 72
6.6 Zusammenfassung und Diskussion 72

Literaturverzeichnis **74**

Tabellenverzeichnis **75**

Abbildungsverzeichnis **76**

1 M01 - Dichtebestimmung

Protokoll zum Versuch M01 am 06. April 2006

1.1 Aufgabenstellung

Die Dichte eines kugelförmigen Probekörpers ist aus seiner geometrischen Abmessung und Masse zu bestimmen. Die Verteilung der gemessenen Durchmesser ist zu analysieren und die Messabweichungen sind anzugeben.

(1.) Der Durchmesser d des Körpers ist mit einer Bügelmessschraube 50-mal zu messen. Die Messwerte sind in sieben Klassen einzuteilen, die relativen Häufigkeiten sind als Histogramm darzustellen. Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich sind zu berechnen und mit den Fehlergrenzen des Messgeräts zu vergleichen.

(2.) Der Durchmesser d ist mit Hilfe eines Messschiebers einmalig zu ermitteln.

(3.) Die Masse m des Körpers ist durch einmalige Wägung auf einer mechanischen Feinwaage zu bestimmen.

(4.) Die Dichte des Probekörpers ist einerseits aus (1.) und (3.) und andererseits aus (2.) und (3.) zu berechnen. Außerdem sind die Größtabweichungen der Dichte zu bestimmen, die sich in beiden Fällen durch lineare Fehlerfortpflanzung aus den Größtabweichungen der gemessenen Größen ergeben. Anhand beider Messergebnisse ist zu testen, ob sich die Ergebnisintervalle überlappen.

(5.) Die Dichte des Probekörpermaterials ist durch Kombination der Messergebnisse aus (1.) und (3.) aller Versuchsgruppen an Kugeln gleicher Dichte (gleiche Farbe), aber unterschiedlicher Masse durch lineare Regression zu berechnen. Dazu ist die funktionale Abhängigkeit $V = V(m)$ sowie die Regressionsgerade graphisch darzustellen, die mittleren Abweichungen der Regressionsparameter sind anzugeben.

1.2 Grundlagen zum Versuch

1.2.1 Voraussetzungen

Zur Bestimmung der Dichte des Körpers sind einige Grundannahmen nötig:

- Der Probekörper wird als homogen angenommen, d. h. die Dichte sei konstant.
- Die Form des Körpers wird als *ideale Kugel* angenommen.
- Der Luftauftrieb bei der Wägung mit der Feinwaage wird vernachlässigt.

1.2.2 Formeln und Versuchsablauf

Die Dichte ϱ eines Körpers berechnet sich aus der Masse m und dem Volumen V des Körpers:

$$\varrho = \frac{m}{V}, \qquad \text{mit } [\varrho] = \frac{[m]}{[V]} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}. \tag{1.1}$$

Die Masse m wird gemäß der Aufgabenstellung 1.1 mit einer mechanischen Feinwaage ermittelt.

Das Volumen V des Körpers wird über ihren Durchmesser d bestimmt. Es gilt:

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot d^3, \qquad \text{mit } [V] = 1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3. \tag{1.2}$$

Aus den Formeln 1.1 und 1.2 ergibt sich

$$\varrho = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{d^3}. \tag{1.3}$$

Der Durchmesser d wird dabei mittels 50-maliger Messung mit einer Bügelmessschraube bzw. mittels einmaliger Messung mit einem Messschieber ermittelt.

Zum Ermitteln der Abweichungen berechnet man den Mittelwert $\overline{d}$ der gemessenen Durchmesser. Der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ einer Größe x mit den n Messwerten $x_1, \ldots, x_n$ ergibt sich aus

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.4}$$

Außerdem wird die empirische Standardabweichung $s_x = \sigma_{n-1}$ benötigt, berechnet aus

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sigma_{n-1}. \tag{1.5}$$

Daraus folgt für die mittlere Abweichung $s_{\overline{x}} = \sigma_n$ des Mittelwertes $\overline{x}$ vom wahren Wert

$$s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sigma_n. \tag{1.6}$$

Um ein Vertrauensniveau von 99,73% zu erreichen, ist bei $n = 50$ Messungen ein Student-Faktor $t_s = 3{,}157$ zu wählen (siehe [5]), so dass aus

$$\overline{d} - t_s \cdot s_{\overline{x}} \leq d \leq \overline{d} + t_s \cdot s_{\overline{x}} \tag{1.7}$$

mit dem erwähnten Student-Faktor

$$\overline{d} - 3{,}157 \cdot \frac{s_d}{\sqrt{50}} \leq d \leq \overline{d} + 3{,}157 \cdot \frac{s_d}{\sqrt{50}} \tag{1.8}$$

folgt.

Da sich die maximale Größtabweichung Δd_{max} nach

$$\Delta d_{max} = \Delta\overline{d}_{zuf} + \Delta d_{sys} \tag{1.9}$$

berechnet, wobei $\Delta\overline{d}_{zuf}$ den zufälligen Fehler des Mittelwertes und Δd_{sys} die Messgenauigkeit (siehe Abschnitt 1.3) des Messgerätes darstellt, ist der Vertrauensbereich um diese Messgenauigkeit anzupassen.

Nach dem Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für eine Ergebnisgröße $f = \mathrm{f}(x, y)$ die Abweichung

$$f \pm \Delta f = \mathrm{f}(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y) \tag{1.10}$$

und damit für die Dichte aus Formel 1.3 mittels partieller Differentiation

$$\begin{aligned} \Delta\varrho &= \left|\frac{\partial\varrho}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial\varrho}{\partial d}\right| \Delta d \\ &= \frac{6}{\pi \cdot d^3} \cdot \Delta m + \frac{18 \cdot m}{\pi \cdot d^4} \cdot \Delta d. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Außerdem sollen die Messergebnisse für die Masse m und den Durchmesser d aller Versuchsgruppen mit Probekörpern aus dem gleichen Probenmaterial (in unserem Falle lila-farbenes Glas) mittels linearer Regression zu einem Ergebnis zusammengefasst werden. Die Regressionsgerade der Form $y = a + b \cdot x$ ergibt sich dabei aus

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} \tag{1.12}$$

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \tag{1.13}$$

mit

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \tag{1.14}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2. \tag{1.15}$$

Die Abweichungen $\overline{s}_a$ und $\overline{s}_b$ für a bzw. b erhält man aus

$$\overline{s}_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\overline{(\Delta y)^2}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}} \tag{1.16}$$

$$\overline{s}_a = \overline{s}_b \cdot \sqrt{\overline{x^2}}, \tag{1.17}$$

mit

$$\overline{(\Delta y)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 \tag{1.18}$$

$$\Delta y_i = a + b \cdot x - y_i. \tag{1.19}$$

1.3 Versuchsaufbau

Für die Durchführung des Versuches werden gemäß der Aufgabenstellung 1.1 drei Geräte benötigt:

- analoger Messschieber MS, Messgenauigkeit $\Delta d_{\mathrm{MS}} = 100\,\mu\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{mm}$
- digitale Bügelmessschraube BMS, Messgenauigkeit $\Delta d_{\mathrm{BMS}} = 10\,\mu\mathrm{m} = 0{,}01\,\mathrm{mm}$
- mechanische Feinwaage W, Messgenauigkeit $\Delta m_{\mathrm{W}} = 1\,\mathrm{mg} = 0{,}001\,\mathrm{g}$

In Abbildung 1.1 sind die verwendeten Messgeräte dargestellt.

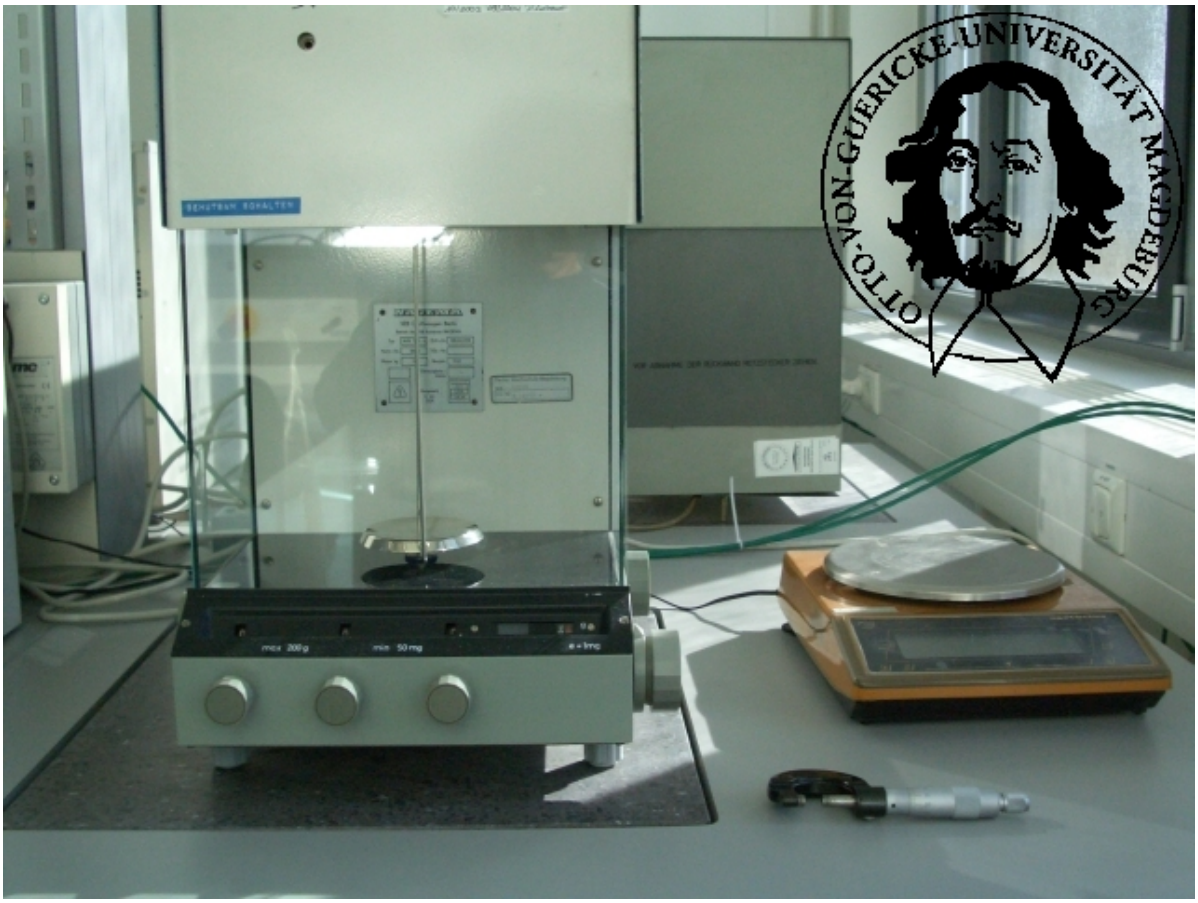


Abbildung 1.1: [5] Verwendete Messgeräte

1.4 Messergebnisse

1.4.1 Messreihe Durchmesser mit digitaler Bügelmessschraube

Mittels der digitalen Bügelmessschraube wurden $n = 50$ Messungen des Durchmessers d der Kugel durchgeführt. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 1.1 dargestellt.

Tabelle 1.1: Messwerte des Kugeldurchmessers

Messwert i	d_i [mm]	Messwert i	d_i [mm]
1	21,435	26	20,857
2	20,807	27	20,854
3	21,031	28	20,977
4	21,503	29	21,086
5	21,058	30	20,916
6	21,574	31	21,112
7	20,932	32	21,324
8	21,426	33	21,497
9	21,672	34	21,316
10	21,555	35	21,443
11	21,221	36	21,600
12	21,335	37	21,297
13	21,047	38	21,643
14	20,970	39	20,926
15	20,873	40	20,902
16	21,014	41	21,443
17	20,851	42	21,667
18	21,494	43	21,192
19	21,434	44	21,030
20	20,921	45	21,019
21	21,513	46	21,031
22	20,696	47	20,884
23	21,020	48	21,203
24	20,869	49	20,727
25	20,758	50	20,056

1.4.2 Messung des Durchmessers mit analogem Messschieber

Mittels eines analogen Messschiebers wurde für die Kugel ein Durchmesser

$$d_{\mathrm{MS}} = 21{,}1\,\mathrm{mm} = 2{,}11\,\mathrm{cm}$$

ermittelt.

1.4.3 Bestimmung der Masse des Probekörpers mit Feinwaage

Für den Probekörper wurde mit der mechanischen Feinwaage eine Masse

$$m = 12{,}1621\,\mathrm{g}$$

bestimmt.

1.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

Mittelwert, Standardabweichung, maximaler Fehler des Durchmessers

Nach Formel 1.4 ergibt sich für den arithmetischen Mittelwert des Durchmessers:

$$\overline{d} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_i = 21{,}14022\,\mathrm{mm} = 2{,}114022\,\mathrm{cm}.$$

Daraus folgt eine Standardabweichung nach Formel 1.5 von

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}(d_i - \overline{d})^2} = 0{,}32399\,\mathrm{mm}.$$

Mit einem Student-Faktor $t_s = 3{,}157$ für einen Vertrauensniveau von 99,73% berechnet man nach Formel 1.7 den zufälligen Fehler des Mittelwertes $\Delta\overline{d}_{zuf}$:

$$\Delta\overline{d}_{zuf} = t_s \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 3{,}157 \cdot \frac{0{,}32399\,\mathrm{mm}}{\sqrt{50}} = 0{,}14465\,\mathrm{mm}.$$

Unter Einbezug der Messgenauigkeit der Bügelmessschraube, also des systematischen Fehlers $\Delta d_{sys} = \Delta d_{\mathrm{BMS}} = 0{,}01\,\mathrm{mm}$, ergibt sich nach Formel 1.9 eine maximale Größtabweichung $\Delta d_{\mathrm{BMS},max}$ von

$$\Delta d_{\mathrm{BMS},max} = 0{,}14465\,\mathrm{mm} + 0{,}01\,\mathrm{mm} = 0{,}15465\,\mathrm{mm} = 0{,}015465\,\mathrm{cm}.$$

Damit ergibt sich nach Formel 1.8 der Vertrauensbereich

$$\begin{aligned} \overline{d} - \Delta d_{\mathrm{BMS},max} \leq d \leq \overline{d} + \Delta d_{\mathrm{BMS},max} \\ 21{,}12734\,\mathrm{mm} - 0{,}15465\,\mathrm{mm} \leq d \leq 21{,}14022\,\mathrm{mm} + 0{,}15465\,\mathrm{mm}. \end{aligned}$$

Für die Messung des Durchmessers mittels des analogen Messschiebers ist nur der systematische Fehler $\Delta d_{sys} = \Delta d_{\mathrm{MS}} = 0{,}1\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{cm}$ (siehe Abschnitt 1.3) relevant, da es wegen der nur einmaligen Messung keinen zufälligen Fehleranteil gibt.

Maximaler Fehler der Masse

Auch für die Masse gibt es wegen der nur einmaligen Messung keinen zufälligen Fehler. Die maximale Größtabweichung Δm_{max} der Masse ist also gleich der Messgenauigkeit Δm_{W} der mechanischen Feinwaage (siehe Abschnitt 1.3):

$$\Delta m_{max} = \Delta m_{\mathrm{W}} = 0{,}001\,\mathrm{g}.$$

Die wahre Masse bewegt sich also im Intervall $m = (12{,}1621 \pm 0{,}001)\,\mathrm{g}$.

Einteilung der Klassen, Ermittlung der relativen Häufigkeiten

Entsprechend der Aufgabenstellung (1.) wurden die im Intervall $[20{,}056\,\mathrm{mm}; 21{,}672\,\mathrm{mm}]$ liegenden Messwerte in sieben äquidistante Bereiche bzw. Klassen eingeteilt. Für jede Klasse wurde die relative Häufigkeit ermittelt.

In der Abbildung 1.2 sind diese Klassen und ihr jeweiliges Auftreten dargestellt.

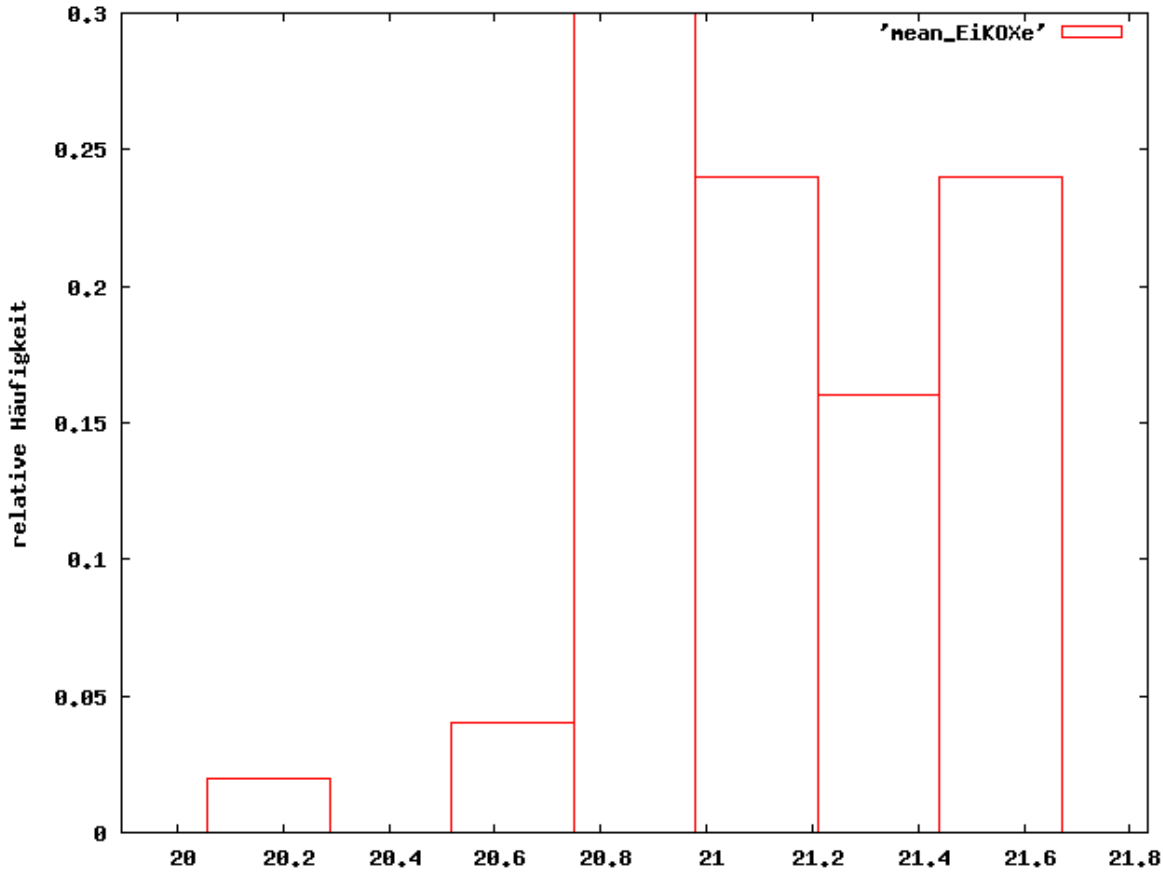


Abbildung 1.2: Messwertklassen und relative Häufigkeiten

Fehlerfortpflanzung

Messreihe mit Bügelmessschraube

Da der Durchmesser d in einer relativ kleinen Messreihe bestimmt wurde, kommt das Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung nach Formel 1.11 zum tragen. Man erhält bei der Messreihe mit der digitalen Bügelmessschraube für die Größtabweichung der Dichte

$$\begin{aligned}
\Delta\varrho_{\mathrm{BMS}} &= \frac{6}{\pi \cdot \overline{d}^3} \cdot \Delta m_{max} + \frac{18 \cdot m}{\pi \cdot \overline{d}^4} \cdot \Delta d_{\mathrm{BMS},max} \\
&= \frac{6}{\pi \cdot (2{,}114022\,\mathrm{cm})^3} \cdot 0{,}001\,\mathrm{g} + \frac{18 \cdot 12{,}1621\,\mathrm{g}}{\pi \cdot (2{,}114022\,\mathrm{cm})^4} \cdot 0{,}015465\,\mathrm{cm} \\
&= 0{,}05416\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.
\end{aligned}$$

Einmalmessung mit Messschieber

Die Größtabweichung der Dichte $\Delta\varrho_{\mathrm{MS}}$ bei der Einmalmessung des Durchmessers d_{MS} ergibt sich analog zu

$$\begin{aligned}
\Delta\varrho_{\mathrm{MS}} &= \frac{6}{\pi \cdot {d_{\mathrm{MS}}}^3} \cdot \Delta m_{max} + \frac{18 \cdot m}{\pi \cdot {d_{\mathrm{MS}}}^4} \cdot \Delta d_{\mathrm{MS}} \\
&= \frac{6}{\pi \cdot (2{,}11\,\mathrm{cm})^3} \cdot 0{,}001\,\mathrm{g} + \frac{18 \cdot 12{,}1621\,\mathrm{g}}{\pi \cdot (2{,}11\,\mathrm{cm})^4} \cdot 0{,}01\,\mathrm{cm} \\
&= 0{,}03536\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.
\end{aligned}$$

Berechnung der Dichte des Probekörpers aus eigenen Messwerten

Unter Berücksichtigung dieser Fehler für die Dichte kann nun, entsprechend des Aufgabenteils (4.), aus den Messwerten der Messreihe mit der Bügelmessschraube bzw. der Einmalmessung mit dem Messschieber die Dichte des Probenmaterials (lila-farbenes Glas) berechnet werden. Nach Formel 1.3 und der Betrachtung der Fehlerfortpflanzung im Abschnitt 1.5 ergeben sich je nach Messgerät Bügelmessschraube BMS bzw. Messschieber MS die Dichten ϱ_{BMS} und ϱ_{MS}:

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{BMS}} &= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{\overline{d}^3} + \Delta\varrho_{\mathrm{BMS}} \\
&= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{12{,}1621\,\mathrm{g}}{(2{,}114022\,\mathrm{cm})^3} \pm 0{,}05416\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \\
&= (2{,}4586 \pm 0{,}05416)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathrm{MS}} &= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{{d_{\mathrm{MS}}}^3} + \Delta\varrho_{\mathrm{MS}} \\ &= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{12{,}1621\,\mathrm{g}}{(2{,}11\,\mathrm{cm})^3} \pm 0{,}03536\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \\ &= (2{,}4726 \pm 0{,}03536)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.\end{aligned}$$

Die Ergebnisintervalle überlappen sich also erwartungsgemäß.

Berechnung der Dichte des Probekörpers durch lineare Regression aus den Werten aller Gruppen

Aus den in Tabelle 1.2 dargestellten Messwerten aller Versuchsgruppen kann nun, wie in Aufgabenteil (5.) verlangt, mittels linearer Regression die Dichte des Probenmaterials bestimmt werden.[1]

Tabelle 1.2: Messwerte aller Gruppen und Regressionsrechenparameter

Gruppe	m [g]	$\tilde{d}$ [mm]	$\tilde{d}$ [cm]	V [cm^3]	$m \cdot V$ [g $\cdot$ cm^3]	m^2 [g^2]
1	12,2848	21,2301	2,12301	5,010196	61,549259	150,916311
2	4,4847	14,99	1,499	1,763614	7,909279	20,112534
3	12,1621	20,977	2,0977	4,833133	58,781048	147,916676
4	6,3512	16,933	1,6933	2,542145	16,145672	40,337741
5	10,3955	20,0205	2,00205	4,201684	43,678605	108,066420
$\overline{x}$	9,13566	18,83012	1,883012	3,67015	37,612733	93,469936

Wegen Formel 1.1 besteht zwischen Masse m und Volumen V der lineare Zusammenhang $V = \frac{m}{\varrho}$. Stellt man also die Abhängigkeit $V = V(m)$ in einem Diagramm dar, erhält man idealerweise eine Gerade mit dem Anstieg $\frac{1}{\varrho}$.

[1] Hierbei ist anzumerken, dass der Messwert für den Durchmesser $\tilde{d}$ nicht bei allen Gruppen gleichartig ist. Bei einigen ist er schon der arithmetische Mittelwert aller 50 Messwerte der Gruppe, bei anderen Gruppen aber nur ein zufällig aus aus den 50 Werten ausgewählter Messwert.

Nach den Formeln 1.12 bis 1.15 ergeben sich für die Parameter a und b

$$\begin{aligned} b &= \frac{\overline{m \cdot V} - \overline{m} \cdot \overline{V}}{\overline{m^2} - (\overline{m})^2} \\ &= \frac{37{,}612733\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^3 - 9{,}13566\,\mathrm{g} \cdot 3{,}67015\,\mathrm{cm}^3}{93{,}469936\,\mathrm{g}^2 - (9{,}13566\,\mathrm{g})^2} \\ &= 0{,}407955\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \overline{V} - b \cdot \overline{m} \\ &= 3{,}67015\,\mathrm{cm}^3 - 0{,}407955\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}} \cdot 9{,}13566\,\mathrm{g} \\ &= -0{,}056791\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Aus dieser linearen Regression ergibt sich die Dichte $\varrho_{\mathrm{Regression}}$

$$\varrho_{\mathrm{Regression}} = \frac{1}{b} = \frac{1}{0{,}407955\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}}} = 2{,}451251\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Für die Abweichungen der Regressionsparameter ergibt sich mit $\overline{(\Delta V)^2} = 0{,}001731\,\mathrm{cm}^6$ nach den Formeln 1.16 bis 1.19:

$$\begin{aligned} \overline{s}_b &= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}001731\,\mathrm{cm}^6}{93{,}469936\,\mathrm{g}^2 - (9{,}13566\,\mathrm{g})^2}} \\ &= 0{,}007592\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{s}_a &= 0{,}007592\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}} \cdot \sqrt{93{,}469936\,\mathrm{g}^2} \\ &= 0{,}07340\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Diagramm mit den Messwerten aller Gruppen und der Regressionsgeraden

Im Diagramm 1.3 sind die Messwerte der einzelnen Gruppen und die Regressionsgerade dargestellt.

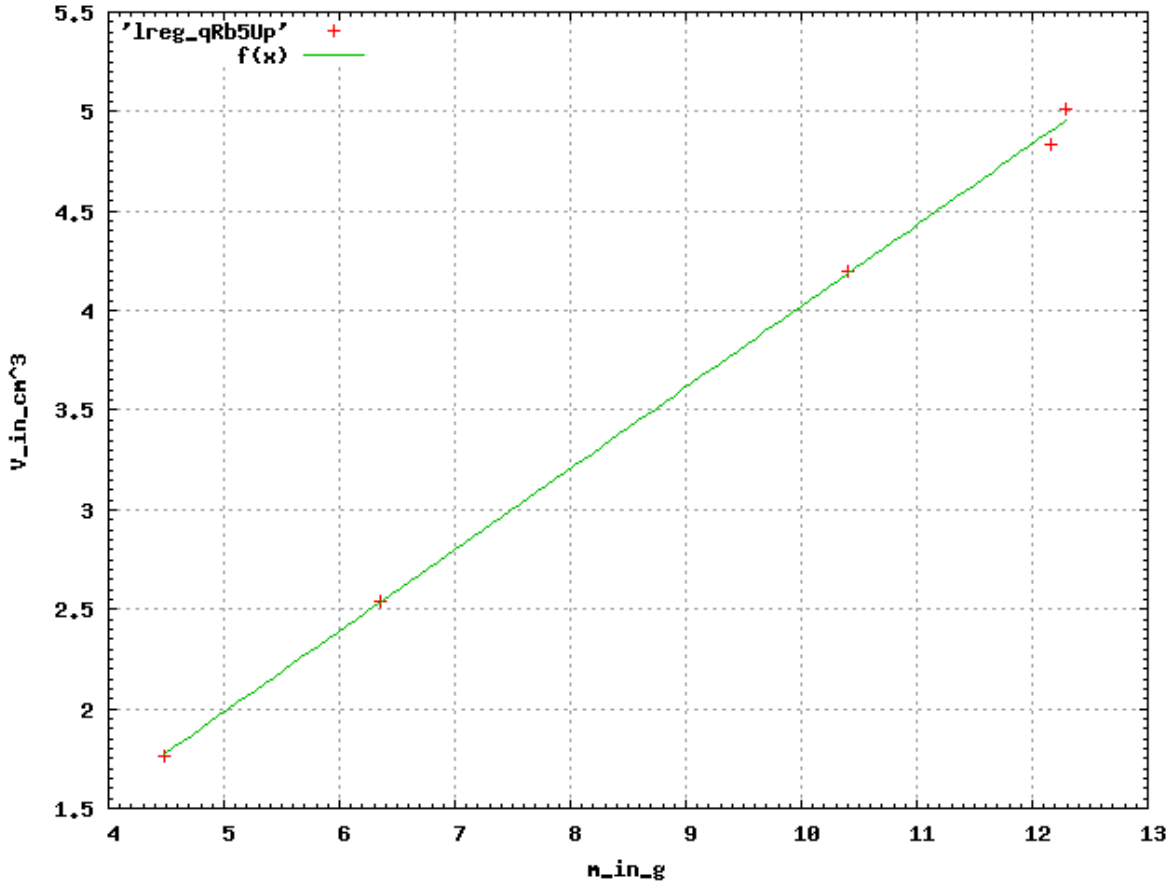


Abbildung 1.3: Messwerte der Gruppen und Regressionsgerade

1.6 Zusammenfassung und Diskussion

Bei diesem Versuch haben wir folgende Ergebnisse ermittelt:

- Durchmesser unserer Probe-Kugel aus Messung mit Bügelmessschraube:

$$\overline{d} = (21{,}14022 \pm 0{,}15465)\,\mathrm{mm}$$

- Durchmesser unserer Probe-Kugel aus Messung mit Messschieber:

$$d_{\mathrm{MS}} = (21{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$$

- Masse der Kugel aus Wägung mit Feinwaage:

$$m = (12{,}1621 \pm 0{,}001)\,\mathrm{g}$$

- Dichte der Kugel aus Messung mit Bügelmessschraube:

$$\varrho_{\mathrm{BMS}} = (2{,}4586 \pm 0{,}05416)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

- Dichte der Kugel aus Messung mit Messschieber:

$$\varrho_{\mathrm{MS}} = (2{,}4726 \pm 0{,}03536)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

- Dichte der Kugel aus linearer Regression:

$$\varrho_{\mathrm{Regression}} = 2{,}451251\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Bei Betrachtung des Histogramms erkennt man eine Abweichung von der eigentlich zu erwartenden Normalverteilung. Auffällig ist die starke Ausrichtung zu größeren Durchmessern. Dies könnte zum einen an der eben nicht, wie angenommen, gegebenen Form einer idealen Kugel und zum anderen an der nicht gleichverteilten Messung liegen. Man hätte die Messpunkte auf der Kugel evtl. markieren und „zufälliger“ verteilen müssen. Da dieser Fehler gleich in der dritten Potenz in die Dichte eingeht, ist hier eine besondere Gründlichkeit nötig. Für die Form des Probekörpers hätte möglicherweise auch eine andere Modellierung, z. B. in Form eines Rotationsellipsoiden oder einer abgeflachten

Kugel, genauere Ergebnisse für das Volumen hervorgebracht.[2] Im Vergleich zur Durchmessermessung ist die Messunsicherheit bei der Wägung gering, da hier nur der systematische Messfehler der Feinwaage eine Rolle spielt und eventuelle zufällige Messabweichungen durch Ablesefehler vernachlässigt werden können.

Aus Masse und Volumen ergibt sich die oben angegebene Dichte für unsere Kugel. Sie liegt leicht unterhalb der in Tabellenbüchern angegeben Dichte von 2,5 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ für Glas. Auf Grund der Verteilung der Durchmesser im Histogramm ist davon auszugehen, dass der wahre Durchmesser etwas unter unserem errechneten Mittelwert liegt und unsere Dichte noch ein wenig größer und damit näher am im Tabellenbuch angegeben Wert liegt.

Auch der durch lineare Regression der Messergebnisse aller Gruppen gewonnene Wert weist einen gewissen Fehler auf, da zunächst nicht zweifelsfrei fest steht, dass wirklich alle Kugeln aus dem gleichen Material sind. Außerdem ist die Anzahl der Wertepaare sehr gering.

[2] Für den Fall, dass der Durchmesser des Probe-Körpers nicht gesondert betrachtet werden muss, wäre auch eine direkte Volumenmessung mittels Flüssigkeitsverdrängung denkbar.

2 M11 - Trägheitsmomente aus Drehschwingungen

Protokoll zum Versuch M11 am 20. April 2006

2.1 Aufgabenstellung

(1.) Die Winkelauslenkung des Zeigers der Schwingplatte ist in Abhängigkeit vom angreifenden Drehmoment zu messen und graphisch darzustellen. Das Direktionsmoment D der Spiralfeder ist daraus durch lineare Regression zu bestimmen (statische Methode).

(2.) Die Schwingungsdauer T der Schwingplatte mit aufgesetztem Vollzylinder ist in Abhängigkeit von dessen Abstand s von der Drehachse zu messen, die funktionale Abhängigkeit $T^2 = \mathrm{f}(s^2)$ ist graphisch darzustellen, der Satz von Steiner ist zu bestätigen. Direktionsmoment D der Feder und Trägheitsmoment J der Schwingplatte sind durch lineare Regression zu ermitteln (dynamische Methode der D-Bestimmung).

(3.) Eine Koordinate des Massenmittelpunkts und eines der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers sind experimentell zu bestimmen.

2.2 Grundlagen zum Versuch

2.2.1 Statische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Durch Ersetzen der translatorischen Größen mit ihren rotatorischen Pendants im Hooke'schen Gesetz $F_r = -k \cdot s$ und anschließendes Umstellen erhält man für den Proportionalitätsfaktor des Direktionsmomentes D die Abhängigkeit

$$D = -\frac{M_r}{\varphi} \tag{2.1}$$

mit dem Rückstellmoment M_r, welches von der Feder ausgeübt wird, und dem Drehwinkel φ.

Das Rückstellmoment M_r muss im statischen Fall dem durch das Gewicht an der Umlenkrolle zugefügten Drehmoment M betragsmäßig entsprechen.

Nach [1] ist ein Drehmoment M das Produkt aus Kraft F und Hebelarm r. In unserem Fall ist die Kraft F gleich der Gewichtskraft F_G des jeweiligen Massestücks mit der Masse m:

$$M_r = -M = -F_G \cdot r. \tag{2.2}$$

Damit und aus $F_G = m \cdot g$ mit der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ergibt sich das Direktionsmoment aus

$$D = \frac{F_G \cdot r}{\varphi} = \frac{m \cdot g \cdot r}{\varphi}. \tag{2.3}$$

Durch lineare Regression[1] von mehreren Messwertpaaren wird ein Näherungswert für das Direktionsmoment ermittelt.

2.2.2 Dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Überträgt man (ähnlich wie oben beim Hooke'schen Gesetz) die Größen der Rotation auf die Periodendauer eines translatorisch schwingenden Feder-Masse-Systems $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$,

[1] Die Formeln für die lineare Regression und die Herleitung der Fehlerfortpflanzung werden hier nicht explizit angegeben. Diese sind ggf. in Kapitel 1.2 des Versuchs M01 in diesem Protokollbuch nachzulesen.

erhält man die Periodendauer T in Abhängigkeit vom Massenträgheitsmoment J und dem Direktionsmoment D:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{2.4}$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment J setzt sich zusammen aus dem Massenträgheitsmoment J_0 des Drehtisches und dem durch den aufgesteckten Zylinder dazukommenden Massenträgheitsmoment. Dieses setzt sich nach dem Satz von Steiner (siehe [2]) aus dem eigenen Massenträgheitsmoment J_Z

$$J_Z = \frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot {r_Z}^2 \tag{2.5}$$

und dem abstandsabhängigen Verschiebungsmoment $m_Z \cdot s^2$ (mit der Masse m_Z, dem Zylinderradius r_Z und dem Abstand s von der Drehachse) zusammen:

$$J = J_0 + J_Z + m_Z \cdot s^2. \tag{2.6}$$

Aus den Formeln 2.4 und 2.6 ergibt sich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + J_Z + m_Z \cdot s^2}{D}}. \tag{2.7}$$

Der laut Aufgabenstellung (2.) geforderte Zusammenhang $T^2 = \mathrm{f}(s^2)$ ergibt sich also zu

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + J_Z + m_Z \cdot s^2}{D} = \frac{4\pi^2 \cdot (J_0 + J_Z)}{D} + \frac{4\pi^2 \cdot m_Z}{D} \cdot s^2. \tag{2.8}$$

Ersichtlich ist ein linearer Zusammenhang zwischen T^2 und s^2. Eine Linearität in der graphischen Darstellung würde den Satz von Steiner bestätigen.

Durch lineare Regression des $T^2 = \mathrm{f}(s^2)$-Diagramms erhält man die Regressionsparameter Steigung a und Achsenabschnitt b, aus denen man das Direktionsmoment D sowie das Massenträgheitsmoment J_0 des Drehtisches bestimmen kann:

$$T^2 = \mathrm{f}(s^2) = b + a \cdot s^2 \tag{2.9}$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m_Z}{a} \tag{2.10}$$

$$J_0 = \frac{b \cdot D}{4\pi^2} - J_Z. \tag{2.11}$$

2.2.3 Dynamische Methode der Schwerpunktbestimmung

Aufgrund der unregelmäßigen Form des Versuchskörpers (mit der Masse m_K und dem Massenträgheitsmoment J_K) stimmt der Abstand s nicht mit der Entfernung des Massenmittelpunktes von der Drehachse des Drehtisches überein. Für das Verschiebungsmoment nach Steiner (siehe Formel 2.6) wird also der Abstand x_s des Massenmittelpunktes von den Einsteckzapfen (die den Abstand s vom Drehpunkt haben) benötigt. Es gilt also

$$J = J_0 + J_K + m_K \cdot (s - x_s)^2. \tag{2.12}$$

Aus Formel 2.4 ergibt sich J durch

$$J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2. \tag{2.13}$$

Dabei sind D und J_0 aus dem vorhergehenden Versuchsteil 2.2.2 bekannt, so dass es nun möglich ist, die Abhängigkeit $J = \mathrm{f}(s)$ graphisch darzustellen.

Die entstandene quadratische Funktion kann durch quadratische Regression[2] zu einer Gleichung der Form

$$J = a \cdot s^2 + b \cdot s + c \tag{2.14}$$

ermittelt werden.

Das Minimum (J_{min}) dieser Funktion, welches man durch die Beziehung $J'(s) = 0$ erhält, bestimmt denjenigen Abstand s, für den J am kleinsten ist. Dies ist dann der Fall, wenn des Massenmittelpunkt des unregelmäßigen Körpers mit der Drehachse des Drehtisches zusammenfällt, d. h. wenn $x_s = s$.

Aus Formel 2.12 ergibt sich dann für das Massenträgheitsmoment J_K des unregelmäßigen Körpers zu

$$J_K = J_{min} - J_0. \tag{2.15}$$

Der Massenmittelpunkt liegt dann um x_s vom Mittelpunkt der Einsteckzapfen entfernt auf deren Mittelsenkrechten.

[2] Formeln hierzu sollen an dieser Stelle nicht angegeben werden, da man die Rechnung bequem von einem Rechner, wie z. B. unter [6] ausführen lassen kann.

2.3 Versuchsaufbau

Für die statische Messung nutzten wir eine Winkelskala auf einer Drehplatte, die mit Teilstrichen im Abstand von $\Delta\varphi = 2°$ versehen war. Die Zugkraft wurde durch einen Wägesatz mit den Massestücken 10 g, 2 mal 20 g, 50 g und 100 g erzeugt.

Für den 2. und 3. Teil des Versuchs wurde eine Lichtschranke zur Zeitmessung genutzt, mit der die Schwingungsdauer einer Schwingung des Drehtisches mit dem jeweils aufgesetzten Körper (Zylinder bzw. unregelmäßiger Körper) gemessen werden kann. Dazu wurde die Spiralfeder jeweils auf eine Auslenkung von ca. 50° gebracht und dann losgelassen. Die Positionierung des Körpers erfolgt durch Einstecken in eines von 16 verschiedenen, mit in einem Abstand von 1 cm zueinander angebrachten, Bohrungspaaren.

In Abbildung 2.2 sind der Drehtisch mit Lichtschranke und Zeitmessgerät, wie sie für Teilaufgabe (2.) und (3.) nötig sind, dargestellt. Der prinzipielle Versuchsaufbau für die statische bzw. dynamische Methode ist in den Abbildungen 2.1(a) und 2.1(b) dargestellt.

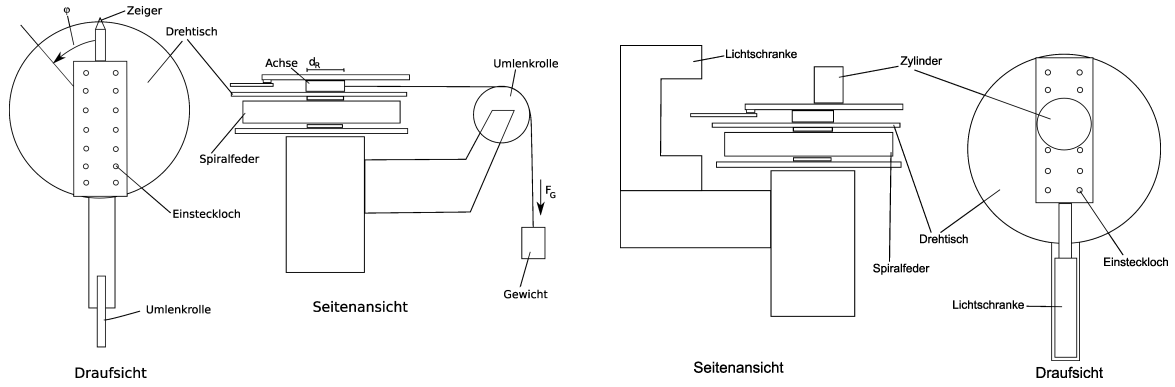
Messgenauigkeiten der verwendeten Geräte

Der analoge Messschieber zur Bestimmung verschiedener Durchmesser und Strecken hat eine Messgenauigkeit $\Delta d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

Die Messgenauigkeit der Waage der Firma Sartorius beträgt $\Delta m = 0{,}01\,\mathrm{g}$.[3]

Das elektronische Zeitmessgerät 4-4 der Firma Phywe besitzt eine Messgenauigkeit von $\Delta t = 0{,}0015\,\mathrm{s}$.

[3] Vermutlich ist diese auf Grund von Temperatur- und Luftdruckschwankungen am Standort der Waage jedoch größer (ca. $\Delta m = 0{,}04\,\mathrm{g}$) als die Herstellerangabe.



(a) statische Methode (b) dynamische Methode

Abbildung 2.1: Skizzen der Versuchsgeräte

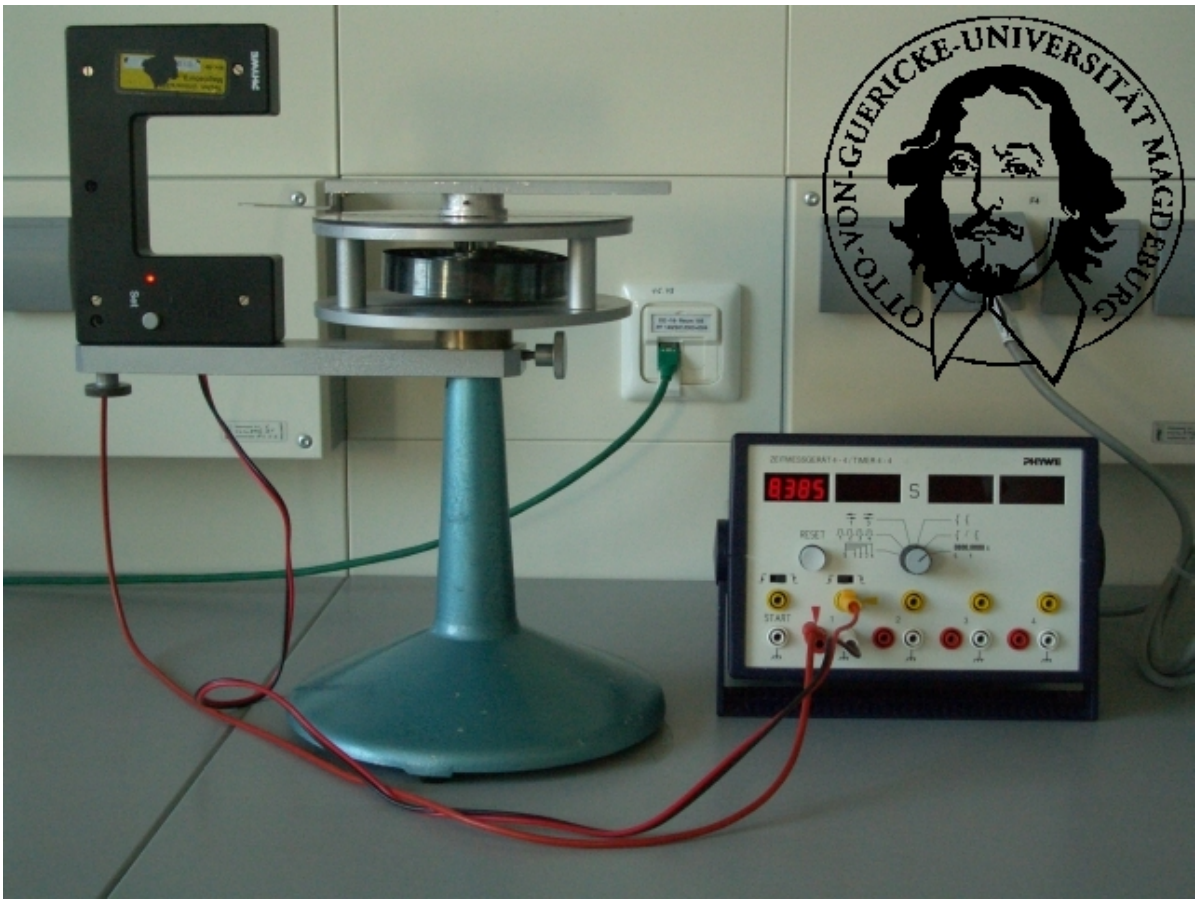


Abbildung 2.2: [5] Drehtisch mit Lichtschranke und Zeitmessgerät

2.4 Messergebnisse

2.4.1 Statische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Für diesen Versuchsteil wurde für zehn verschiedene Massen m der Auslenkwinkel φ bestimmt. Für den Hebelarm r ergibt sich aus dem Durchmesser der Rolle ($d_R = 31{,}3\,\mathrm{mm}$) und des Fadens ($d_F = 0{,}7\,\mathrm{mm}$)

$$r = \frac{31{,}3\,\mathrm{mm} + 0{,}7\,\mathrm{mm}}{2} = 16\,\mathrm{mm}.$$

Aus diesen Werten wurde nach Formel 2.2 das sich ergebene Moment M_r berechnet. In Tabelle 2.1 sind die Messwerte des Versuchs und die daraus berechneten Größen dargestellt.

Tabelle 2.1: Messwerte der statischen Methode und berechnete Größen

m [g]	φ [°]	φ [rad]	F_G [N]	M_r [N · m]
20	10	0,1745	0,1962	0,0031
40	19	0,3316	0,3924	0,0063
60	28	0,4887	0,5886	0,0094
80	37	0,6458	0,7848	0,0126
100	46	0,8029	0,9810	0,0157
120	55	0,9599	1,1772	0,0188
140	64	1,1170	1,3734	0,0220
160	73	1,2741	1,5696	0,0251
180	83	1,4486	1,7658	0,0283
200	92	1,6057	1,9620	0,0314

Trägt man wie in Abbildung 2.3 den Auslenkwinkel über dem Moment auf ergibt sich nach Formel 2.3 durch lineare Regression das Reziproke des Direktionsmoments D für die Feder im Drehtisch.

Mittels [6] wurde der Anstieg der Regressionsgeraden zu

$$a = 50{,}58\,\frac{1}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}$$

und damit das Direktionsmoment zu

$$D = \frac{1}{a} = 0{,}01977\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

ermittelt.

Der Ordinatenschnittpunkt liegt mit $b = 0{,}67°$ sehr nahe am Koordinatenursprung.

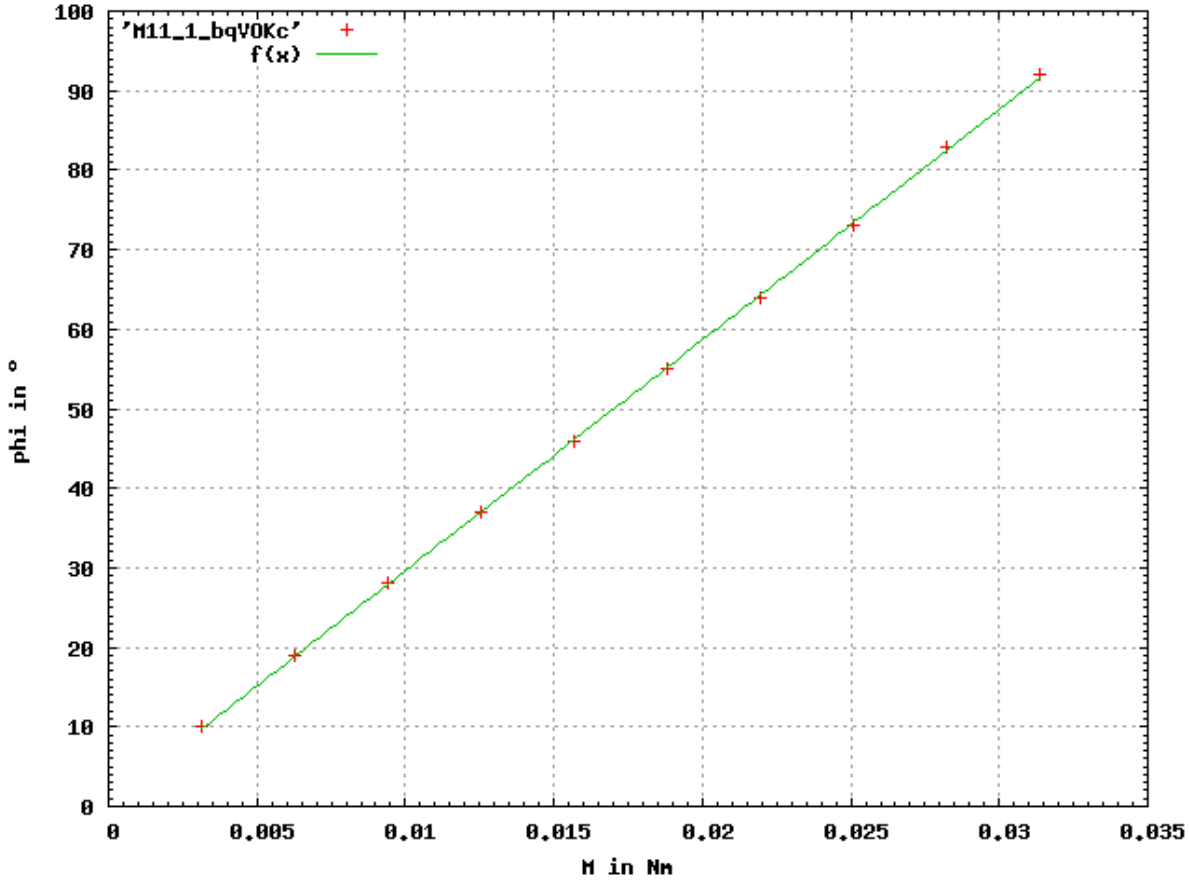


Abbildung 2.3: Messwerte der statischen Methode und Regressionsgerade

2.4.2 Dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Um entsprechend Teilaufgabe (2.) das Direktionsmoment D der Feder sowie das Trägheitsmoment J_0 der Schwingplatte zu bestimmen wurde für jeden von zehn Abständen des Zylinders vom Drehpunkt der Schwingplatte drei mal die Schwingungsdauer gemessen (dargestellt in Tabelle 2.2). Es wurden der arithmetische Mittelwert der Schwingungsdauern je Abstand, sowie die Werte für s^2 und $\overline{T}^2$ bestimmt.

Tabelle 2.2: Messwerte der dynamischen Methode und berechnete Größen

s [mm]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	s^2 [m^2]	$\overline{T}$ [s]	$\overline{T}^2$ [s^2]
0	0,828	0,827	0,827	0	0,8273	0,6845
10	0,851	0,853	0,851	0,0001	0,8517	0,7253
20	0,914	0,917	0,914	0,0004	0,9150	0,8372
30	1,015	1,015	1,017	0,0009	1,0157	1,0316
40	1,141	1,140	1,143	0,0016	1,1413	1,3026
50	1,285	1,282	1,283	0,0025	1,2833	1,6469
60	1,441	1,443	1,445	0,0036	1,4430	2,0822
70	1,610	1,611	1,613	0,0049	1,6113	2,5964
80	1,778	1,782	1,782	0,0064	1,7807	3,1708
90	1,961	1,961	1,961	0,0081	1,9610	3,8455

Die sich ergebende Abhängigkeit $T^2 = \mathrm{f}(s^2)$ bestätigt durch ihre in Diagramm 2.4 erkennbare Linearität[4] den Satz von Steiner.

[4] Das Diagramm wurde mittels des Praktikumshelfers unter [6] erstellt, welcher die Abhängigkeit im Diagramm in umgekehrter Form darstellt. Begründet wird dies mit der größeren Genauigkeit der Zeitmessung gegenüber der Längenmessung des Abstandes. Auf die Linearität hat dies keinen Einfluss.

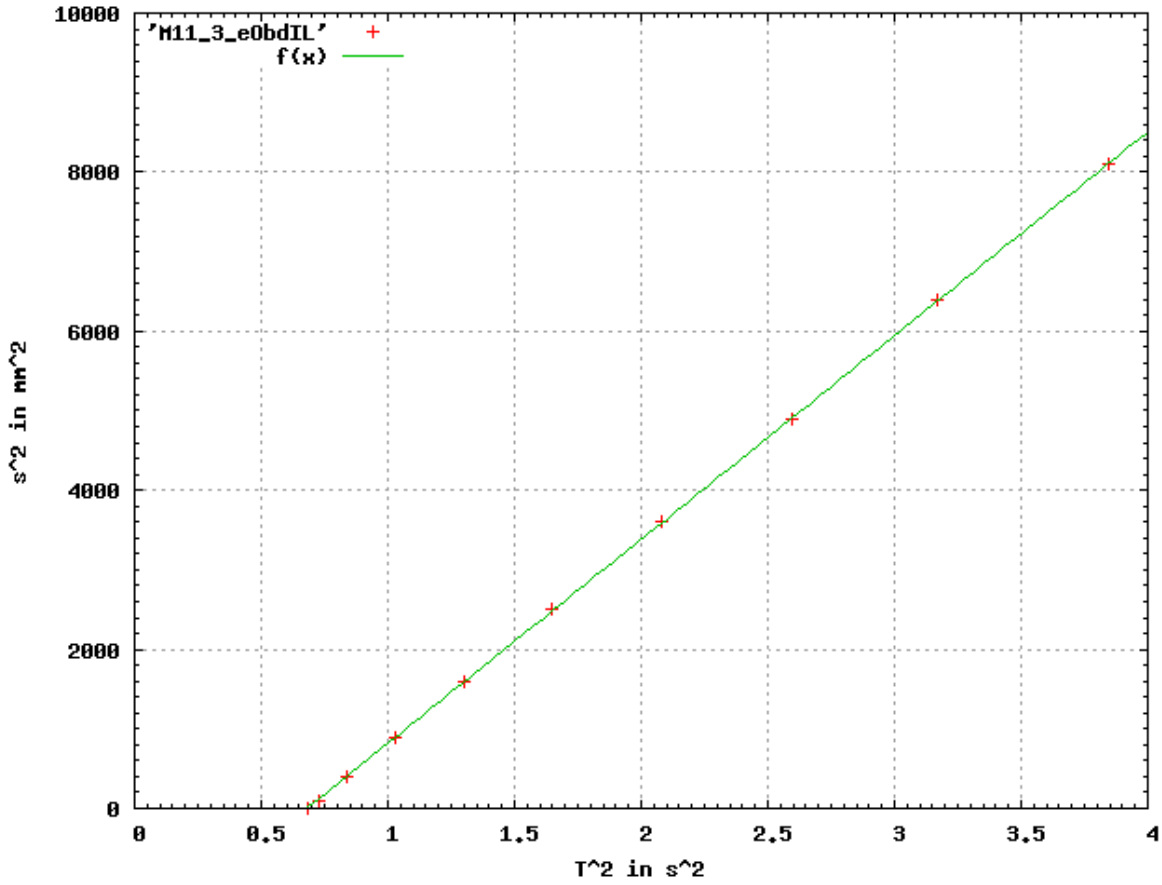


Abbildung 2.4: Messwerte der dynamischen Methode und Regressionsgerade

Durch lineare Regression ergibt sich nach Formel 2.10 das Direktionsmoment

$$D = 0{,}01819\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

Die Masse des Zylinders beträgt

$$m_Z = 179{,}71\,\mathrm{g}$$

und sein Radius wurde zu

$$r = 15{,}05\,\mathrm{mm}$$

bestimmt.

Daraus ergibt sich nach Formel 2.5 ein Massenträgheitsmoment von

$$J_Z = 0{,}00002035\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Aus diesen Werten folgt nach 2.11 das Massenträgheitsmoment der Schwingplatte

$$J_0 = 0{,}0002957\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

2.4.3 Dynamische Methode der Schwerpunktbestimmung

Für die Bestimmung des Schwerpunktes und des Hauptträgheitsmoment des unregelmäßig geformten Körpers (siehe Abbildung 2.6) wurde zunächst dessen Masse

$$m_K = 276{,}02\,\mathrm{g}$$

bestimmt und anschließend je drei mal die Schwingungsdauer des Körpers in 16 verschiedenen Abständen vom Drehpunkt der Schwingplatte. Die zugehörigen Messwerte sind in Tabelle 2.3 dargestellt. Für jeden Abstand s wurde der arithmetische Mittelwert $\overline{T}$ der Schwingungsdauern und nach Formel 2.13 das Massenträgheitsmoment J berechnet.

Tabelle 2.3: Messwerte der Schwerpunktbestimmung und berechnete Größen

s [mm]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	$\overline{T}$ [s]	J [kg · m^2]
-60	1,349	1,348	1,348	1,3483	0,000838
-50	1,190	1,188	1,188	1,1887	0,000651
-40	1,058	1,057	1,058	1,0577	0,000516
-30	0,966	0,969	0,966	0,9670	0,000431
-20	0,928	0,927	0,928	0,9277	0,000397
-10	0,950	0,951	0,950	0,9503	0,000416
0	1,033	1,030	1,029	1,0307	0,000490
10	1,159	1,159	1,158	1,1587	0,000619
20	1,321	1,319	1,319	1,3197	0,000803
30	1,504	1,505	1,503	1,5040	0,001042
40	1,705	1,705	1,706	1,7053	0,001340
50	1,924	1,925	1,923	1,9240	0,001706
60	2,143	2,146	2,147	2,1453	0,002121
70	2,375	2,372	2,379	2,3753	0,002600
80	2,620	2,625	2,619	2,6213	0,003167
90	2,862	2,859	2,864	2,8617	0,003774

Die entstehende Abhängigkeit $J = \mathrm{f}(s)$ ist in Diagramm 2.5 dargestellt.

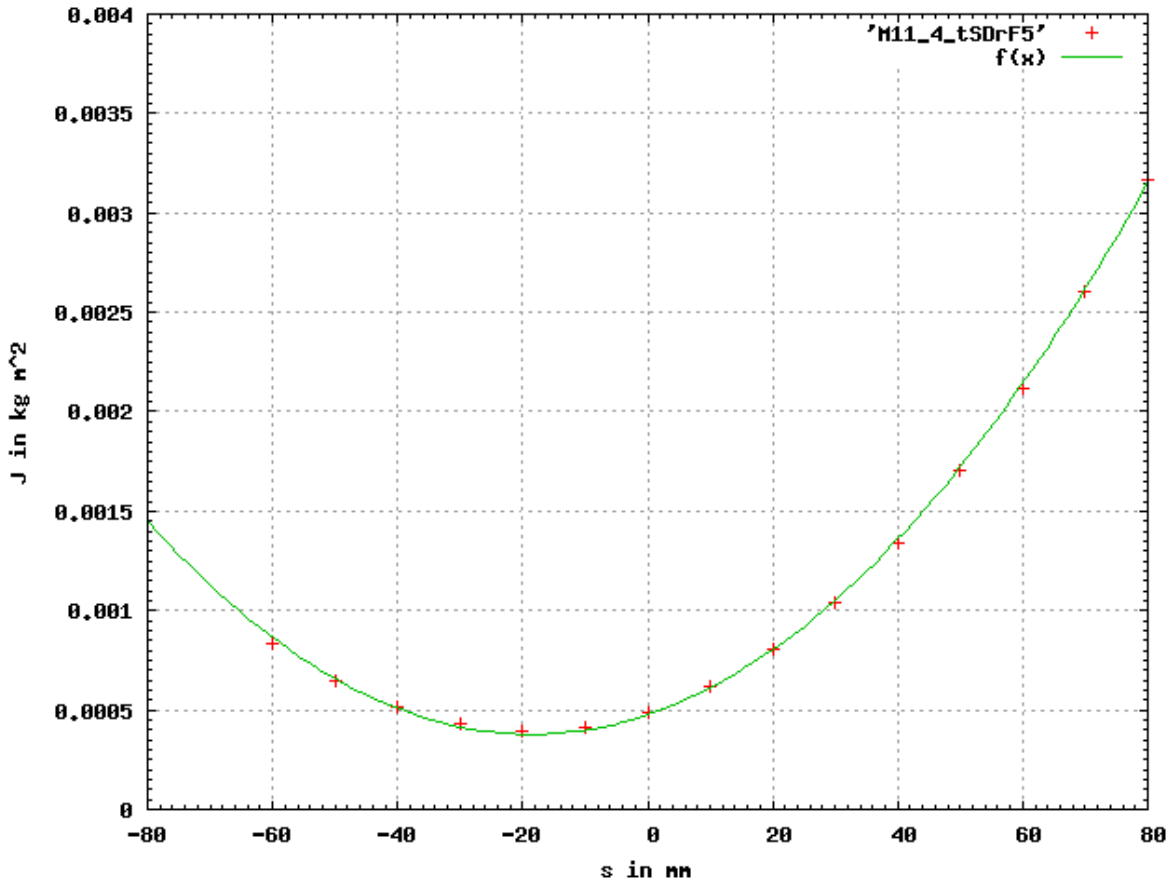


Abbildung 2.5: Messwerte der dynamischen Bestimmung des Schwerpunkts

Entsprechend Formel 2.14 wurde über die Internetseite [6] durch quadratische Regression das Minimum der Parabel ermittelt. Die Abszisse dieses Minimums beträgt

$$s = x_s = -18{,}66\,\mathrm{mm}.$$

Das Hauptträgheitsmoment J_K ergibt sich nach Formel 2.15 aus der Differenz der Ordinate des Minimums und des in Teilabschnitt 2.4.2 ermittelten Massenträgheitsmoments J_0 der Schwingplatte zu

$$J_K = J_{min} - J_0 = 0{,}0003779\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 - 0{,}0002957\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 = 0{,}0000822\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$

2.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

2.5.1 Unsicherheiten bei der statischen Messung

Nach dem Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung ergibt sich die Messunsicherheit für das Direktionsmoment zu

$$\Delta D = 0{,}00008\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

2.5.2 Unsicherheiten bei der dynamischen Messung

Lineare Fehlerfortpflanzung liefert für die Formel 2.10:

$$\Delta D = \frac{4\pi^2 \cdot m_Z}{a^2} \cdot \Delta \overline{s}_a + \frac{4\pi^2 \cdot m_Z}{a} \cdot \Delta m = 0{,}00003\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

Für das Massenträgheitsmoment der Drehscheibe folgt entsprechend Formel 2.11

$$\Delta J_0 = 0{,}0000015\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

2.6 Zusammenfassung und Diskussion

Bei diesem Versuch haben wir folgende Ergebnisse ermittelt:

Statische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Das Direktionsmoment D der Spiralfeder beträgt

$$D = (0{,}01977 \pm 0{,}00008)\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

Dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Das Direktionsmoment D der Spiralfeder beträgt

$$D = (0{,}01819 \pm 0{,}00003)\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

Für das Massenträgheitsmoment J_0 der Schwingplatte ermittelten wir

$$J_0 = (0{,}0002957 \pm 0{,}0000015)\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Dynamische Methode der Schwerpunktbestimmung

Der Massenmittelpunkt des unregelmäßig geformten Körpers liegt um

$$s = 18{,}66\,\mathrm{mm}$$

vom Mittelpunkt der Einsteckzapfen entfernt auf deren Mittelsenkrechten (siehe Abbildung 2.6).

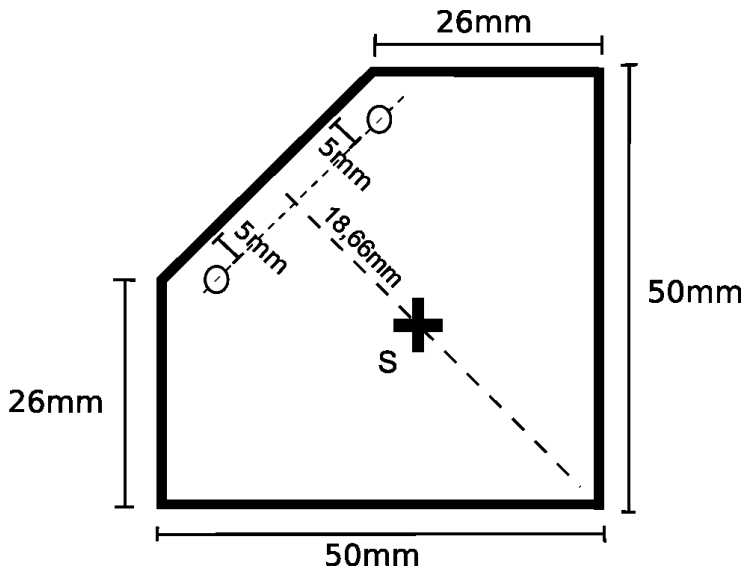


Abbildung 2.6: Skizze des unregelmäßigen Körpers mit ermitteltem Schwerpunkt

Ein Hauptträgheitsmoment J_K des Körpers beträgt

$$J_K = 0{,}0000822\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Auffällig ist die wesentlich höhere Genauigkeit der dynamischen Methode gegenüber der statischen. Dies ist mit der genaueren elektronischen Messung durch die Lichtschranke gegenüber der manuellen Ablesung des Auslenkwinkels mit nur einer Genauigkeit von ca. 1° zu erklären. Außerdem geht die Genauigkeit der Massestücke nicht in die Messung mit ein und zusätzlich wurde die durch die Masse des Fadens erzeugte Gewichtskraft nicht mit berücksichtigt. Weitere Unsicherheiten bringt die schwere Messbarkeit des Durchmessers des Fadens mit sich, da dieser sehr flexibel und dehnbar war. Die Messung der Schwingungsdauer für eine Schwingungsperiode kann als sehr genau angenommen werden, was die kaum vorhandenen Schwankungen auch beweisen. Eine Messung von mehreren Perioden ist nicht sinnvoll, da die Schwingung durch den Reibungswiderstand der Luft sehr schnell stark gedämpft werden würde.

Mittels dieses Versuchs kann also der Satz von Steiner bestätigt werden. Außerdem eignet sich der Versuch gut um den Massenmittelpunkt eines unregelmäßigen Körpers zu bestimmen.

3 W05 - Kondensationswärme des Wasserdampfes

Protokoll zum Versuch W05 am 04. Mai 2006

3.1 Aufgabenstellung

(1.) Die Wärmekapazität eines Kalorimeters ist mindestens zweimal nach der Mischungsmethode zu bestimmen. Die Mischungstemperatur ist durch Extrapolation aus dem Temperatur-Zeit-Diagramm zu ermitteln.

(2.) Mit dem Mischungskalorimeter ist die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes bei Siedetemperatur zu bestimmen. Die Mischungstemperatur ist wieder aus dem Temperatur-Zeit-Diagramm zu ermitteln.

3.2 Grundlagen zum Versuch

3.2.1 Wärmekapazität des Kalorimeters

Die Wärmekapazität K eines Körpers gibt an, wie viel Wärme diesem Körper zugeführt oder entnommen werden muss, um eine Temperaturänderung von 1 K zu erreichen, und ist abhängig von seiner Masse m_s und der spezifischen Wärmekapazität c_s des Stoffes, aus dem er besteht:

$$K = m_s \cdot c_s, \qquad \text{mit } [K] = [m_s] \cdot [c_s] = 1\,\text{kg} \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 1\,\frac{\text{kJ}}{\text{K}}. \tag{3.1}$$

Die Kondensationswärme Q_k bezeichnet die Wärme, die beim Übergang eines Gases in den flüssigen Aggregatzustand (*Kondensation*) frei wird. Sie hängt von der Masse m_v des Gases und der stoffspezifischen Verdampfungswärme q_v ab:

$$Q_k = m_v \cdot q_v, \qquad \text{mit } [Q] = [m_v] \cdot [q_v] = 1\,\text{kg} \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1\,\text{kJ}. \tag{3.2}$$

Um den natürlichen Wärmeaustausch mit der Umgebung möglichst zu unterbinden, wird ein isoliertes Kalorimetergefäß benutzt. Um die auftretende Wärmeabgabe möglichst gering zu halten, wird angenommen, dass der Temperaturausgleich für kurze Zeitintervalle linear verläuft. Durch Extrapolation mittels linearer Regression der aufgenommenen Werte erhält man die Temperatur zum Zeitpunkt des Mischungsvorganges. Da die Mischung bei einem annähernd konstanten Druck stattfindet, wird angenommen, dass es sich dabei um einen isobaren Prozess handelt.

Nach dem Energieerhaltungsatz (siehe [1]) gilt für die Berechnung der Wärmekapazität:

$$\sum Q_{zu} = \sum Q_{ab}. \tag{3.3}$$

Die Wärmeänderung ΔQ berechnet sich als Produkt von Masse m, stoffspezifischer Wärmekapazität c und Temperaturänderung ΔT:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T. \tag{3.4}$$

Die Temperaturänderung ΔT_i einer Wassermenge i sei dabei die Differenz aus der Mischungstemperatur T_M und der Temperatur T_i der Wassermenge i:

$$\Delta T_i = T_M - T_i. \tag{3.5}$$

Die Wärmekapazität des Kalorimeters berechnet sich mittels einer Energiebilanz aus

$$\begin{aligned} Q_{zu} &= -Q_{ab} \\ m_2 \cdot c_2 \cdot \Delta T_2 &= -(m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_1 + K \cdot \Delta T_1) \\ m_2 \cdot c_2 \cdot \Delta T_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_1 &= -K \cdot \Delta T_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die spezifischen Wärmekapazitäten c_1 und c_2 sind dabei gleich der spezifischen Wärmekapazität c_{H_2O} von Wasser:

$$c_1 = c_2 = c_{H_2O} = 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}. \tag{3.7}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} K &= c_{H_2O} \cdot \left(-m_2 \cdot \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} - m_1 \right) \\ K &= -c_{H_2O} \cdot \left(m_2 \cdot \frac{(T_M - T_2)}{(T_M - T_1)} + m_1 \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Indizes 1 bzw. 2 bezeichnen dabei, je nach Versuchsteil, die kältere Wassermenge k bzw. die wärmere Wassermenge w, m_i sei die Masse dieser Wassermenge.

3.2.2 Spezifische Kondensationswärme von Wasserdampf

Bei der Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme des Wasserdampfes bei Siedetemperatur tritt eine Aggregatzustandsänderung auf. Deshalb muss in der Energiebilanz die Kondensationswärme $m_2 \cdot q$ als Produkt aus Masse m_2 des Wasserdampfes mit der Temperatur T_2 und spezifischer Kondensationswärme q berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} Q_{zu} &= Q_{ab} \\ m_2 \cdot c \cdot \Delta T_2 + m_2 \cdot q &= m_1 \cdot c \cdot \Delta T_1 + K \cdot \Delta T_1 \\ q &= \frac{(m_1 \cdot c + K) \cdot \Delta T_1}{m_2} - c \cdot \Delta T_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Messunsicherheiten für eine Größe F ergeben sich aus dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, die Entwicklung für die einzelnen Größen ist in Abschnitt 3.5 zu finden:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial v_i} \right| \cdot \Delta v_i. \tag{3.10}$$

3.3 Versuchsaufbau

3.3.1 Verwendete Geräte

In Abbildung 3.1 sind die verwendeten Geräte in ihrer Anordnung am Experimentierplatz dargestellt.

Diese umfassen Kalorimeter, Rührer, Thermometer, Verbindungsschläuche, Stoppuhr, Heizplatte, Kondensatfänger, Kochbehälter, Waage und Messbecher.

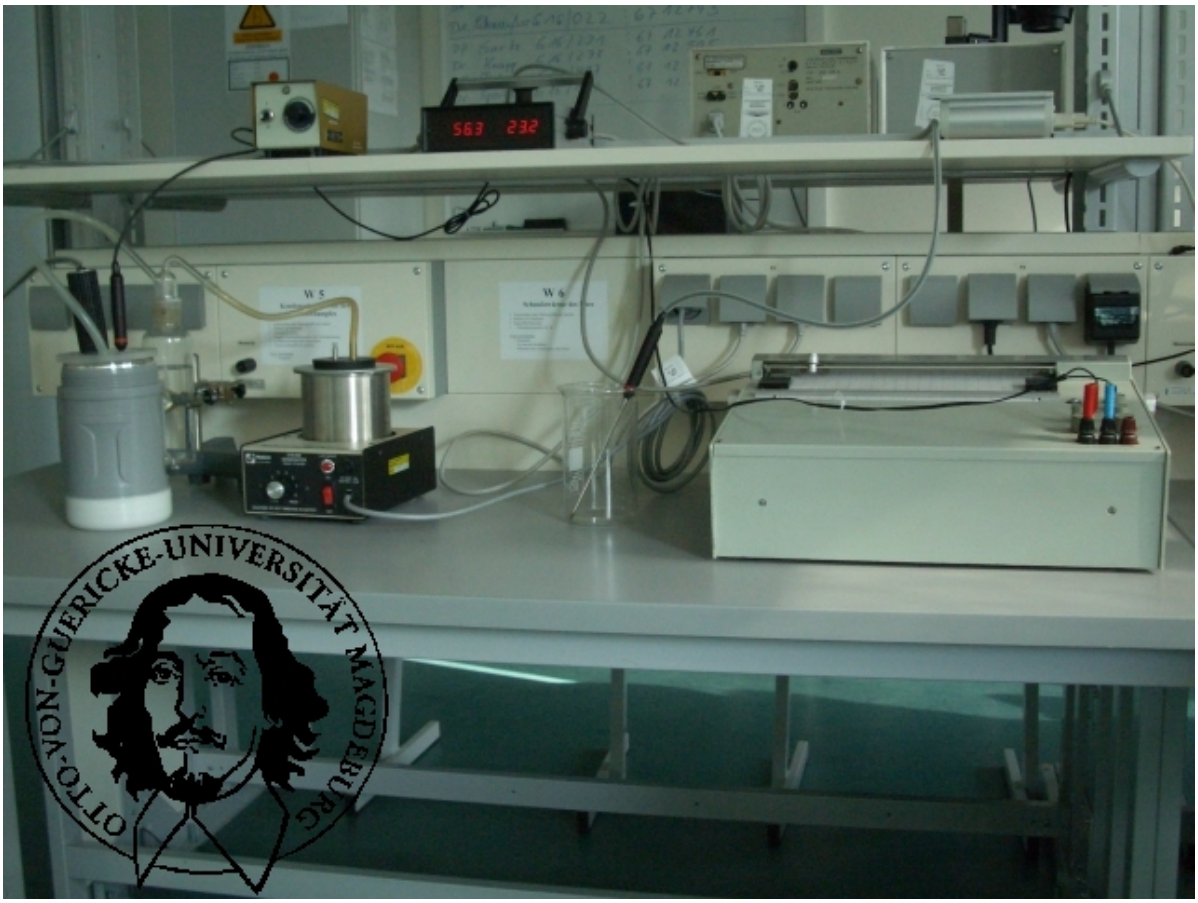


Abbildung 3.1: [5] Versuchsanordnung der Messgeräte am Experimentierplatz

3.3.2 Messgenauigkeiten der verwendeten Geräte

Das Digitaldoppelthermometer besitzt eine Messgenauigkeit von $\Delta T = 0{,}2\,\mathrm{K}$.

Die Messgenauigkeit der Waage der Firma Sartorius beträgt $\Delta m = 0{,}01\,\mathrm{g}$.

3.3.3 Durchführung

Zur Bestimmung der Wärmekapazität K des Kalorimeters in Aufgabenteil (1.) wird die Mischungstemperatur T_M zweier unterschiedlich temperierter Wassermengen ermittelt. Die Masse m_i der beiden Wassermengen, die ungefähr gleich sein sollte, wird bestimmt. Eine der beiden Wassermengen wird mit Hilfe der Heizplatte auf eine Temperatur ϑ_w von $40\,°\mathrm{C} - 60\,°\mathrm{C}$ erwärmt. Die beiden Wassermengen werden in zwei Versuchsdurchführungen miteinander im Kalorimeter vermischt. Beim ersten Versuchsdurchgang wird das warme Wasser in das kalte Wasser ($\vartheta_k \approx 20\,°\mathrm{C}$) gegossen, beim zweiten Versuchsdurchgang wird das kalte Wasser in das erwärmte Wasser gegeben. Mit Hilfe eines Rührers werden die beiden Wassermassen vermischt. Zeitgleich wird die Temperatur im Kalorimeter in kurzen Zeitintervallen von $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$ bestimmt. Nach vollständiger Vermischung wird noch ca. fünf Minuten lang die Temperatur ermittelt, wieder in kurzen Zeitintervallen.

Für Versuchsteil (2.) wird eine bestimmte Menge Wasser in das Kalorimeter gefüllt. Im einem Dampferzeuger wird Wasserdampf erzeugt, so dass der Dampf dem Erzeuger gleichmäßig entströmt. Gleichzeitig wird in kurzen Zeitabständen die Temperatur im Kalorimeter gemessen. Der Wasserdampf wird in das Kalorimeter eingeleitet, bis ein Temperaturunterschied von mindestens 20 K und ein annähernd gleicher Füllstand wie im ersten Versuch erreicht ist. Dann wird der Dampfschlauch entfernt und die Temperatur weiter in regelmäßigen Abständen gemessen. Auch nach dem Ende des Mischvorgangs ist die Temperatur im Kalorimeter weiter zu messen. Die Masse des Wasserdampfes im Kalorimeter ist mittels Differenzenbildung zu bestimmen.

3.4 Messergebnisse

3.4.1 Bestimmung der Wärmekapazität des Kalorimeters

Versuchsdurchführung 1: Zugabe von warmem in kaltes Wasser

Zur Ermittlung der Mischungstemperatur wurde die Temperatur des Mischvorganges über ein Zeitintervall von ca. elf Minuten beobachtet.[1] Die gemessenen Temperaturen sind in Tabelle 3.1 bzw. in Abbildung 3.2 dargestellt.

Tabelle 3.1: Messwerte der 1. Versuchsdurchführung zur Wärmekapazitätsbestimmung

t [min:s]	00:00	00:30	01:00	01:30	02:00	02:30	03:00	03:30	04:00	04:30
ϑ [°C]	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9	23,9
t [min:s]	05:00	05:05	05:10	05:15	05:20	05:25	05:30	05:35	05:40	05:45
ϑ [°C]	23,9	—	35,9	39,8	40,5	40,7	40,7	40,7	40,7	40,7
t [min:s]	05:50	05:55	06:00	06:30	07:00	07:30	08:00	08:30	09:00	09:30
ϑ [°C]	40,7	40,7	40,7	40,6	40,6	40,5	40,5	40,5	40,4	40,4
t [min:s]	10:00	10:30	11:00							
ϑ [°C]	40,4	40,3	40,3							

Aus diesen Werten wurde durch Extrapolation die Mischungstemperatur

$$T_M = 40{,}7\,°\mathrm{C}$$

bestimmt.

[1] Für die Zeit $t = 05{:}05$ konnte wegen Ablesungsschwierigkeiten kein Messwert für die Temperatur ϑ ermittelt werden.

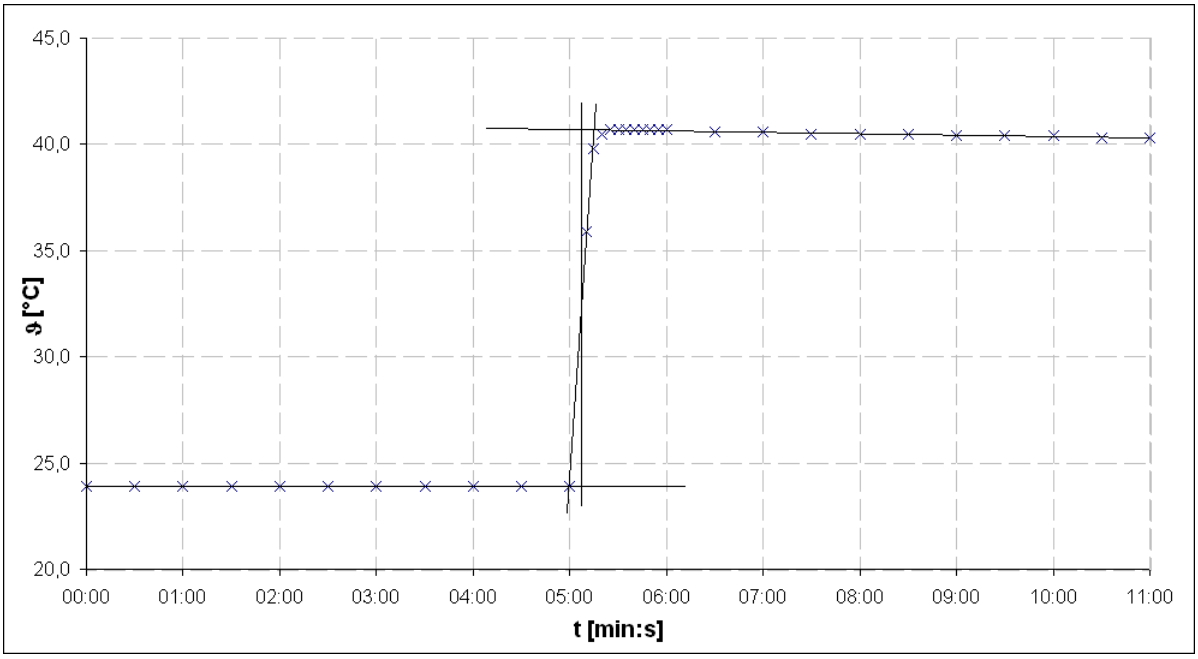


Abbildung 3.2: Versuchsdurchführung 1 zur Wärmekapazitätsbestimmung

Weiterhin wurde bestimmt:

- Masse des kalten Wassers: $m_k = (0{,}25644 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des kalten Wassers: $T_k = (23{,}9 \pm 0{,}2)\,°\mathrm{C}$,
- Masse des warmen Wassers: $m_w = (0{,}25307 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des warmen Wassers: $T_w = (59{,}5 \pm 0{,}2)\,°\mathrm{C}$.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Formel 3.8 erhält man

$$\begin{aligned} K_1 &= -c_{H_2O} \cdot \left(m_w \cdot \frac{(T_M - T_w)}{(T_M - T_k)} + m_k \right) \\ &= -4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot \left(0{,}25307\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(40{,}7\,°\mathrm{C} - 59{,}5\,°\mathrm{C})}{(40{,}7\,°\mathrm{C} - 23{,}9\,°\mathrm{C})} + 0{,}25644\,\mathrm{kg} \right) \\ &= 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} = 112{,}0064\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \end{aligned}$$

Versuchsdurchführung 2: Zugabe von kaltem in warmes Wasser

Zur Ermittlung der Mischungstemperatur wurde die Temperatur des Mischvorganges über ein Zeitintervall von ca. zwölf Minuten beobachtet. Die gemessenen Temperaturen sind in Tabelle 3.2 bzw. in Abbildung 3.3 dargestellt.

Tabelle 3.2: Messwerte der 2. Versuchsdurchführung zur Wärmekapazitätsbestimmung

t [min:s]	00:00	00:30	01:00	01:30	02:00	02:30	03:00	03:30	04:00	04:30
ϑ [°C]	67,7	67,3	66,8	66,4	66,2	65,9	65,7	65,5	65,3	65,1
t [min:s]	05:00	05:05	05:10	05:15	05:20	05:25	05:30	05:35	05:40	05:45
ϑ [°C]	64,9	52,8	46,6	45,5	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3
t [min:s]	05:50	05:55	06:00	06:30	07:00	07:30	08:00	08:30	09:00	09:30
ϑ [°C]	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3	45,2	45,2	45,2
t [min:s]	10:00	10:30	11:00	11:30						
ϑ [°C]	45,2	45,2	45,1	45,1						

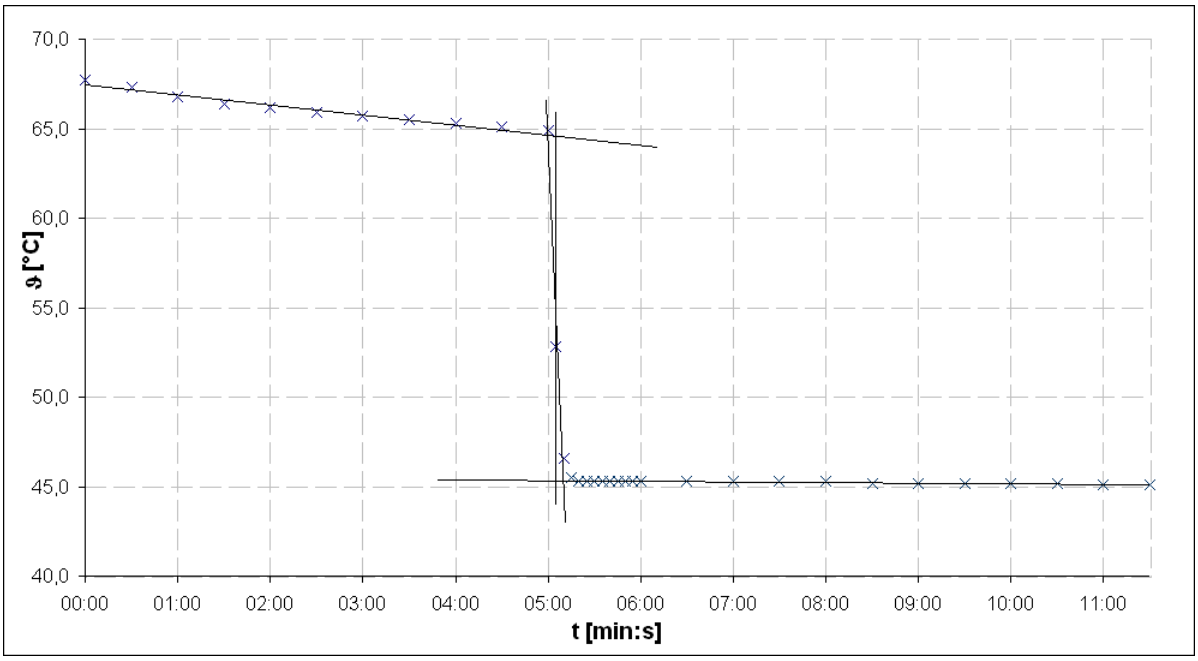


Abbildung 3.3: Versuchsdurchführung 2 zur Wärmekapazitätsbestimmung

Aus diesen Werten wurde durch Extrapolation die Mischungstemperatur

$$T_M = 45{,}4\,^\circ\mathrm{C}$$

bestimmt.

Weiterhin wurde bestimmt:

- Masse des kalten Wassers: $m_k = (0{,}24964 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des kalten Wassers: $T_k = (23{,}2 \pm 0{,}2)\,^\circ\mathrm{C}$,
- Masse des warmen Wassers: $m_w = (0{,}26480 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des warmen Wassers: $T_w = (64{,}7 \pm 0{,}2)\,^\circ\mathrm{C}$.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Formel 3.8 erhält man

$$\begin{aligned} K_2 &= -c_{H_2O} \cdot \left(m_k \cdot \frac{(T_M - T_k)}{(T_M - T_w)} + m_w \right) \\ &= -4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot \left(0{,}24964\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}2\,^\circ\mathrm{C})}{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 64{,}7\,^\circ\mathrm{C})} + 0{,}26480\,\mathrm{kg} \right) \\ &= 0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} = 93{,}5599\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \end{aligned}$$

3.4.2 Bestimmung der Verdampfungswärme von Wasserdampf

Diese ermittelten Werte für die Wärmekapazität K_1 und K_1 des Kalorimeters können jetzt zur Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme q des Wasserdampfes genutzt werden. Dazu wurde zunächst entsprechend der Durchführungsanleitung (siehe Abschnitt 3.3.3) eine Messreihe für die Temperatur aufgenommen. Die dabei gemessenen Werte sind in Tabelle 3.3 bzw. in Abbildung 3.4 dargestellt.

Aus diesen Werten wurde durch Extrapolation die Mischungstemperatur

$$T_M = 50{,}3\,^\circ\mathrm{C}$$

bestimmt.

Tabelle 3.3: Messwerte der Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme

t [min:s]	00:00	00:20	00:40	01:00	01:20	01:40	02:00	02:20	02:40	03:00
ϑ [°C]	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8
t [min:s]	03:20	03:40	04:00	04:20	04:40	05:00	05:20	05:40	06:00	06:20
ϑ [°C]	21,8	21,8	21,8	21,8	21,8	22,0	23,5	25,9	28,7	32,0
t [min:s]	06:40	07:00	07:20	07:40	08:00	08:20	08:40	09:00	09:20	09:40
ϑ [°C]	35,0	38,3	41,6	44,8	48,0	50,0	50,2	50,3	50,4	50,4
t [min:s]	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00	12:20	12:40	13:00
ϑ [°C]	50,5	50,5	50,5	50,6	50,6	50,6	50,6	50,6	50,6	50,6
t [min:s]	13:20	13:40	14:00	14:20	14:40	15:00				
ϑ [°C]	50,6	50,6	50,6	50,6	50,6	50,6				

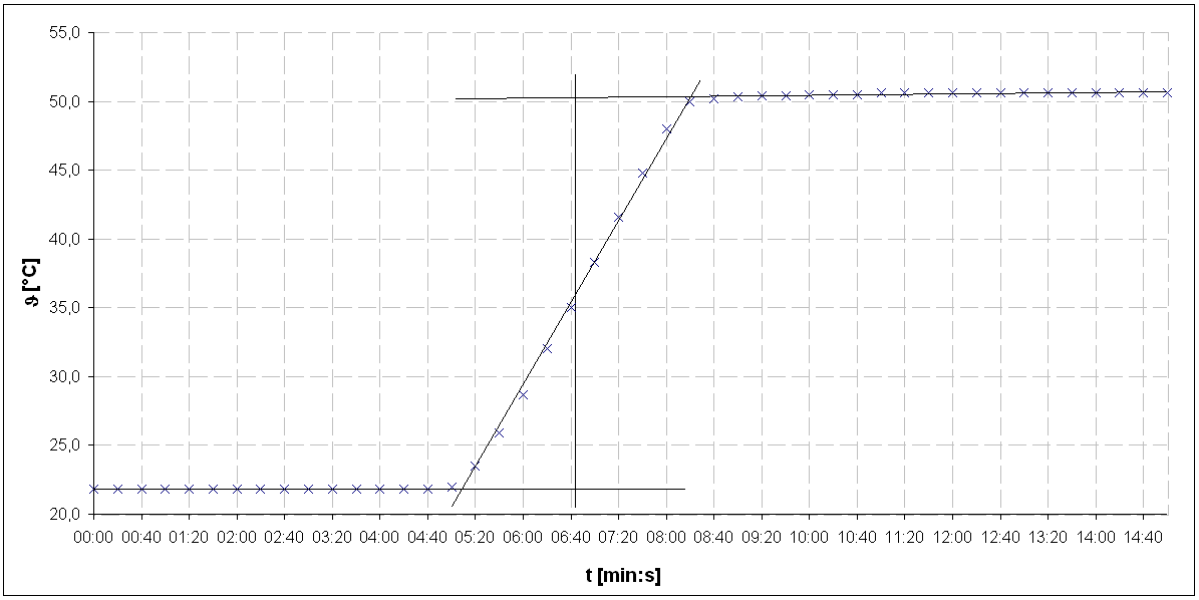


Abbildung 3.4: Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme

Weiterhin wurde bestimmt:

- Masse des kalten Wassers: $m_k = (0{,}39551 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des kalten Wassers: $T_k = (21{,}8 \pm 0{,}2)\,°\mathrm{C}$,

- Masse des Dampfes: $m_D = (0{,}02280 \pm 0{,}00001)\,\mathrm{kg}$,
- Temperatur des Dampfes: $T_D = (100{,}0 \pm 0{,}2)\,^\circ\mathrm{C}$.

Durch Einsetzen dieser Werte und mit den in Teilaufgabe (1.) ermittelten Wärmekapazitäten des Kalorimeters (siehe Abschnitt 3.4.1) in die Formel 3.9 erhält man zunächst

$$q_i = \frac{(m_k \cdot c_{H_2O} + K_i) \cdot (T_M - T_k)}{m_D} - c_{H_2O} \cdot (T_M - T_D).$$

Für $K_1 = 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(0{,}39551\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} + 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}) \cdot (50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}} \\ &\quad - 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \cdot (50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 100{,}0\,^\circ\mathrm{C}) \\ &= 2417{,}5582\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = 2{,}4175582\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} \end{aligned}$$

und für $K_2 = 0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}$ folgt

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{(0{,}39551\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} + 0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}) \cdot (50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}} \\ &\quad - 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \cdot (50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 100{,}0\,^\circ\mathrm{C}) \\ &= 2394{,}5002\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = 2{,}3945002\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}. \end{aligned}$$

3.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

Da für die einzelnen Größen nur Einzelmessungen vorgenommen wurden, kann der Fehler nur mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes aus den systematischen Fehlern abgeschätzt werden.

Aus den Formeln 3.10 und 3.8 ergibt sich die Messunsicherheit ΔK der Wärmekapazität K zu

$$\begin{aligned}\Delta K &= \left|\frac{\partial K}{\partial m_1}\right| \cdot \Delta m_1 + \left|\frac{\partial K}{\partial m_2}\right| \cdot \Delta m_2 + \left|\frac{\partial K}{\partial T_1}\right| \cdot \Delta T_1 + \left|\frac{\partial K}{\partial T_2}\right| \cdot \Delta T_2 + \left|\frac{\partial K}{\partial T_M}\right| \cdot \Delta T_M \\ &= |-c_{H_2o}| \cdot \Delta m_1 + \left|-c_{H_2o} \cdot \frac{(T_M - T_2)}{(T_M - T_1)}\right| \cdot \Delta m_2 + \left|-c_{H_2o} \cdot m_2 \cdot \frac{(T_M - T_2)}{(T_M - T_1)^2}\right| \cdot \Delta T_1 \\ &\quad + \left|\frac{c_{H_2o} \cdot m_2}{(T_M - T_1)}\right| \cdot \Delta T_2 + \left|c_{H_2o} \cdot m_2 \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{(T_M - T_1)^2}\right| \cdot \Delta T_M\end{aligned}$$

Mit den in Abschnitt 3.3.2 genannten Messungenauigkeiten der Geräte ergibt sich für $K_1 = 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}$ eine Ungenauigkeit ΔK_1 von

$$\begin{aligned}\Delta K_1 &= \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} + \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot \frac{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 59{,}5\,^\circ\mathrm{C})}{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}9\,^\circ\mathrm{C})}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} \\ &\quad + \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}25307\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 59{,}5\,^\circ\mathrm{C})}{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}9\,^\circ\mathrm{C})^2}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &\quad + \left|\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}25307\,\mathrm{kg}}{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}9\,^\circ\mathrm{C})}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &\quad + \left|4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}25307\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(23{,}9\,^\circ\mathrm{C} - 59{,}5\,^\circ\mathrm{C})}{(40{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}9\,^\circ\mathrm{C})^2}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &= 0{,}0535367\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} = 53{,}5367\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.\end{aligned}$$

und für $K_2 = 0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}$ eine Ungenauigkeit ΔK_2 von

$$\begin{aligned}\Delta K_2 &= \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} + \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot \frac{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}2\,^\circ\mathrm{C})}{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 64{,}7\,^\circ\mathrm{C})}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} \\ &\quad + \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}24964\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}2\,^\circ\mathrm{C})}{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 64{,}7\,^\circ\mathrm{C})^2}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &\quad + \left|\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}24964\,\mathrm{kg}}{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 64{,}7\,^\circ\mathrm{C})}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &\quad + \left|4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}24964\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(64{,}7\,^\circ\mathrm{C} - 23{,}2\,^\circ\mathrm{C})}{(45{,}4\,^\circ\mathrm{C} - 64{,}7\,^\circ\mathrm{C})^2}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\ &= 0{,}0466601\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} = 46{,}6601\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich aus den Formeln 3.10 und 3.9 die Messunsicherheit Δq der spezifischen Kondensationswärme q

$$
\begin{aligned}
\Delta q_i = &\left|\frac{\partial q_i}{\partial m_k}\right| \cdot \Delta m_k + \left|\frac{\partial q_i}{\partial m_D}\right| \cdot \Delta m_D + \left|\frac{\partial q_i}{\partial K_i}\right| \cdot \Delta K_i \\
&+ \left|\frac{\partial q_i}{\partial T_k}\right| \cdot \Delta T_k + \left|\frac{\partial q_i}{\partial T_D}\right| \cdot \Delta T_D + \left|\frac{\partial q_i}{\partial T_M}\right| \cdot \Delta T_M \\
= &\left|c_{H_2O} \cdot \frac{T_M - T_k}{m_D}\right| \cdot \Delta m_k + \left|\frac{-(c_{H_2O} \cdot m_k + K_i) \cdot (T_M - T_k)}{{m_D}^2}\right| \cdot \Delta m_D \\
&+ \left|\frac{T_M - T_k}{m_D}\right| \cdot \Delta K_i + \left|-\frac{c_{H_2O} \cdot m_k + K_i}{m_D}\right| \cdot \Delta T_k + |-c_{H_2O}| \cdot \Delta T_D \\
&+ \left|\frac{c_{H_2O} \cdot m_k + K_i}{m_D} + c_{H_2O}\right| \cdot \Delta T_M
\end{aligned}
$$

Mit den ermittelten Werten des Versuchs ergeben sich für die spezifische Kondensationswärme q die Ungenauigkeiten Δq_1

$$
\begin{aligned}
\Delta q_1 = &\left|4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot \frac{(50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} \\
&+ \left|\frac{-(4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg} + 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}) \cdot (50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{(0{,}02280\,\mathrm{kg})^2}\right| \cdot 0{,}01\,\mathrm{g} \\
&+ \left|\frac{(50{,}3\,^\circ\mathrm{C} - 21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right| \cdot 0{,}0535367\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} \\
&+ \left|-\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg} + 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\
&+ \left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\
&+ \left|\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg} + 0{,}1120064\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}}{0{,}02280\,\mathrm{kg}} + 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\right| \cdot 0{,}2\,\mathrm{K} \\
= &\ 100{,}6274\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}
\end{aligned}
$$

bzw. Δq_2

$$
\begin{aligned}
\Delta q_2 = &\left|4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot\frac{(50{,}3\,^\circ\mathrm{C}-21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right|\cdot 0{,}01\,\mathrm{g}\\
&+\left|\frac{-(4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg}+0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}})\cdot(50{,}3\,^\circ\mathrm{C}-21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{(0{,}02280\,\mathrm{kg})^2}\right|\cdot 0{,}01\,\mathrm{g}\\
&+\left|\frac{(50{,}3\,^\circ\mathrm{C}-21{,}8\,^\circ\mathrm{C})}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right|\cdot 0{,}0466601\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}\\
&+\left|-\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg}+0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}\right|\cdot 0{,}2\,\mathrm{K}\\
&+\left|-4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right|\cdot 0{,}2\,\mathrm{K}\\
&+\left|\frac{4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot 0{,}39551\,\mathrm{kg}+0{,}0935599\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}}{0{,}02280\,\mathrm{kg}}+4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right|\cdot 0{,}2\,\mathrm{K}\\
=\ & 91{,}6979\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}.
\end{aligned}
$$

3.6 Zusammenfassung und Diskussion

Die Berechnung der Wärmekapazität K des Kalorimeters ergab

$$K_1 = (112{,}0 \pm 53{,}5)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

und

$$K_2 = (93{,}6 \pm 46{,}7)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.$$

Die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes bei Siedetemperatur beträgt

$$q_1 = (2417{,}6 \pm 100{,}6)\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

bzw.

$$q_2 = (2394{,}5 \pm 91{,}7)\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}.$$

Als Näherung dient das arithmetische Mittel der beiden ermittelten Werte, so dass sich aus unseren Messungen

$$q = 2406{,}0\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

ergibt.

Die ermittelten Werte weichen etwas vom in der Fachliteratur angegeben Wert $q = 2260\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ für die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes ab, sind aber trotzdem noch eine gute Näherung. Dies könnte unter anderem daran liegen, dass das Kalorimeter kein völlig isoliertes Gefäß darstellte, da an beispielsweise der Deckel nicht besonders gut isoliert war und durch die kleinen Undichtheiten an der Deckelauflage Wasserdampf austreten konnte. Da außerdem die Wärmekapazität des eingefüllten Wassers im Vergleich zur Wärmekapazität des Kalorimeters relativ groß ist, ergeben schon kleine Messungenauigkeiten einen relativ großen Fehler im Endergebnis. Weitere Abweichungen können durch die Annahme, dass der Wasserdampf eine Temperatur von 60 °C besitzt, begründet sein.

4 E12 - Elektronen im Magnetfeld

Protokoll zum Versuch E12 am 18. Mai 2006

4.1 Aufgabenstellung

Aus dem Krümmungsradius der Elektronenbahn in einem homogenen Magnetfeld ist die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ des Elektrons zu bestimmen.

(1.) Die Auslenkung des Elektronenstrahls auf dem Leuchtschirm einer Oszillographenröhre ist in Abhängigkeit von der Stärke des Stroms durch die magnetfelderzeugenden Spulen bei drei unterschiedlichen Anodenspannungen U_A zu messen.

(2.) Aus der Auslenkung ist der Krümmungsradius r der Elektronenbahn, aus dem Spulenstrom ist die magnetische Induktion B zu berechnen.

(3.) $\frac{1}{r}$ ist als Funktion der Induktion B graphisch darzustellen. Die spezifische Elektronenladung $\frac{e}{m}$ ist durch lineare Regression zu bestimmen.

4.2 Grundlagen zum Versuch

Wenn die Temperatur eines Leiters im Vakuum stark erhöht wird, können die Leiterelektronen genug Energie aufnehmen, um aus dem Leiter auszutreten. Dieser Vorgang, die Glühemission, wird in einer Elektronenstrahlröhre (siehe Abbildung 4.2) ausgenutzt. Durch eine von einer Anode und einer Kathode erzeugte elektrische Kraft werden diese Elektronen weiter beschleunigt. Die Austrittsgeschwindigkeit v der Elektronen ergibt sich nach Umstellen einer Energiebilanz aus

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_A}{m_e}}, \tag{4.1}$$

wobei e die Ladung und m_e die Masse eines Elektrons und U_A die Anodenspannung der Elektronenstrahlröhre sei.

Senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen wirkt ein weitgehend homogenes Magnetfeld der Induktion B. Daher wirkt auf die Elektronen die Lorentz-Kraft F_L, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zum magnetischen Feld gerichtet ist:

$$F_L = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \tag{4.2}$$

Durch die stets senkrechte Richtung der Lorentz-Kraft zur Bahntangente beschreiben die Elektronen nach ihrer Freisetzung ins Magnetfeld eine Kreisbahn mit dem Krümmungsradius r. Sie trefen auf einen im Abstand l platzierten Auffangschirm, an dem ihre Auslenkung h gemessen werden kann, mit der Krümmungsradius bestimmt werden kann (siehe Abbildung 4.1):

$$r = \frac{h^2 + l^2}{2 \cdot h}. \tag{4.3}$$

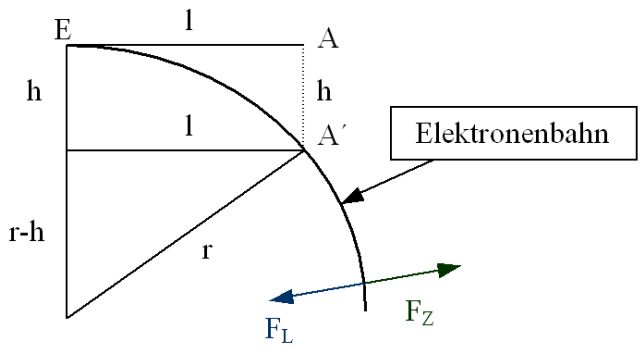


Abbildung 4.1: Herleitung der Berechnung des Krümmungsradius

Die magnetische Flussdichte B des von einem HELMHOLTZ-Spulenpaar erzeugten Magnetfeldes ergibt sich aus der Windungszahl N, der Stromstärke I und dem Spulenradius r_S, der gleichzeitig auch Abstand der zwei Spulen ist:

$$B = \frac{8 \cdot \mu_0}{\sqrt{125}} \cdot \frac{N \cdot I}{r_S}. \tag{4.4}$$

Die magnetische Feldkonstante μ_0 beträgt nach [1] $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$.

Die spezifische Ladung $\frac{e}{m_e}$ ergibt sich durch Gleichsetzen der LORENTZ-Kraft und der ihr entgegen wirkenden Zentrifugalkraft, also $F_Z = F_L$:

$$e \cdot v \cdot B = \frac{m_e \cdot v^2}{r}. \tag{4.5}$$

Mit Formel 4.1 ergibt sich dann für $\frac{e}{m_e}$:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2 \cdot U_A}{B^2 \cdot r^2}, \tag{4.6}$$

wobei der Radius r aus Formel 4.3 und die Induktion B mit Formel 4.4 bestimmt werden.

Aus der Abhängigkeit $\frac{1}{r} = \mathrm{f}(B)$ wird die spezifische Ladung $\frac{e}{m_e}$ mittels linearer Regression[1] ermittelt.

4.3 Versuchsaufbau

In Abbildung 4.3 sind die verwendeten Geräte dargestellt, eine schematische Darstellung der Elektronenstrahlröhre findet sich in Abbildung 4.2.

[1] Die Formeln für die lineare Regression werden hier nicht angegeben. Diese sind ggf. in Kapitel 1.2 des Versuchs M01 in diesem Protokollbuch nachzulesen.

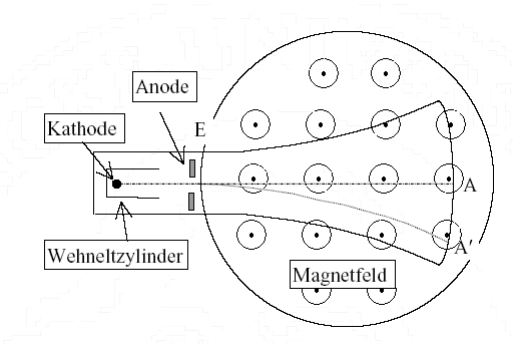


Abbildung 4.2: schematische Darstellung der Elektronenstrahlröhre

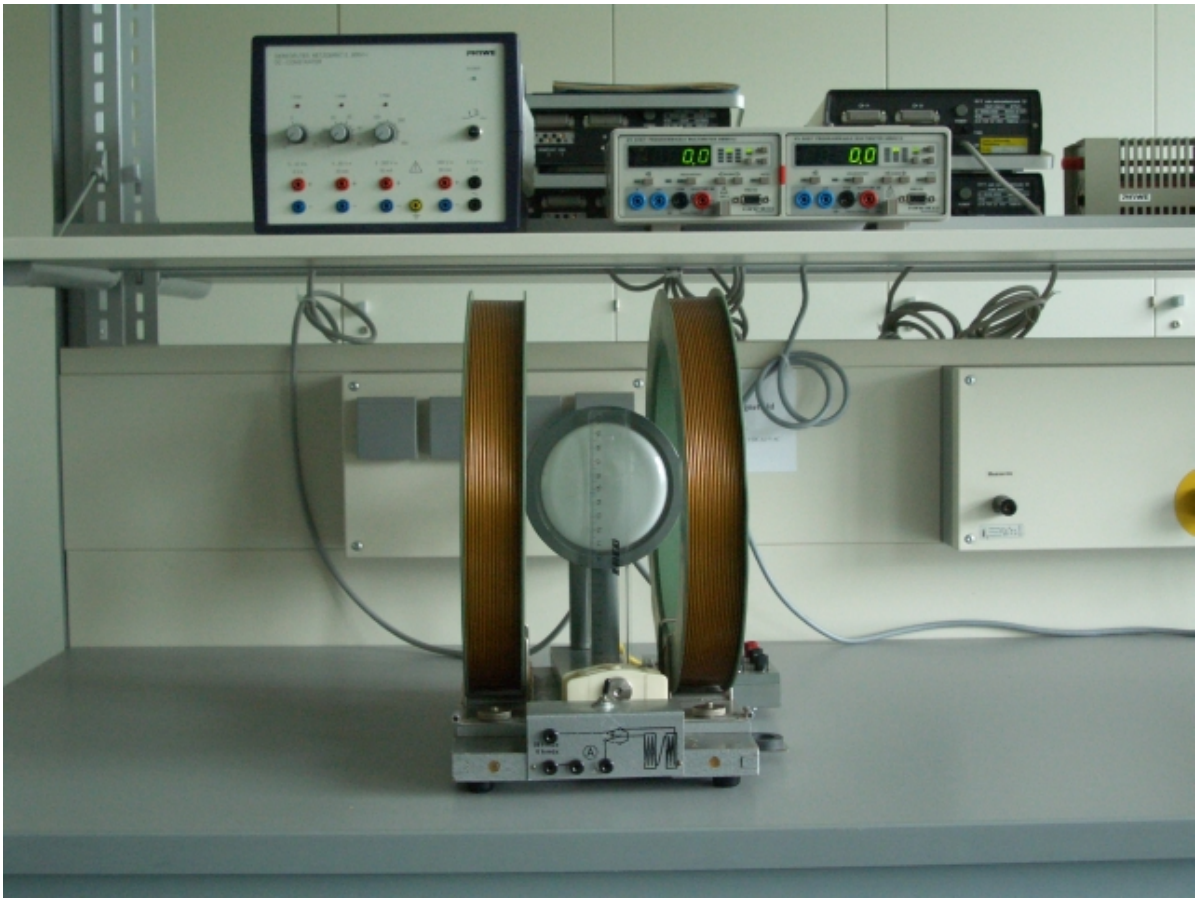


Abbildung 4.3: [5] Helmholtz-Spulenpaar mit Elektronenstrahlröhre

4.4 Messergebnisse

4.4.1 Geometrie der Spule

Für diesen Versuch wurden bei drei Anodenspannung U_A je zehn Spulenströme I zur Erregung eines Magnetfeldes der Induktion B eingestellt. Für jede Stromstärke und Anodenspannung wurde die Auslenkung h des Elektronenstrahls gemessen und daraus nach Formel 4.3 der Krümmungsradius des Elektronenstrahls berechnet. Die HELMHOLTZ-Spulen hatten

$$N = 240$$

Windungen und einen mittleren Radius von

$$r_S = 132{,}5\,\mathrm{mm}.$$

Der Abstand von Anode zu Fangschirm beträgt

$$l = 151\,\mathrm{mm}.$$

4.4.2 Ablenkung und Radius

Die Messergebnisse sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Die Abhängigkeit $\frac{1}{r} = \mathrm{f}(B)$ und entsprechende Regressionsgeraden sind in Diagramm 4.4 dargestellt.

Tabelle 4.1: Messergebnisse für Auslenkung und Stromstärke

U_A [V]		260			280			300		
I [mA]	B [μT]	h [mm]	r [mm]	$\frac{1}{r}$ [$\frac{1}{\mathrm{m}}$]	h [mm]	r [mm]	$\frac{1}{r}$ [$\frac{1}{\mathrm{m}}$]	h [mm]	r [mm]	$\frac{1}{r}$ [$\frac{1}{\mathrm{m}}$]
10,0	16,29	4,0	2852,1	0,35	3,5	3259,0	0,31	3,5	3259,0	0,31
20,0	32,57	7,0	1632,1	0,61	7,0	1632,1	0,61	7,0	1632,1	0,61
30,0	48,86	10,5	1091,0	0,92	10,0	1145,1	0,87	10,0	1145,1	0,87
40,0	65,15	14,0	821,3	1,22	13,5	851,2	1,18	13,5	851,2	1,18
50,0	81,43	17,5	660,2	1,52	17,0	679,1	1,47	17,0	679,1	1,47
60,0	97,72	21,5	541,0	1,85	20,5	566,4	1,77	20,0	580,0	1,72
70,0	114,01	25,0	468,5	2,13	24,0	487,0	2,05	23,5	496,9	2,01
80,0	130,30	28,5	414,3	2,41	28,0	421,2	2,37	27,0	435,7	2,30
90,0	146,58	32,5	367,0	2,73	31,5	377,7	2,65	30,5	389,0	2,57
100,0	162,87	36,0	334,7	2,99	35,0	343,2	2,91	34,0	352,3	2,84

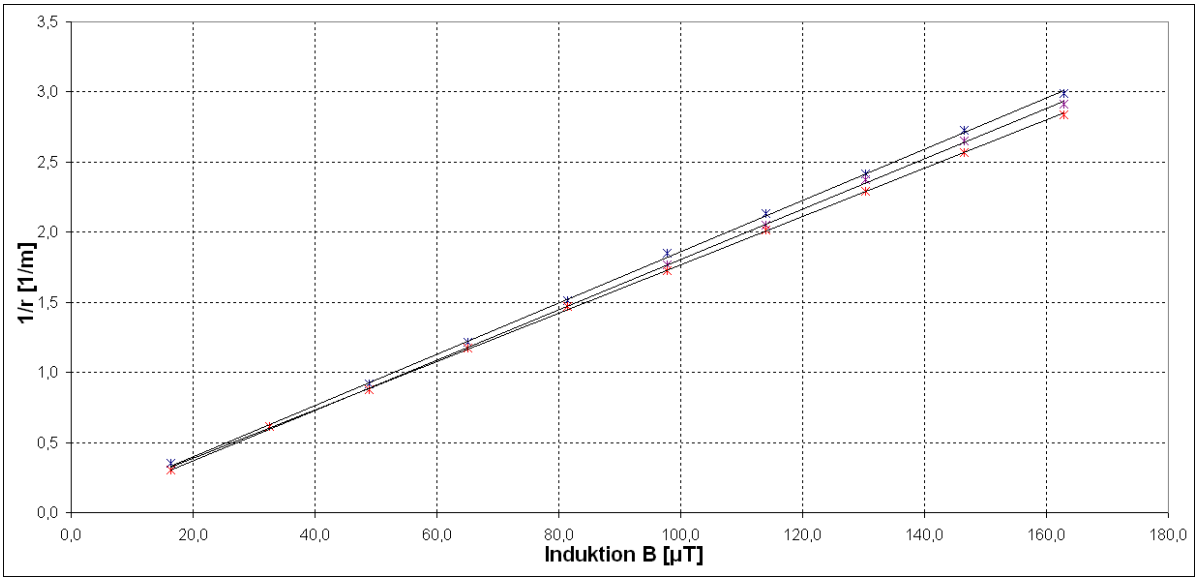


Abbildung 4.4: Abhängigkeit $\frac{1}{r} = \mathrm{f}(B)$ und entsprechende Regressionsgeraden

Für die einzelnen Messreihen ergibt sich nach der Regression für $\frac{e}{m_e}$:

- Messreihe $U_A = 260\,\mathrm{V}$: $\frac{e}{m_e} = 1{,}795 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$
- Messreihe $U_A = 280\,\mathrm{V}$: $\frac{e}{m_e} = 1{,}823 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$
- Messreihe $U_A = 300\,\mathrm{V}$: $\frac{e}{m_e} = 1{,}864 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$.

Als Näherung für den Wert von $\frac{e}{m_e}$ dient das arithmetische Mittel, so dass sich aus unseren Messungen

$$\frac{e}{m_e} = 1{,}827\overline{3} \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

ergibt.

4.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

Mittels [6] wurde für jede Messreihe die mittlere Abweichung bestimmt:

- Messreihe $U_A = 260\,\mathrm{V}$: $\Delta\frac{e}{m_e} = 0{,}007 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$
- Messreihe $U_A = 280\,\mathrm{V}$: $\Delta\frac{e}{m_e} = 0{,}005 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$
- Messreihe $U_A = 300\,\mathrm{V}$: $\Delta\frac{e}{m_e} = 0{,}008 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$.

Als Wert für die mittlere Abweichung muss der größte Wert genommen werden. Die mittlere Abweichung von $\frac{e}{m_e}$ beträgt

$$\Delta\frac{e}{m_e} = 0{,}008 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

4.6 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir die spezifische Ladung $\frac{e}{m_e}$ mit

$$\frac{e}{m_e} = (1{,}827\overline{3} \pm 0{,}008)\ \cdot\ 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

bestimmt.

Dies entspricht gut dem in Tabellenbüchern verzeichneten Wert $\frac{e}{m_e} = 1{,}7588 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$.

Die dennoch vorhandene Abweichung hat mehrere Ursachen. Hauptgrund ist das verwendete Plastelineal, welches nur sehr ungenau (auf 1 mm) ablesbar war und eine Messungenauigkeit von fast $\pm 1\,\mathrm{mm}$ hat. Außerdem hat die Krümmung des Fangschirmes der Elektronenstrahlröhre einen Einfluss auf die Messungenauigkeit. Da der Lichtpunkt des Elektronenstrahls relativ groß ist und breit streut, gestaltete sich die Messung manchmal schwierig. Dadurch war auch der Nullpunkt nur schwer bestimmbar. Durch Spannungsschwankungen der Anodenspannung von einigen Volt waren die Elektronen teilweise unterschiedlich schnell, allerdings ist diese Messunsicherheit sehr gering. Durch die Annahme, dass die Elektronen die Kathode mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 0$ verließen, kommt eine weitere mögliche Fehlerquelle dazu. Außerdem war das durch die Helmholtz-Spulen erzeugte Magnetfeld nicht ganz homogen bzw. durch Spannungsschwankungen nicht konstant homogen. Durch ein besseres Messinstrument zur Bestimmung der Auslenkung des Strahls könnte das Ergebnis noch wesentlich verbessert werden.

5 M08 - Pendelschwingungen

Protokoll zum Versuch M08 am 15. Juni 2006

5.1 Aufgabenstellung

(1.) Die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels ist bei mindestens sechs unterschiedlichen Pendellängen l zu messen, die Funktion $T^2 = \mathrm{f}(l)$ ist graphisch darzustellen, die Schwerebeschleunigung g ist durch lineare Regression zu ermitteln.

(2.) Die Abhängigkeit der Periodendauern T_A und T_B der Schwingungen eines physikalischen Pendels (*Reversionspendels*) um seine beiden möglichen Drehachsen A und B vom Abstand x des Laufgewichts von einer der Drehachsen ist aufzunehmen und graphisch darzustellen. Daraus ist die Schwingungsdauer T zu ermitteln, für die der Achsabstand der reduzierten Pendellänge entspricht.

(3.) Aus der auf Amplitudenabhängigkeit korrigierten Schwingungsdauer T des Reversionspendels und der reduzierten Pendellänge ist die Schwerebeschleunigung g zu berechnen.

5.2 Grundlagen zum Versuch

Grundlegend für die Bearbeitung des Versuchs ist das Modell des mathematischen Pendels. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Fadenlänge l wesentlich länger ist als die Auslenkung φ. Außerdem sei die Fadenmasse m_F wesentlich kleiner als die Masse m_G des angehängten Gewichtes, da das Modell des mathematischen Pendels darauf basiert, dass die Masse m des Pendels in einem Massepunkt, dem Schwerpunkt S, konzentriert ist. Für die Schwingungsdauer T des Modells gilt dann nach [1]:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.1}$$

bzw. für die Schwerebeschleunigung g

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}. \tag{5.2}$$

Für das im zweiten Teil des Versuchs verwendete Reversionspendel ist das Modell des mathematischen Pendels nicht mehr geeignet. Daher wird zur Berechnung das Modell des physikalischen Pendels angewendet, also das Modell eines ausgedehnten, starren Körpers, welcher nicht an seinem Schwerpunkt aufgehängt ist. Mit dem Massenträgheitsmoment J des Pendels, seiner Masse m und dem Abstand s des Schwingungsmittelpunktes vom Drehpunkt des Pendels gilt dann für die Schwingungsdauer T:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}}. \tag{5.3}$$

Für die reduzierte Pendellänge l_r ist die Periodendauer eines Reversionspendels genauso groß wie die Periodendauer eines gleichlangen mathematischen Pendels. Aus den Formeln 5.1 und 5.3 folgt dann für l_r:

$$l_r = \frac{J}{m \cdot s}. \tag{5.4}$$

Mit Hilfe des Satzes von Steiner kann bewiesen werden, dass die Periodendauer bei einer Vertauschung des Schwingungsmittelpunktes mit dem Drehpunkt gleich bleibt.

Da die genannten Formeln für die Schwingungsdauern nur für harmonische Schwingungen gelten, im Versuch aber durch Luft- und Lagerreibung gedämpfte Schwingungen auftreten,

müssen die gemessenen Schwingungsdauern korrigiert werden. Aus einem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung ergibt sich nach [1]:

$$T(\varphi_0) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{16}{\varphi_0}^2 + \frac{11}{3072}{\varphi_0}^2 + \dots\right). \tag{5.5}$$

5.3 Versuchsaufbau

In Abbildung 5.1 sind das Faden- und das Reversionspendel abgebildet.

Abbildung 5.1: [5] Faden- und Reversionspendel

5.4 Messergebnisse

5.4.1 Messung mittels Fadenpendel

Für den ersten Versuchsteil wurden sechs verschiedene Pendellängen l eingestellt, bei denen jeweils drei Mal die Dauer von zehn Periodendauern mittels einer Stoppuhr gemessen wurde. Der aus diesen, in Tabelle 5.1 dargestellten, Messwerten berechnete Mittelwert wurde quadriert und die Abhängigkeit $T^2 = \mathrm{f}(l)$ in Diagramm 5.2 dargestellt.

Tabelle 5.1: Messergebnisse für das Fadenpendel

l [m]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	$\overline{T}$ [s]	$\overline{T}^2$ [s^2]
0,5	1,44	1,44	1,43	1,43	2,06
0,7	1,69	1,69	1,68	1,69	2,85
0,9	1,90	1,90	1,91	1,90	3,62
1,1	2,11	2,11	2,11	2,11	4,45
1,3	2,29	2,29	2,28	2,29	5,23
1,5	2,45	2,46	2,45	2,45	6,01

Mittels [6] wurde durch lineare Regression die Schwerebeschleunigung g

$$g = 9{,}79892\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

bestimmt.

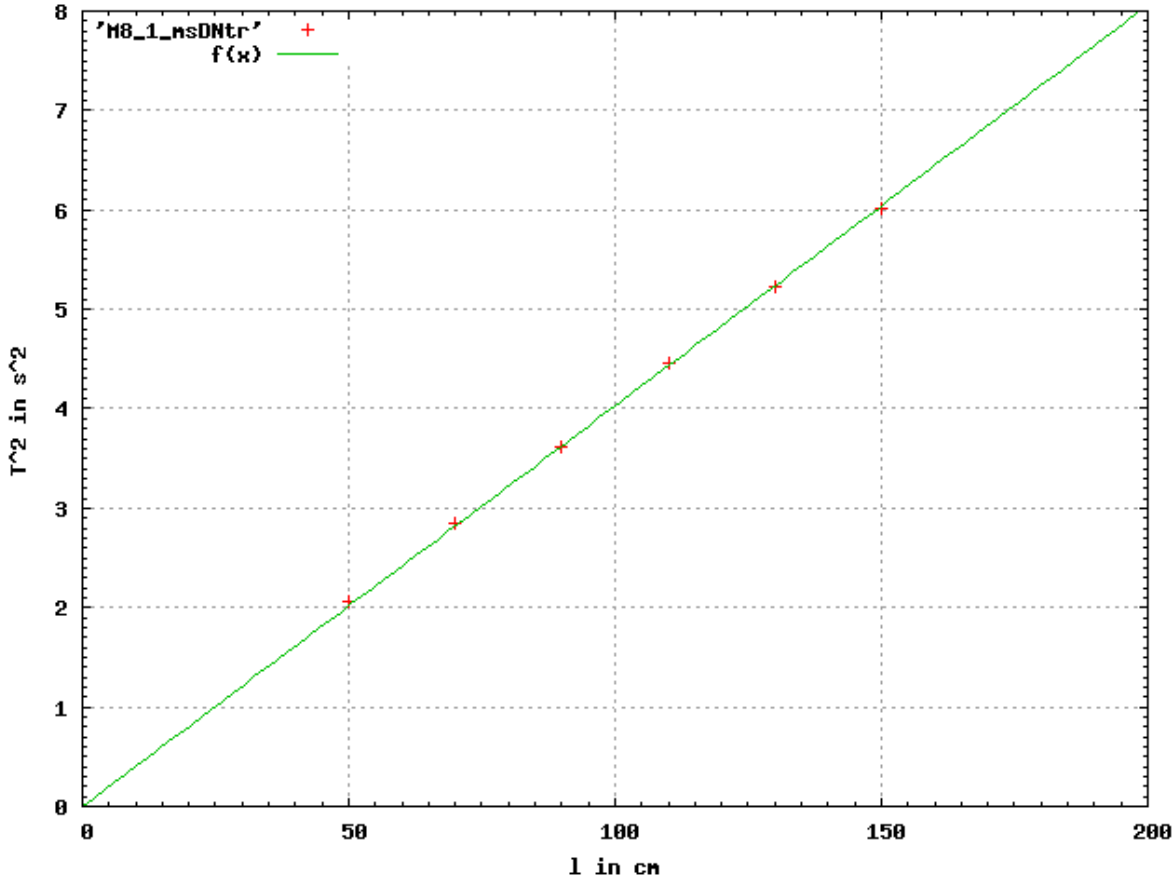


Abbildung 5.2: Abhängigkeit $T^2 = \mathrm{f}(l)$ und entsprechende Regressionsgerade

5.4.2 Messung mittels Reversionspendel

Für den zweiten Versuchsteil wurden mittels eines Digitalzählers der Firma Phywe die beiden Periodendauern T_A und T_B der Schwingungen um die beiden Schneiden A bzw. B des Reversionspendels für verschiedene Entfernungen l des Laufgewichts von der Schneide A gemessen. Diese sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Im unteren Teil der Tabelle finden sich dabei weitere Messwerte für Abstände von der Schneide A, in deren näherer Umgebung sich die Graphen der Funktionen $T_\mathrm{A} = \mathrm{f}(l)$ und $T_\mathrm{B} = \mathrm{f}(l)$ schneiden. Diese Abhängigkeiten sind in Diagramm 5.3 dargestellt.

Tabelle 5.2: Messergebnisse für das Reversionspendel

	A			B				
l [m]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	T_A [s]	T_B [s]
0,1	2,3379	2,3379	2,3383	2,2994	2,2998	2,2997	2,3380	2,2996
0,2	2,2843	2,2831	2,2830	2,2864	2,2866	2,2868	2,2835	2,2866
0,3	2,2457	2,2447	2,2451	2,2756	2,2754	2,2757	2,2452	2,2756
0,4	2,2201	2,2199	2,2197	2,2670	2,2673	2,2674	2,2199	2,2672
0,5	2,2077	2,2078	2,2074	2,2618	2,2620	2,2619	2,2076	2,2619
0,6	2,2051	2,2045	2,2049	2,2589	2,2593	2,2596	2,2048	2,2593
0,7	2,2113	2,2113	2,2113	2,2596	2,2599	2,2598	2,2113	2,2598
0,8	2,2258	2,2261	2,2261	2,2635	2,2635	2,2633	2,2260	2,2634
0,9	2,2466	2,2465	2,2466	2,2704	2,2705	2,2705	2,2466	2,2705
1,0	2,2737	2,2732	2,2729	2,2811	2,2810	2,2813	2,2733	2,2811
1,1	2,3040	2,3039	2,3037	2,2955	2,2955	2,2957	2,3039	2,2956
1,2	2,3396	2,3387	2,3391	2,3130	2,3135	2,3136	2,3391	2,3134
0,16	2,3039	2,3042	2,3044	2,2912	2,2913	2,2912	2,3042	2,2912
0,18	2,2939	2,2939	2,2939	2,2890	2,2886	2,2886	2,2939	2,2887
0,22	2,2753	2,2748	2,2752	2,2838	2,2836	2,2838	2,2751	2,2837
0,24	2,2672	2,2669	2,2667	2,2818	2,2817	2,2814	2,2669	2,2816
1,06	2,2922	2,2925	2,2924	2,2891	2,2892	2,2897	2,2924	2,2893
1,08	2,2997	2,2994	2,2995	2,2918	2,2921	2,2925	2,2995	2,2921
1,12	2,3129	2,3131	2,3128	2,2989	2,2991	2,2991	2,3129	2,2990
1,14	2,3196	2,3200	2,3196	2,3024	2,3022	2,3014	2,3197	2,3020

Mittels [6] wurden folgende, in Diagramm 5.4 dargestellte, Schnittpunkte der Regressionsparabeln bestimmt:

$$S_1\,(0{,}1932\,\mathrm{m}; 2{,}28676\,\mathrm{s}) \;\text{ und }\; S_2\,(1{,}0443\,\mathrm{m}; 2{,}28664\,\mathrm{s})$$

Der Mittelwert T der Periodendauern T_A und T_B entspricht der Periodendauer eines mathematischen Pendels mit der reduzierten Pendellänge l_r:

$$T = 2{,}28670\,\mathrm{s}.$$

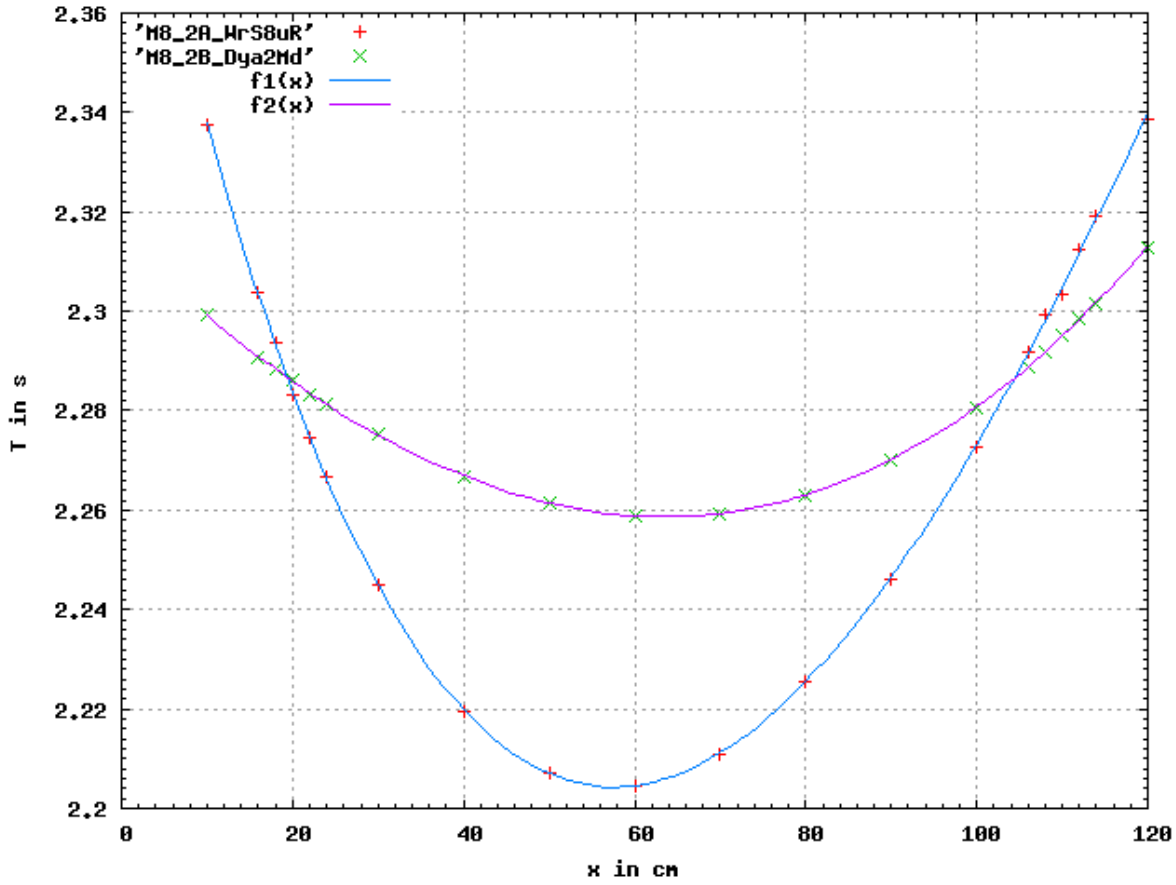
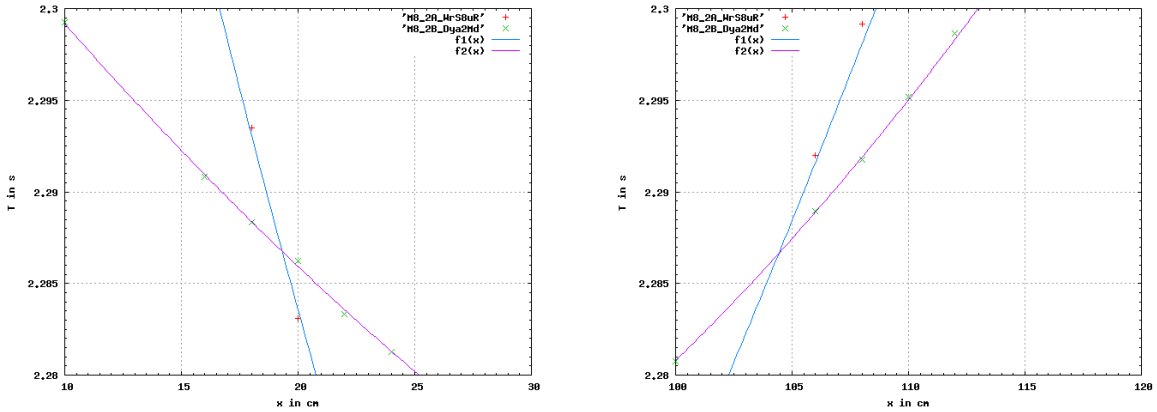


Abbildung 5.3: Abhängigkeiten $T_{\mathrm{A,B}} = \mathrm{f}(l)$ und dazugehörige Regressionsparabeln

Da es sich bei diesem Versuch um eine gedämpfte Schwingung handelt, muss die Periodendauer T mittels Formel 5.5 korrigiert werden. Der konstante Auslenkwinkel $\varphi = 3°$ wurde durch die Verwendung von [6] berücksichtigt.

Aus Formel 5.2 ergibt sich mit $l = 1{,}30\,\mathrm{m}$ die Erdbeschleunigung g

$$g = 9{,}81490\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



(a) linker Schnittpunkt

(b) rechter Schnittpunkt

Abbildung 5.4: Schnittpunkte der Regressionsparabeln

5.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

Mittels [6] wurden die mittleren Abweichungen für die beiden Versuchsteile bestimmt:

- Messreihe Fadenpendel $\Delta g = 0{,}02749\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- Messreihe Reversionspendel $\Delta g = 0{,}00051\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Diese ergeben sich aus den Abweichungen der jeweiligen Regression.

5.6 Zusammenfassung und Diskussion

Im ersten Versuchsteil wurde mittels eines Fadenpendels eine Erdbeschleunigung g

$$g = (9{,}79892 \pm 0{,}02749)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

bestimmt.

Ein dem Literaturwert genauer entsprechendes Ergebnis lieferte die Bestimmung mittels des Reversionspendels:

$$g = (9{,}81490 \pm 0{,}00051)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

An diesen Ergebnissen ist eindeutig erkennbar, dass die Bestimmung der Schwerebeschleunigung mittels des Reversionspendels wesentlich genauer als die Bestimmung mittels des Fadenpendels ist. Dies liegt in erster Linie an der unterschiedlichen und beim Reversionspendel wesentlich genaueren Zeitmessung. Die Zeitmessung per Hand mit der Stoppuhr wurde zwar mit größtmöglicher Präzision durchgeführt, weist aber dennoch eine größere Ungenauigkeit auf als die optisch-elektronische Messung. Dies wurde durch die Messung von zehn Perioden und die Messung jeweils beim Durchgang des Pendels durch die statische Ruhelage, also in dem Moment, in dem die Relativgeschwindigkeit am größten ist, ein wenig ausgeglichen. Außerdem wurde die Amplitudenabhängigkeit zwar beim Reversions-, nicht jedoch beim Fadenpendel berücksichtigt. Durch die Kugelform der Masse des Fadenpendels und der Elastizität des Fadens konnte die Länge des Pendels nur relativ ungenau bestimmt werden. Zusätzlich traten Schwingungen im Faden auf und das Pendel bewegte sich nicht konstant in einer Ebene. Bei beiden Pendeln trat weiterhin Lagerreibung auf, wodurch die Schwingungen weiter gedämpft wurden. Um die Luftreibung als Fehlerquelle auszuschließen könnte man beide Versuche im Vakuum durchführen. Dennoch ist insbesondere das Reversionspendel sehr gut geeignet, um die Schwerebeschleunigung g zu bestimmen.

6 O11 - Beugung an Spalt und Gitter

Protokoll zum Versuch O11 am 29. Juni 2006

6.1 Aufgabenstellung

(1.) Die Wellenlange λ von Laserstrahlung *(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)* ist mit Hilfe eines Beugungsgitters bekannter Gitterkonstante g zu bestimmen. Die Beugungswinkel α_k sind zu ermitteln, $\sin \alpha_k$ ist als Funktion der Ordnung k graphisch darzustellen, λ durch lineare Regression zu berechnen.

(2.) Die Breite b eines Spaltes ist durch Beugung von Laserstrahlung zu bestimmen. Der Abstand x_k der Beugungsmaxima oder -minima k-ter Ordnung vom Maximum nullter Ordnung ist als Funktion von k graphisch darzustellen, b ist durch lineare Regression zu ermitteln.

(3.) Die Breite b des Spaltes ist durch dessen vergrößerte Projektion zu bestimmen und mit dem Ergebnis von (2.) zu vergleichen. Abweichungen sind zu diskutieren.

(4.) Der Durchmesser d einer Lochblende ist durch vergrößerte Projektion zu bestimmen.

(5.) Durch Vermessung der Beugungsfigur einer Lochblende sind die Bedingungen für die ersten drei Minima experimentell zu überprüfen. Deren Bedeutung für das Auflösungsvermögen von Fernrohren ist zu erläutern.

6.2 Grundlagen zum Versuch

Wenn ein Lichtstrahl, in diesem Versuch rotes Laserlicht, auf einen Spalt oder ein Gitter trifft, so ändert sich durch Beugung die Ausbreitungsrichtung der Lichtwellen. Zwei oder mehr Wellen können sich dann nach dem Superpositionsprinzip überlagern. Dieser Vorgang heißt Interferenz. Bei der Überlagerung von zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge, gleicher Frequenz und gleicher Phase verstärkt sich die Amplitude – man spricht von konstruktiver Interferenz bei der ein Interferenzmaximum erreicht wird. Sind die beiden Wellen um π phasenverschoben, so dass ein Wellenberg mit einem Wellental zusammenfällt, löschen sich die Wellen gegenseitig aus falls ihre Amplitude gleich groß ist – die so genannte destruktive Interferenz mit einem Interferenzminimum.

6.2.1 Beugung am Gitter

Nach der FRAUNHOFERschen Beugung im parallelen, monochromatischen Laserlicht entstehen nur in den Richtungen sichtbare Lichtpunkte, in denen sich zwei benachbarte Elementarwellen der Wellenlänge λ mit einem Gangunterschied von $k \cdot \lambda$ ($k \in \mathbb{Z}$) überlagern. Verstärkung mit Interferenzmaxima tritt auf, wenn gilt:

$$\lambda = \frac{g \cdot \sin \alpha_k}{k}, \tag{6.1}$$

wobei g die vorgegebene Gitterkonstante bezeichnet. Der Ablenkwinkel α_k einer Ordnung k wird aus der Ablenkung des Strahls vom geradlinigen Durchscheinen errechnet:

$$\alpha_k = \arctan\left(\frac{x_k}{q}\right). \tag{6.2}$$

q sei dabei der Abstand vom Gitter zur Projektionswand und x_k sei die Abweichung von der Geraden. Dies ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

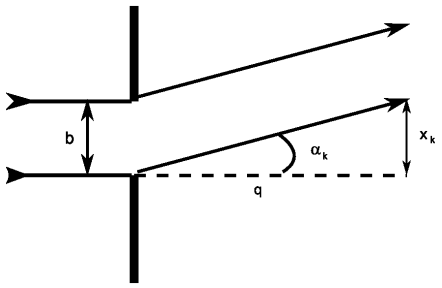


Abbildung 6.1: Darstellung der Beugung am Gitter

6.2.2 Beugung am Spalt

Die Beugung des Lasers ist abhängig von der Spaltbreite b. Mit der Interferenzordnung k wird die Intensität der Interferenzen angegeben. Daraus folgt: um so größer der Ablenkwinkel α_k ist, um so geringer ist die Intensität des Lichtes, deshalb ist das Intensitätsmaximum bei $\alpha_k = 0$. Dabei gilt $b \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda$. Daraus folgt nach Umstellen und Einsetzen von Formel 6.2:

$$b = \frac{k \cdot \lambda}{\sin\left(\arctan \frac{x_k}{q}\right)}. \tag{6.3}$$

6.2.3 Beugung an der Lochblende

Die Beugungserscheinungen bei einer Lochblende entsprechen der Beugung am Spalt, so dass mit dem Lochdurchmesser d aus Formel 6.3 folgt:

$$d = \frac{k \cdot \lambda}{\sin \alpha_k} = \frac{k \cdot \lambda}{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d_k}{q}\right)\right)}. \tag{6.4}$$

Um bei Aufgabe (5.) die Wellenlänge λ zu überprüfen, muss die Formel 6.4 nach k umgestellt werden:

$$k = \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d_k}{q}\right)\right) \cdot \frac{d}{\lambda}. \tag{6.5}$$

Dabei ist d_k das Beugungsminimum k-ter Ordnung und d der Lochblendendurchmesser.

6.2.4 Vergrößerte Projektion

Die Vergrößerung wird mit einer bikonvexen Linse vorgenommen. Dabei gilt, ohne dass die Brennweite der Linse bekannt sein muss:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \tag{6.6}$$

wobei hier G die Gegenstandsgröße (Breite des Spaltes) ist und g die Gegenstandsweite (Entfernung des Gegenstandes von der Linse). B ist die Bildgröße (Bildprojektion auf den Schirm) und b ist die Bildweite (Entfernung des Bildes zur Linse). Die Scharfabbildung

der Beugungsfigur ermöglicht die Messung der Größe der Projektion auf dem Schirm, der Abstände zwischen Spalt und Linse x_1 und zwischen Linse und Projektionsschirm x_2. Daraus kann man die Spaltbreite b bzw. den Lochdurchmesser d bestimmen:

$$b = B \cdot \frac{x_1}{x_2} \text{ bzw. } d = B \cdot \frac{x_1}{x_2}. \tag{6.7}$$

6.3 Versuchsaufbau

In Abbildung 6.2 sind die verwendeten Geräte dargestellt.

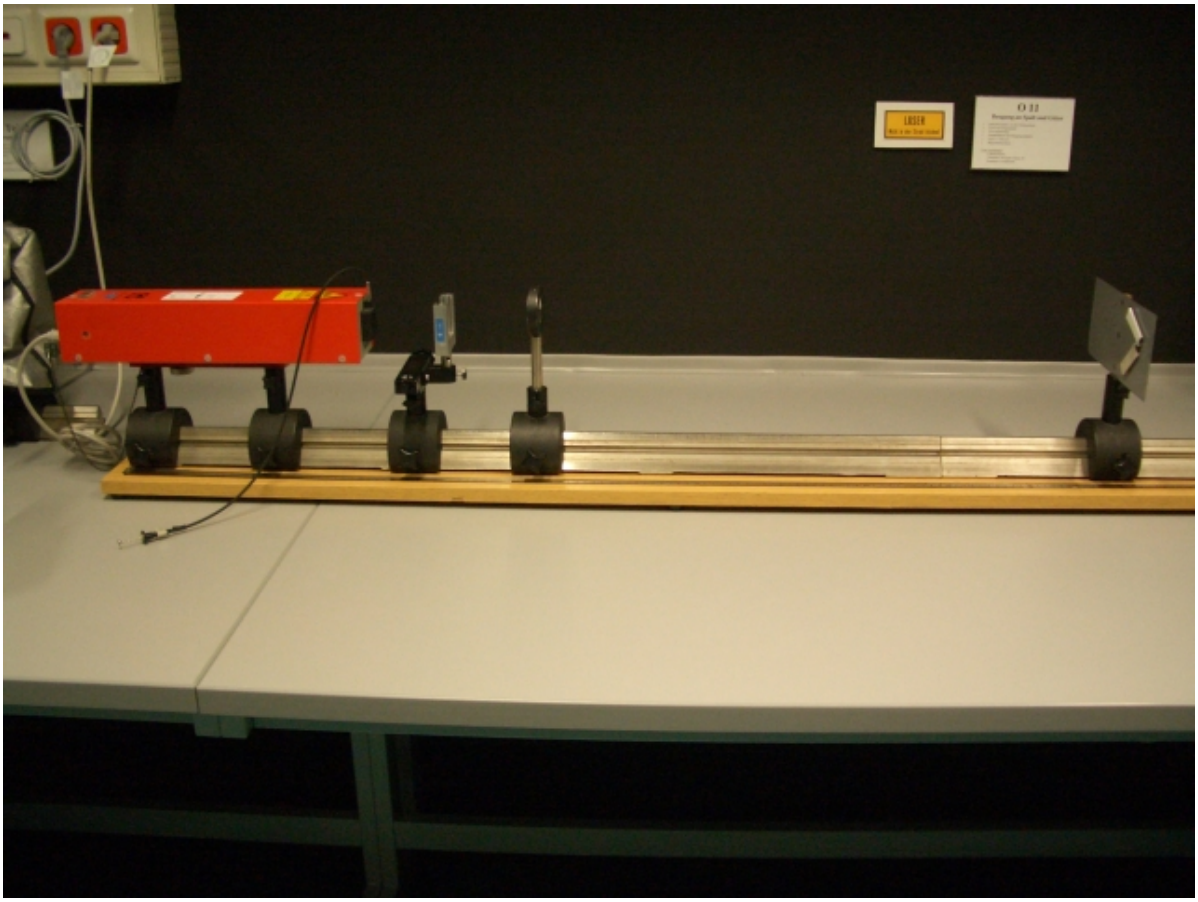


Abbildung 6.2: [5] Laser auf Schiene mit Spalt, Linse und Schirm

6.4 Messergebnisse

6.4.1 Beugung am Gitter

In diesem Versuchsteil wurde ein Gitter mit der Gitterkonstante 20 benutzt, dies entspricht einer Breite von

$$g = 0{,}05\,\mathrm{mm}.$$

Das Gitter befand sich

$$q = 1{,}158\,\mathrm{m}$$

vom Schirm entfernt. Für jede Ordnung k wurde die doppelte Auslenkung $2 \cdot x_k$ gemessen. Nach Formel 6.2 ergibt sich dann der Auslenkwinkel α_k und mittels Formel 6.1 die Wellenlänge λ. Diese Werte sind in Tabelle 6.1 zu finden. In Abbildung 6.5 (a) ist das entstandene Beugungsmuster abgebildet. Die Abhängigkeit $\sin\alpha_k = \mathrm{f}(k)$ ist in Diagramm 6.3 dargestellt.

Tabelle 6.1: Messergebnisse für die Beugung am Gitter

k	$2 \cdot x_k$ [mm]	x_k [mm]	α_k [rad]	$\sin\alpha_k$	λ [nm]
1	29,5	14,75	0,0127	0,0127	636,82
2	58,8	29,40	0,0254	0,0254	634,51
3	90,1	45,05	0,0389	0,0389	647,90
4	119,7	59,85	0,0516	0,0516	645,19
5	150,1	75,05	0,0647	0,0647	646,74

Mittels linearer Regression ergibt sich für die Gerade ein Anstieg a

$$a = 0{,}0129$$

und daraus für das Laserlicht die Wellenlänge λ

$$\lambda = a \cdot g = 0{,}000645\,\mathrm{mm} = 645\,\mathrm{nm}.$$

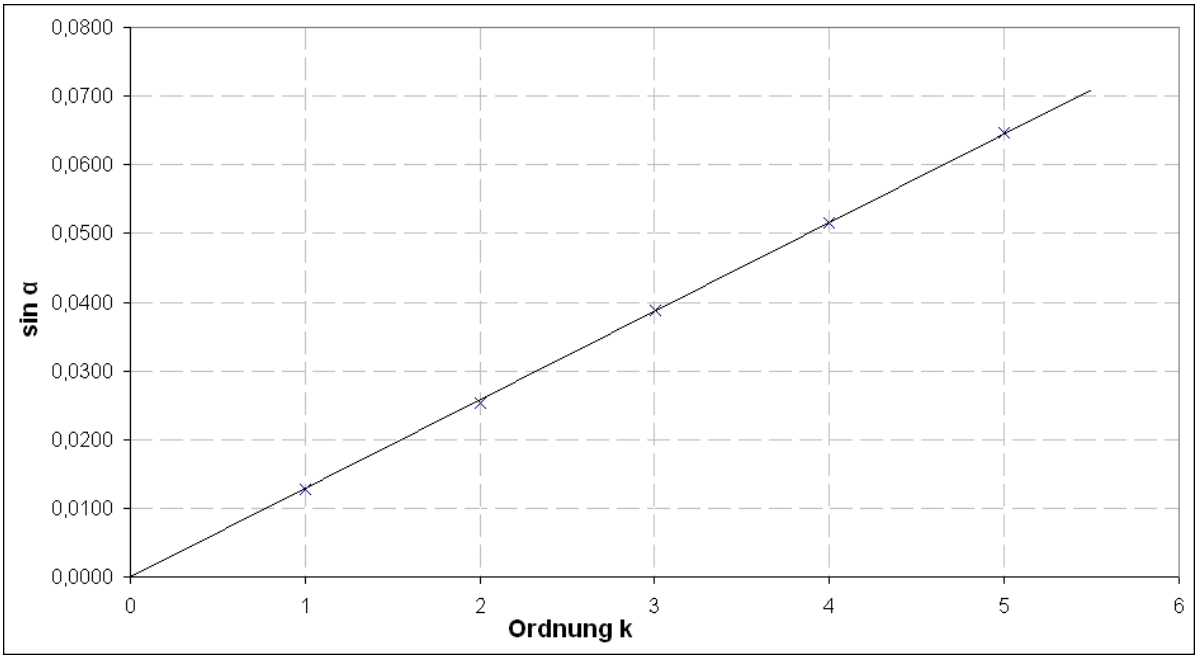


Abbildung 6.3: Abhängigkeit $\sin \alpha_k = \mathrm{f}(k)$ und Regressionsgerade

6.4.2 Beugung am Spalt

Für den zweiten Versuchsteil wurde ein Spalt mit unbekannter, zu bestimmender Breite b genutzt, welcher sich

$$q = 1{,}158\,\mathrm{m}$$

vom Schirm entfernt befand und mit dem gleichen Laserlicht wie in Abschnitt 6.4.1 bestrahlt wurde. Dieses hat die Wellenlänge λ

$$\lambda = 645\,\mathrm{nm}.$$

Für jede Ordnung k wurde die Entfernung $2 \cdot x_k$ von zwei Beugungsmaxima gleicher Ordnung gemessen. Nach Formel 6.3 ergibt sich aus diesen Werten die Spaltbreite b. Diese Werte sind in Tabelle 6.2 zu finden. In Abbildung 6.5 (b) ist das entstandene Beugungsmuster abgebildet. Die Abhängigkeit $x_k = \mathrm{f}(k)$ ist in Diagramm 6.4 dargestellt.

Tabelle 6.2: Messergebnisse für die Beugung am Spalt

k	$2 \cdot x_k$ [mm]	x_k [mm]	α_k [rad]	$\sin \alpha_k$	b [mm]
1	12,2	6,10	0,0053	0,0053	0,1224
2	20,3	10,15	0,0088	0,0088	0,1472
3	29,0	14,50	0,0125	0,0125	0,1545
4	36,8	18,40	0,0159	0,0159	0,1624
5	44,7	22,35	0,0193	0,0193	0,1671
6	53,0	26,50	0,0229	0,0229	0,1692
7	60,0	30,00	0,0259	0,0259	0,1743
8	68,8	34,40	0,0297	0,0297	0,1738
9	77,0	38,50	0,0332	0,0332	0,1747
10	84,8	42,40	0,0366	0,0366	0,1763
11	93,9	46,95	0,0405	0,0405	0,1751
12	101,6	50,80	0,0438	0,0438	0,1766
13	109,4	54,70	0,0472	0,0472	0,1777
14	117,9	58,95	0,0509	0,0508	0,1776
15	125,5	62,75	0,0541	0,0541	0,1788

Für die Bestimmung der Spaltbreite mittels linearer Regression ist die Abhängigkeit $x_k = \mathrm{f}(k)$ aufgrund der Winkelfunktionen zunächst ungeeignet. Durch die Näherung $\sin \alpha_k = \tan \alpha_k = \alpha_k$, die für die ermittelten kleinen Werte für α_k gültig ist, ergibt sich die Breite b des Spaltes aus dem Anstieg a der Regressionsgeraden

$$a = 4{,}2529\,\mathrm{mm}$$

zu

$$b = \frac{\lambda \cdot q}{a} = \frac{645\,\mathrm{nm} \cdot 1{,}158\,\mathrm{m}}{4{,}2529\,\mathrm{mm}} = 0{,}1756\,\mathrm{mm}.$$

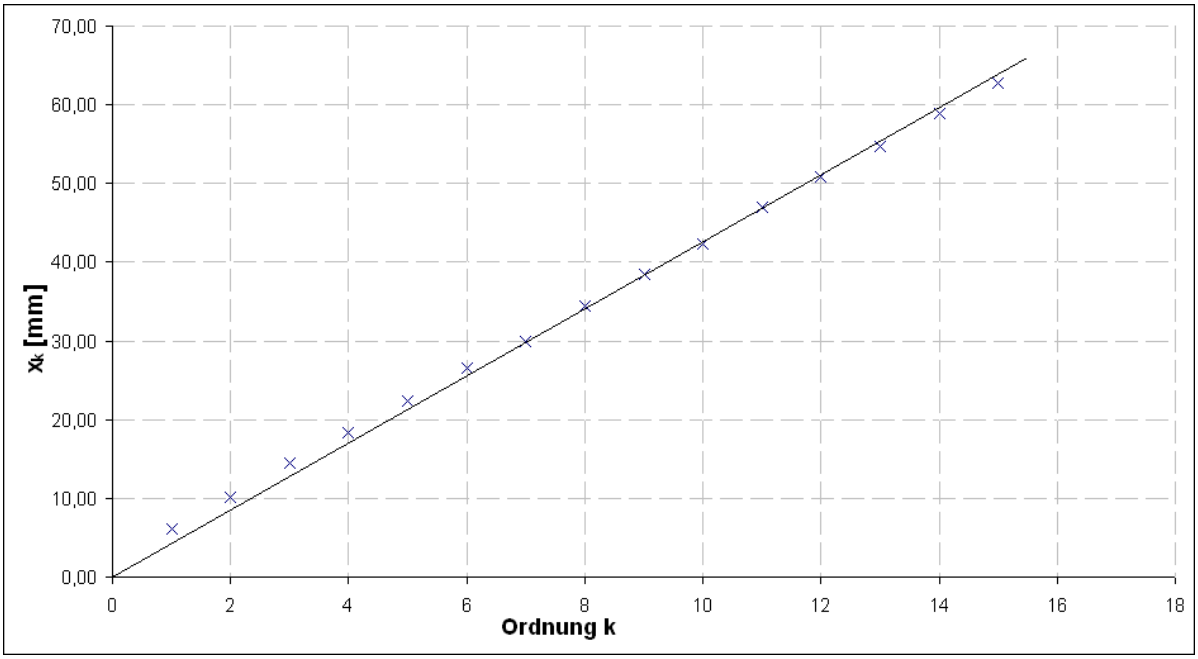


Abbildung 6.4: Abhängigkeit $x_k = \mathrm{f}(k)$ und Regressionsgerade

6.4.3 Vergrößerte Projektion des Spaltes

Der dritte Aufgabenteil wurde zusätzlich zum roten Laser mit normalem weißen Licht durchgeführt, um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben. Diese gemessen Werte sind in Tabelle 6.3 dargestellt. Das entstandene Bild der Projektion mit dem Laser ist in Abbildung 6.5 (c) abgebildet. Die Berechnung der Spaltbreite erfolgte mittels Formel 6.7.

Tabelle 6.3: Messergebnisse für die vergrößerte Projektion des Spaltes

	roter Laser	weißes Licht
Abstand Spalt-Linse x_1 [m]	0,050	0,057
Abstand Linse-Schirm x_2 [m]	1,101	1,150
Bildbreite B [mm]	4,0	3,8
berechnete Spaltbreite b [mm]	0,1817	0,1883

6.4.4 Vergrößerte Projektion der Lochblende

Ebenso wurde der Aufgabenteil zusätzlich zum roten Laser mit normalem weißen Licht durchgeführt. Die dabei gemessen Werte sind in Tabelle 6.4 zusammengefasst. In Abbildung 6.5 (d) ist das entstandene Projektionsbild abgebildet. Mittels Formel 6.7 wurde der Durchmesser der Lochblende berechnet.

Tabelle 6.4: Messergebnisse für die vergrößerte Projektion der Lochblende

	roter Laser	weißes Licht
Abstand Lochblende-Linse x_1 [m]	0,060	0,056
Abstand Linse-Schirm x_2 [m]	1,107	1,152
Bilddurchmesser D [mm]	7,7	8,8
berechneter Durchmesser d [mm]	0,4173	0,4278

6.4.5 Beugung an der Lochblende

Im fünften Versuchsteil wurde die Lochblende mit dem in Abschnitt 6.4.4 ermittelten Durchmesser d

$$d = 0{,}42255\,\mathrm{m}$$

von rotem Laserlicht der Wellenlänge λ

$$\lambda = 645\,\mathrm{nm}$$

bestrahlt. Die Blende befand sich

$$q = 1{,}167\,\mathrm{m}$$

vom Schirm entfernt. Für jede Ordnung k wurde der Durchmesser d_k des Beugungskreises gemessen. Nach Formel 6.5 ergibt sich aus diesen Werten die errechnete Ordnung $k_{\text{berechnet}}$. Diese Werte sind in Tabelle 6.5 zu finden. In Abbildung 6.5 (e) ist das entstandene Beugungsmuster abgebildet.

Tabelle 6.5: Messergebnisse für die Beugung an der Lochblende

k_{soll}	d_k [mm]	$k_{\text{berechnet}}$
1	4,0	1,12
2	8,0	2,25
3	12,0	3,37
4	15,5	4,35

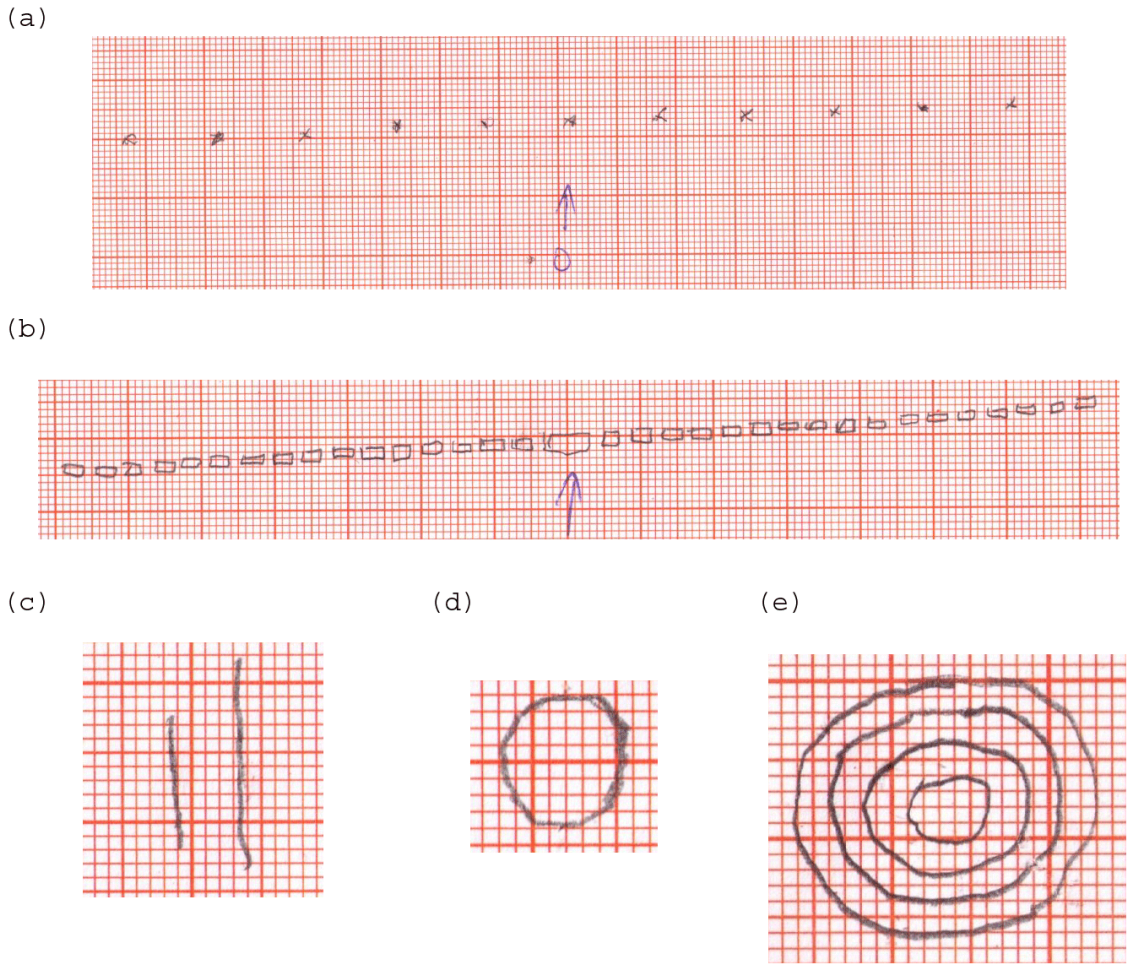


Abbildung 6.5: Aufgezeichnete Muster am Fangschirm: (a) Beugung am Gitter (b) Beugung am Spalt (c) Vergrößerte Projektion des Spaltes (d) Vergößerte Projektion der Lochblende (e) Beugung an der Lochblende

6.5 Messunsicherheiten und Fehlerbetrachtungen

Die Messunsicherheiten für eine Größe F ergeben sich aus dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial v_i} \right| \cdot \Delta v_i. \tag{6.8}$$

Die Messungenauigkeit des Maßbandes betrug 3 mm, die Abweichung bei der Messung der Abstände der Beugungsmaxima schätzen wir auf 0,5 mm.

Daraus ergibt sich für die Wellenlänge eine Abweichung von

$$\Delta\lambda = 9{,}7\,\mathrm{nm}.$$

Die Spaltbreite b hat damit eine Abweichung von

$$\Delta b = 18{,}3\,\mu\mathrm{m}.$$

Bei der vergrößerten Projektion ergibt sich für den Spalt eine Messabweichung von

$$\Delta b = 23{,}5\,\mu\mathrm{m} \text{ bzw. } \Delta b = 23{,}9\,\mu\mathrm{m}$$

und für die Lochblende eine Messabweichung von

$$\Delta d = 35{,}7\,\mu\mathrm{m} \text{ bzw. } \Delta d = 35{,}5\,\mu\mathrm{m}.$$

6.6 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurden folgende Ergebnisse ermittelt:

Die Wellenlänge λ des roten Laserlichts beträgt

$$\lambda = (645 \pm 9{,}7)\,\mathrm{nm}.$$

Damit ergibt sich, bestimmt durch Beugung des Laserlichts, die Breite des Spaltes zu

$$b = (0{,}1756 \pm 0{,}0183)\,\mathrm{mm}.$$

Die vergrößerte Projektion des Spaltes ergab mittels des Lasers

$$b = (0{,}1817 \pm 0{,}0235)\,\mathrm{mm}$$

und mittels weißen Lichts

$$b = (0{,}1883 \pm 0{,}0239)\,\mathrm{mm}.$$

Der Lochblendendurchmesser wurde durch vergrößerte Projektion mittels des Lasers zu

$$d = (0{,}4173 \pm 0{,}0357)\,\mathrm{mm}$$

und mittels weißen Lichts zu

$$d = (0{,}4278 \pm 0{,}0355)\,\mathrm{mm}$$

bestimmt.

Die berechneten Ordnungen für die Beugung an der Lochblende stimmen in Näherung mit den theoretischen Werten für die Ordnungen überein, so dass die formellen Bedingungen für die Gültigkeit der Formeln bestätigt werden.

Die Auswirkungen der Interferenzerscheinungen an der Lochblende auf das Auflösungsvermögen von Fernrohren lassen sich folgendermaßen erklären: Die Linse im Objektiv eines Fernrohres wirkt an ihrem Rand wie eine Lochblende, daher wird ein Punkt eines Gegenstandes nicht als Bildpunkt, sondern als konzentrische Beugungsfigur abgebildet. Das Hauptmaximum eines solchen Bildes wird als „zentrales Beugungsscheibchen“ bezeichnet. Beobachtet man zwei Objekte in großer Entfernung, die relativ nah zueinander stehen (etwa Doppelsterne), so überlagern sich ihre Beugungsscheibchen und sie sind nur noch als ein Objekt erkennbar. Der minimale Abstand zweier Bildpunkte muss mindestens so groß sein wie der Radius der Beugungsscheibchen, damit die beiden Punkte gerade noch unterscheidbar sind. Aus Formel 6.4 folgt, dass das Auflösungsvermögen durch größere Objektivdurchmesser oder kleinere Wellenlängen erhöht werden kann.

Die Ermittlung der Wellenlänge des Lasers lieferte einen akzeptablen Wert, der im Bereich des roten Lichts liegt. Bei der Ermittlung der Spaltbreite lieferte das Verfahren der Beugung genauere Werte, auch wenn die Abweichung noch recht groß ist. Zurückzuführen ist dies auf die Messunsicherheit bei der Breite der Bildprojektion. Hier wirken sich geringe Abweichungen stark aus. Ebenso ließ sich der Abstand zwischen Spalt und Linse nur ungenau ermitteln. Ähnlich zur Bestimmung der Spaltbreite, trifft dies auch auf die Bestimmung des Durchmessers der Lochblende zu. Die Ablesung der Abstände zwischen den Maxima war nur ungenau möglich. Dennoch überschneiden sich die jeweiligen Ergebnisintervalle der Messwerte. Abschließend kann festgestellt werden, dass die vergrößerte Projektion ungenauere Ergebnisse lieferte als die Beugung.

Literaturverzeichnis

[1] Stroppe, H.: *Physik für Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften*, 12. Auflage, München, Wien: Fachbuchverlag Leipzig, 2003.

[2] Ilberg, W.; Krötzsch, M.; Geschke, D. (Hrsg.): *Physikalisches Praktikum*, 11. Auflage, Stuttgart, Leipzig: Teubner, 1998.

[3] Eichler, H. J.; Kronfeldt, H.-D.; Sahm, J.: *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001.

[4] Wörstenfeld, W.; Pfeil, W.; Martin, K.: *Das große Tafelwerk*, 2. durchgesehene Auflage, Berlin: Volk und Wissen, 1994.

[5] Institut für Experimentelle Physik (Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg) (Hrsg.): *Das Physikalische Grundpraktikum I und II*: (WWW-Seite, Version vom 11.04.2006). Internet: http://www.uni-magdeburg.de/iep/gp12/INET_P1.html (Zugriff: 11.07.2006, 19:58 MESZ)

[6] Specht, E. (Hrsg.): *Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum*: (WWW-Seite, Version vom 17.06.2005). Internet: http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/index.html (Zugriff: 10.07.2006, 20:17 MESZ)

Tabellenverzeichnis

1.1 Messwerte des Kugeldurchmessers 6
1.2 Messwerte aller Gruppen und Regressionsrechenparameter 11

2.1 Messwerte der statischen Methode und berechnete Größen 22
2.2 Messwerte der dynamischen Methode und berechnete Größen 24
2.3 Messwerte der Schwerpunktbestimmung und berechnete Größen 26

3.1 Messwerte der 1. Versuchsdurchführung zur Wärmekapazitätsbestimmung 36
3.2 Messwerte der 2. Versuchsdurchführung zur Wärmekapazitätsbestimmung 38
3.3 Messwerte der Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme 40

4.1 Messergebnisse für Auslenkung und Stromstärke 50

5.1 Messergebnisse für das Fadenpendel 56
5.2 Messergebnisse für das Reversionspendel 58

6.1 Messergebnisse für die Beugung am Gitter 66
6.2 Messergebnisse für die Beugung am Spalt 68
6.3 Messergebnisse für die vergrößerte Projektion des Spaltes 69
6.4 Messergebnisse für die vergrößerte Projektion der Lochblende 70
6.5 Messergebnisse für die Beugung an der Lochblende 70

Abbildungsverzeichnis

1.1 [5] Verwendete Messgeräte 5
1.2 Messwertklassen und relative Häufigkeiten 9
1.3 Messwerte der Gruppen und Regressionsgerade 13

2.1 Skizzen der Versuchsgeräte 21
2.2 [5] Drehtisch mit Lichtschranke und Zeitmessgerät 21
2.3 Messwerte der statischen Methode und Regressionsgerade 23
2.4 Messwerte der dynamischen Methode und Regressionsgerade 25
2.5 Messwerte der dynamischen Bestimmung des Schwerpunkts 27
2.6 Skizze des unregelmäßigen Körpers mit ermitteltem Schwerpunkt 29

3.1 [5] Versuchsanordnung der Messgeräte am Experimentierplatz 34
3.2 Versuchsdurchführung 1 zur Wärmekapazitätsbestimmung 37
3.3 Versuchsdurchführung 2 zur Wärmekapazitätsbestimmung 38
3.4 Bestimmung der spezifischen Kondensationswärme 40

4.1 Herleitung der Berechnung des Krümmungsradius 47
4.2 schematische Darstellung der Elektronenstrahlröhre 49
4.3 [5] Helmholtz-Spulenpaar mit Elektronenstrahlröhre 49
4.4 Abhängigkeit $\frac{1}{r} = \mathrm{f}(B)$ und entsprechende Regressionsgeraden 51

5.1 [5] Faden- und Reversionspendel 55
5.2 Abhängigkeit $T^2 = \mathrm{f}(l)$ und entsprechende Regressionsgerade 57
5.3 Abhängigkeiten $T_{\mathrm{A,B}} = \mathrm{f}(l)$ und dazugehörige Regressionsparabeln 59
5.4 Schnittpunkte der Regressionsparabeln 60

6.1 Darstellung der Beugung am Gitter 63
6.2 [5] Laser auf Schiene mit Spalt, Linse und Schirm 65
6.3 Abhängigkeit $\sin \alpha_k = \mathrm{f}(k)$ und Regressionsgerade 67
6.4 Abhängigkeit $x_k = \mathrm{f}(k)$ und Regressionsgerade 69
6.5 Aufgezeichnete Muster am Fangschirm 71