

INHALTSVERZEICHNIS

M1 – Messabweichungen

Seite 2

E3 – Wheatstonesche Messbrücke

Seite 9

M23 – Eigenfrequenz einer Saite

Seite 21

O3 – Krümmungsradius von Linsen und Spiegeln

Seite 34

W4 – Spezifische Wärmekapazität von Körpern

Seite 43

M8 – Pendelschwingungen

Seite 55

M1

Messabweichungen

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

M1 – Messabweichungen

Aufgabenstellung

Die Dichte eines kugelförmigen Probekörpers ist aus seiner geometrischen Abmessung und seiner Masse zu bestimmen. Die Verteilung der gemessenen Durchmesser ist zu analysieren und die Messabweichungen sind anzugeben.

- 1.1 Der Durchmesser d des Körpers ist unter Verwendung einer Bügelmessschraube 50-mal zu messen. Die Messwerte sind in sieben Klassen einzuteilen, die relativen Häufigkeiten sind als Histogramm grafisch darzustellen. Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich sind zu berechnen und mit den Fehlergrenzen des Messgerätes zu vergleichen.
- 1.2 Der Durchmesser d des Körpers ist mit Hilfe eines Messschiebers einmalig zu ermitteln.
- 1.3 Die Masse m des Körpers ist durch einmalige Wägung auf einer mechanischen Feinwaage zu bestimmen.
- 1.4 Die Dichte ρ des Probekörpers ist einerseits aus 1.1 und 1.3 und andererseits aus 1.2 und 1.3 zu berechnen. Außerdem sind die Größtabweichungen der Dichte zu bestimmen, die sich in beiden Fällen durch lineare Fehlerfortpflanzung aus den Größtabweichungen der gemessenen Größen ergeben. Anhand beider Messergebnisse ist zu überprüfen, ob sich die Ergebnisintervalle überlappen.
- 1.5 Die mittlere Dichte des Probekörpermaterials ist durch Kombination der Messergebnisse aus 1.1 und 1.3 aller Versuchsgruppen an Kugeln gleicher Dichte (gleicher Farbe), aber unterschiedlicher Masse durch lineare Regression zu berechnen. Dazu ist die funktionale Abhängigkeit des Kugelvolumens V von der Masse m , $V = V(m)$, sowie die Regressionsgerade grafisch darzustellen, die mittleren Abweichungen der Regressionsparameter sind anzugeben.

Grundlagen zum Versuch

Den Mittelwert von n Messergebnissen ermittelt man mit folgender Formel:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n d_i \quad (1)$$

\bar{d} – Arithmetischer Mittelwert des Durchmessers

d_i – Einzelmesswerte des Durchmessers

Die Standardabweichung s ermittelt man über

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{für } n > 1 \quad (2)$$

Der Vertrauensbereich lässt sich daraufhin mit folgender Formel berechnen:

$$s_t = \frac{s}{\sqrt{n}} * t \quad (3)$$

In unserem Fall beträgt der Student-Faktor $t=3,16$.

Das dazugehörige Intervall für den Vertrauensbereich beträgt:

$$\bar{d} - s_t \leq d \leq \bar{d} + s_t \quad (4)$$

Das Volumen einer Kugel errechnet sich aus

$$V = \frac{\pi}{6} d^3 \quad (5)$$

Die Dichte ρ eines Körpers berechnet sich mit

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (6)$$

Die Größtabweichung der Dichte lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$$\Delta\rho = \frac{6}{\pi d^3} \Delta m + \frac{18}{\pi d^4} \Delta d \quad (7)$$

Der funktionale Zusammenhang zwischen Masse m und Volumen V beträgt

$$V(m) = a * m + b \quad (8)$$

$$\text{mit } a = \frac{\sum m_i V_i}{\sum m_i^2} \quad (9)$$

Die mittlere Abweichung (Standardabweichung von b) beträgt hierbei

$$s_b = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - b m_i)^2}{\sum_{i=1}^n m_i^2}} \quad (10)$$

Versuchsaufbau

Für den Versuch werden eine Bügelmessschraube, ein Messschieber, eine mechanische Feinwaage und ein kugelförmiger Körper benötigt.

Die Eichfehlergrenze der Bügelmessschraube beträgt $10\mu\text{m}$.

Die Eichfehlergrenze des Messschiebers beträgt $100\mu\text{m}$.

Die Fehlergrenze der Feinwaage beträgt 1mg .

Messergebnisse

Tabelle 2: Messergebnisse der Gruppen – Kugelmasse, Kugeldurchmesser (Messschieber) und Kugelvolumen		
m [g]	d_{MS} [mm]	V [mm ³]
6,2235	19,6	3942,5
1,9424	13,3	1231,8
7,121	20,5	4510,9
3,135	15,3	1875,3
1,5431	12,4	998,3
4,3943	17,6	2854,5
7,316	20,7	4644,2
2,3359	14,3	1531,1

Tabelle 3: weitere Messwerte – Kugelmasse (Feinwaage), Kugeldurchmesser (Messschieber), min. und max. Durchmesser aus Tabelle 1 (Bügelmessschraube)		
$m = 1,5431 \text{ g}$ $d_{MS} = 12,4 \text{ mm}$ $d_{BM_{min}} = 11,237 \text{ mm}$ $d_{BM_{max}} = 12,779 \text{ mm}$		

Tabelle 1: Messergebnisse Kugeldurchmesser mithilfe der Bügelmessschraube					
Nr	d_{BM} [mm]	Nr	d_{BM} [mm]	Nr	d_{BM} [mm]
1	11,762	18	12,134	35	11,664
2	11,836	19	11,579	36	11,409
3	11,748	20	12,247	37	12,433
4	11,885	21	11,735	38	11,780
5	11,368	22	11,485	39	12,246
6	12,445	23	11,852	40	12,276
7	11,287	24	11,589	41	11,254
8	12,779	25	12,365	42	11,277
9	12,664	26	11,431	43	11,456
10	12,525	27	11,575	44	12,264
11	11,618	28	12,192	45	11,237
12	12,216	29	11,300	46	12,417
13	11,334	30	11,666	47	12,204
14	11,872	31	12,661	48	11,313
15	12,037	32	12,098	49	12,701
16	11,609	33	11,665	50	11,542
17	11,572	34	12,209		

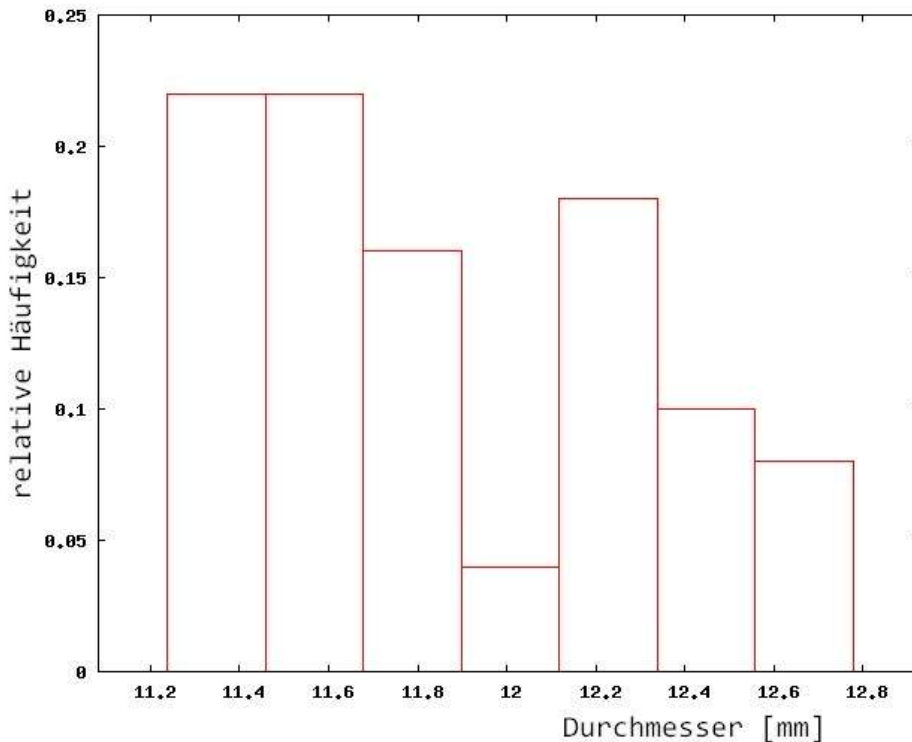


Abbildung 1:
Histogramm
relative
Häufigkeiten der
sieben Klassen der
Messwerte

Mittelwert:

$$(1) \quad \overline{d_{BM}} = \frac{1}{50} * \sum_{i=1}^{50} d_i \cong 11,876 \text{ mm}$$

Standardabweichung:

$$(2) \quad s = \sqrt{\frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} (d_i - \overline{d_{BM}})^2} = 0,446 \text{ mm}$$

Vertrauensbereich:

$$(3) \quad s_t = \frac{s}{\sqrt{50}} * 3,16 = 0,195 \text{ mm} = 195 \mu\text{m}$$

$$(4) \quad 11,876 \text{ mm} - 0,195 \text{ mm} \leq d \leq 11,876 \text{ mm} + 0,195 \text{ mm} \\ 11,681 \text{ mm} \leq d \leq 12,071$$

Der Vertrauensbereich ist somit mit $2 * 0,195 \text{ mm} = 0,39 \text{ mm}$ ungefähr vierzig Mal so groß wie die vom Hersteller angegebene Messungenauigkeit von $0,01 \text{ mm}$.

Das Volumen der Kugel aus $\overline{d_{BM}}$ beträgt

$$(5) \quad V = \frac{\pi}{6} \overline{d_{BM}}^3 = 887 \text{ mm}^3$$

Die Dichte der Kugel aus $\overline{d_{BM}}$ und m beträgt

$$(6) \quad \rho = \frac{1,5431 \text{ g}}{887 \text{ mm}^3} = 1,74 * \frac{10^{-3} \text{ g}}{\text{mm}^3}$$

Die Größtabweichung beträgt

$$(7) \quad \Delta \rho = \frac{6}{\pi \overline{d_{BM}}^3} \Delta m + \frac{18}{\pi \overline{d_{BM}}^4} 2 * s_t = 0,0024 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \\ \text{mit } \Delta m = 2 \text{ g}$$

Das Volumen der Kugel aus d_{MS} beträgt

$$(5) \quad V = \frac{\pi}{6} d_{MS}^3 = 998 \text{ mm}^3$$

Die Dichte der Kugel aus d_{MS} und m beträgt

$$(6) \quad \rho = \frac{1,5431 \text{ g}}{998 \text{ mm}^3} = 1,55 \cdot \frac{10^{-3} \text{ g}}{\text{mm}^3}$$

Die Größtabweichung beträgt

$$(7) \quad \Delta \rho = \frac{6}{\pi(d_{MS})^3} \Delta m + \frac{18}{\pi d_{MS}^4} 2 \cdot 0,1 \text{ mm} = 0,0021 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

Aufgrund der stark abweichenden Werte für die Durchmesser, überlappen sich die beiden Ergebnisintervalle nicht.

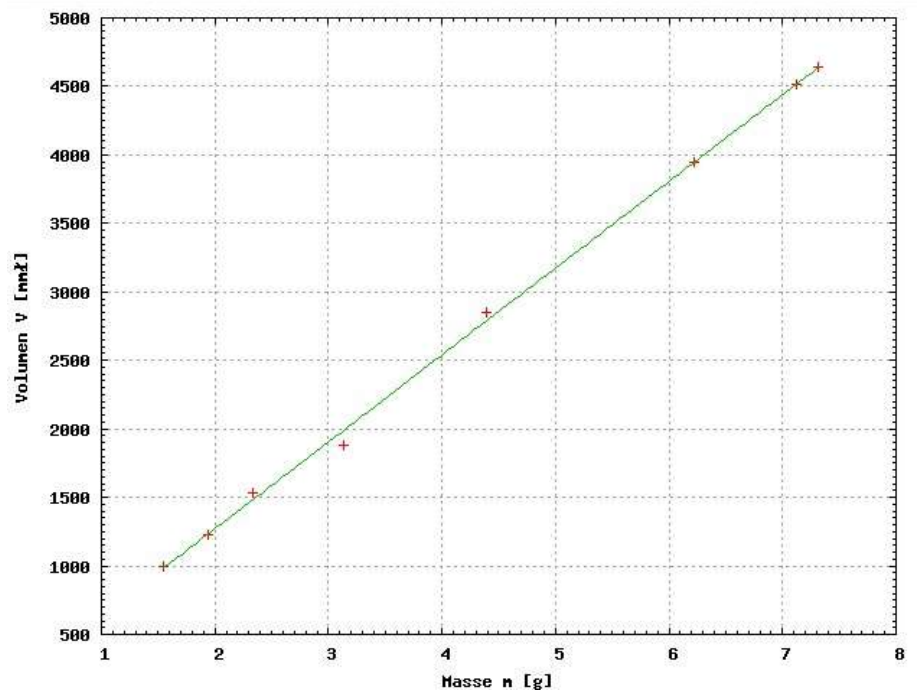


Abbildung 2 : Lineare Regression

Der Anstieg der Regressionsgeraden beträgt

$$(9) \quad 633,616 \text{ mm}^3/\text{g}$$

Daraus folgt

$$\rho_{reg} = \frac{1}{b} = 1,578 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

Der Ordinatenschnittpunkt liegt bei

$$(8) \quad 4,821 \text{ mm}^3$$

Der funktionale Zusammenhang zwischen Masse m und Volumen V beträgt somit

$$(8) \quad V(m) = (633,616 \text{ mm}^3/\text{g}) \cdot m + (4,821 \text{ mm}^3)$$

Die mittlere Abweichung dieser Werte beträgt

$$(10) \quad s_b = 9,274 \text{ mm}^3$$

Messunsicherheiten

$$\Delta m = \Delta m_{sys} + \Delta m_{zuf} = 1 \text{ mg} + 0,05 \text{ mg} = 1,05 \text{ mg}$$

$$\Delta d_{BM} = \Delta d_{BM,sys} + \Delta d_{BM,zuf} = 0,01 \text{ mm} + 0,195 \text{ mm} = 0,205 \text{ mm}$$

$$\Delta d_{MS} = \Delta d_{MS,sys} + \Delta d_{MS,zuf} = 0,1 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,15 \text{ mm}$$

Zusammenfassung und Diskussion

$$\begin{aligned}
m &= (1,5431 \pm 1,05)g \\
d_{MS} &= (12,4 \pm 0,15)mm; \quad \overline{d_{BM}} = (11,876 \pm 0,205)mm \\
\rho_{MS} &= (1,55 * 10^{-3} \pm 0,0021) \frac{g}{mm^3}; \quad \rho_{BM} = (1,74 * 10^{-3} \pm 0,0024) \frac{g}{mm^3} \\
\rho_{reg} &= 1,578 \frac{g}{mm^3}
\end{aligned}$$

Da die uns vorliegende Kugel nicht ideal geformt war, sieht man in der Abbildung der relativen Häufigkeiten starke Abweichungen von der erwarteten Glockenkurve. Da es für uns als Experimentatoren einfacher war, die Extrema auszumessen, treten diese verstärkt auf. Auch bei der Messung mit dem Messschieber mussten wir uns somit entscheiden, an welcher Stelle wir die Kugel ausmessen, weshalb die berechneten Werte für die Bügelmessschraube und den Messschieber stark voneinander abweichen.

Aus diesem Grund ist auch der zufällige Messfehler der Bügelmessschraube unerwartet deutlich größer als der systematische Eichfehler. Beim Messschieber hingegen konnte man aufgrund der Einzelmessung den zufälligen Messfehler bloß anhand der Skaleneinteilung berechnen. Somit schließt dieser die starken Abweichungen des Durchmessers nicht mit ein. Aus diesem Grund überschneiden sich die beiden Intervalle für den Durchmesser auch nicht. Aufgrund der ziemlich hohen Messgenauigkeit der Feinwaage hingegen konnte die Masse der Kugel sehr exakt bestimmt werden.

Aufgrund der stark abweichenden Werte für die Durchmesser überschneiden sich auch die Intervalle für die Dichte-Bestimmung nicht.

Zwar liegt auch der Wert für die aus der linearen Regression berechnete Dichte nicht in einem der Intervalle, doch liegt dieser Wert auch annähernd im selben Bereich. Dies lässt darauf schließen, dass dieser Wert ein sehr realistischer Wert für die Dichte der grünen Kugeln ist.

Literatur

- <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/lreg.php>
- <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/mean.php>
- W. Walcher, Praktikum der Physik, BG Teubner Stuttgart

E3

Wheatstonesche Messbrücke

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

E 3 Wheatstonesche Messbrücke

1. Aufgabenstellung

- 1.1 Der ohmsche Widerstand einer Widerstandskombination ist in einer Wheatstoneschen Brückenschaltung mit Gleichstrom zu messen.
- 1.2 Der Widerstand ist aus den bekannten Einzelwiderständen zu berechnen und mit dem Messergebnis von 1.1 zu vergleichen.
- 1.3 Die Kapazitäten zweier Kondensatoren sind einzeln sowie in Reihen- und Parallelschaltung in einer Wechselstrombrücke in Wheatstone-Schaltung zu messen.
- 1.4 Die Induktivität einer Spule ist mit der Wechselstrombrücke zu bestimmen.
- 1.5 Der Widerstand der Kombination, die Kapazitäten beider Kondensatoren und die Induktivität der Spule sind mit Hilfe einer technischen Kleinmessbrücke nach Wheatstone zu überprüfen.

2. Grundlagen zum Versuch

Formeln zu 1.1:

In Aufgabe 1.1 ist es gefordert einen unbekannten ohmschen Widerstand mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brückenschaltung mit Gleichstrom zu messen. Die Beziehungen der Widerstandsgrößen zueinander kann man mithilfe der Kirchhoffschen Regeln bestimmen.

So folgt aus dem Knotensatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1)$$

und dem Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_{qi} + \sum_{j=1}^n U_{vj} = 0 \quad (2)$$

(mit U_{qi} = Quellspannungen; U_{vj} = Verbraucherspannungen)

und dem Verhalten von Widerständen in Reihenschaltung

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3)$$

und in Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (4)$$

folgende Formel für die Berechnung des unbekannten Widerstandes in der Wheatstoneschen Messbrücke

$$R_x = R_n \frac{R_1}{R_2} \quad (5)$$

Da für die Widerstände R_1 und R_2 nur ihr Verhältnis relevant ist, verwenden wir in der Wheatstoneschen Messbrücke ein Präzisions-Wendelpotentiometer. Da nun $R_1 \sim l_1$ und $R_2 \sim l_2$ sind, definieren wir $R_1 = x$ und $R_2 = l - x$ mit $l = \text{Länge des Potentiometers}$.

$$R_x = R_n \frac{x}{l-x} \quad (6)$$

Formeln zu 1.2:

Hier soll der Widerstand aus den bekannten Einzelwiderständen zu berechnet werden.

Der Widerstand der Raumdiagonale, Flächendiagonale oder Würfelkante ist experimentell sowie rechnerisch zu bestimmen.

$$\text{Raumdiagonale (RD)} : R_{ers} = \frac{5}{6} R \quad (7)$$

$$\text{Würfelkante (WK)} : R_{ers} = \frac{7}{12} R \quad (8)$$

$$\text{Flächendiagonale (FD)} : R_{ers} = \frac{3}{4} R \quad (9)$$

Formeln zu 1.3:

Nun sind die Kapazitäten zweier Kondensatoren zu bestimmen. Dazu benötigt man den kapazitiven Blindwiderstand:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (10)$$

Sind die beiden Kondensatoren in Reihenschaltung geschaltet, so bildet sich der Wert für die gesamte Kapazität mit

$$\frac{1}{C_r} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_r = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (11)$$

Und für zwei Kondensatoren in Parallelschaltung mit

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (12)$$

Somit berechnet man die Kapazität mit:

$$C_x = C_n \frac{l-x}{x} \quad (13)$$

Aus (11) und (12) folgt

$$C_1 = C_p - C_2 \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{C_p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_p}{2}\right)^2 - C_p C_r} \quad (15)$$

Formeln zu 1.4:

In 1.4 ist die Induktivität einer Spule zu bestimmen. Induktivitäten verhalten sich in Reihen- bzw Parallelschaltung wie Widerstände.

$$x_L = \omega L \quad (16)$$

$$L_X = L_n \frac{x}{l-x} \quad (17)$$

3. Versuchsaufbau

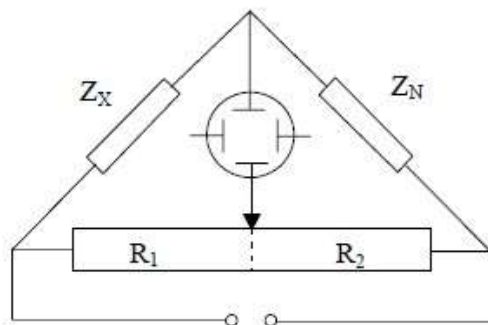


Bild 1: Wheatstonesche Messbrücke

Für Aufgabe 1.1 wird der Versuchsaufbau mit Gleichstrom betrieben, für 1.3 und 1.4 hingegen mit Wechselstrom. Als Nullindikator dient ein Oszilloskop.

Ist R_1 ungefähr R_2 und zeigt das Oszilloskop keinen Ausschlag an, so ist Z_x gleich Z_n . Dafür wird Z_n in derselben Größenordnung gewählt wie Z_x und das Potentiometer wird so eingestellt, dass das Oszilloskop möglichst keinen Ausschlag anzeigt.

4.Messergebnisse

Messergebnisse 1.1

	R_1	R_2	Z_n	Z_x (errechnet)
Raumdiagonale	5,21	4,79	300 Ω	326,305 Ω
Flächendiagonale	5,95	4,05	200 Ω	293,827 Ω
Würfelkante	6,95	3,05	100 Ω	227,869 Ω

Tabelle 1: Messergebnisse 1.1

Nach Vertauschen von Z_n und Z_x erhielten wir die gleichen Werte.

$$(5) \quad Z_x \text{ errechnet sich durch } Z_x = Z_n * \frac{R_1}{R_2}$$

Rechnungen zu 1.2

Auf der Widerstandskombination ist der Einzelwiderstand mit 390 Ω angegeben.

Raumdiagonale (RD) :

$$(7) \quad R_{ers} = \frac{5}{6} R$$
$$R_{ers} = 325 \Omega$$

Flächendiagonale (FD) :

$$(9) \quad R_{ers} = \frac{3}{4} R$$
$$R_{ers} = 292,5 \Omega$$

Würfelkante (WK) :

$$(8) \quad R_{ers} = \frac{7}{12} R$$

$$R_{ers} = 227,5 \, \Omega$$

Messergebnisse 1.3

Messung bei 5 V und 500 Hz

	R_1	R_2	Z_n	Z_x (errechnet)
Kondensator 1	5,1	4,9	1 μ F	0,96 μ F
Kondensator 2	4,64	5,36	8,2 μ F	9,47 μ F
Reihenschaltung	5,34	4,66	1 μ F	0,827 μ F
Parallelschaltung	4,39	5,61	8,2 μ F	10,48 μ F

Tabelle 2 : Messergebnisse 1.3

Nach Vertauschen von Z_n und Z_x erhielten wir die gleichen Werte.

(5) Z_x errechnet sich durch $Z_x = Z_n * \frac{R_2}{R_1}$

Messergebnisse 1.4

Messung bei 5 V und 500 Hz

	R_1	R_2	Z_n	Z_x (errechnet)
Induktivität	5,55	4,45	2,86 mH	3,57 mH

Tabelle 3 : Messergebniss 1.4

Nach Vertauschen von Z_n und Z_x erhielten wir die gleichen Werte.

(5) Z_x errechnet sich durch $Z_x = Z_n * \frac{R_1}{R_2}$

Messergebnisse 1.5

Widerstände:

	Ergebnis
Raumdiagonale	325 Ω
Flächendiagonale	294 Ω
Würfelkante	227 Ω

Tabelle 4: Messergebnisse für Widerstände

Kondensatoren:

Die Kapazität eines Kondensators berechnet sich mit der Kleinmessbrücke durch:

$$C_x = 3 * \frac{C_n}{Wert}$$

mit Wert = abgelesener Wert

	C_n	Wert	C_x
Kondensator 1	3,3μF	10,2	0,97μF
Kondensator 2	8,2μF	2,6	9,46μF

Tabelle 5: Messergebnisse für Kondensatoren

Induktivität:

Die Induktivität einer Spule berechnet sich mit der Kleinmessbrücke durch:

$$L_x = \frac{1}{3} * L_n * Wert$$

mit Wert = abgelesener Wert

L_n	2,86mH
Wert	3,65

L_x	3,48mH
-------	--------

Tabelle 6: Messergebnisse für Spule

5. Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten werden am kleinsten, wenn die Brücke in der Mitte des Schleifdrahtes abgeglichen werden kann (also bei $x = \frac{l}{2}$).

Hier ist die durch eine Einstell – oder Ableseunsicherheit Δx hervorgerufene relative Unsicherheit $\frac{\Delta R_x}{R_x}$ am kleinsten.

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\left(\Delta \left(\frac{x}{l-x} \right) \right)}{\left(\frac{x}{l-x} \right)} = \frac{((l-x)\Delta x + x\Delta x)}{x(l-x)} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{l-x} \quad (19)$$

Durch Ableiten und Nullsetzen ergibt sich $x = \frac{l}{2}$ als Minimum.

Außerdem sinkt die Einstellsicherheit der Brückenmessung mit der Empfindlichkeit des Strommessers und der Größe der Spannung U

lineare Fehlerfortpflanzung :

$$\Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_n} \right| * \Delta R_n + \left| \frac{\partial R_x}{\partial x} \right| * \Delta x = \left| \frac{x}{l-x} \right| * \Delta R_n + \left| R_n * \frac{l}{(l-x)^2} \right| * \Delta x \quad (20)$$

nach Vertauschen von R_x und R_n :

$$\Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_n} \right| * \Delta R_n + \left| \frac{\partial R_n}{\partial x} \right| * \Delta x = \left| \frac{l-x}{x} \right| * \Delta R_n + \left| R_n * \frac{l}{x^2} \right| \Delta x \quad (21)$$

relative Messunsicherheit:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_n}{R_n} + \frac{l}{l-x} * \frac{\Delta x}{x} \quad (22)$$

mit Fehler der Normalen $\Delta R_n = 0,05 * R_n$

und Fehler Wendepotentiometer $\Delta x = 0,025 * x \left(\text{bei } x = \frac{l}{2} \right)$

Für Induktivitäten gelten die gleichen Formeln, für Kapazitäten die der jeweiligen anderen Anordnung.

Fehler der Kleinmessbrücke :

ohmsche Widerstände 1 %

Kapazitive Widerstände 4 %

induktive Widerstände 5 %

Messobjekt	Fehler der Normalen ΔR_n	Fehler Versuchsaufbau ΔR_x	Fehler technische Kleinmessbrücke
Raumdiagonale	$Z_n = 300 \Omega$ $\Delta R_n = 15 \Omega$	$\Delta R_x = 33,35 \Omega$	3,25 Ω
Flächendiagonale	$Z_n = 200 \Omega$ $\Delta R_n = 10 \Omega$	$\Delta R_x = 32,83 \Omega$	2,94 Ω
Würfelkante	$Z_n = 100 \Omega$ $\Delta R_n = 5 \Omega$	$\Delta R_x = 30,07 \Omega$	2,27 Ω
Kondensator 1	$Z_n = 1 \mu F$ $\Delta R_n = 0,05 \mu F$	$\Delta R_x = 0,097 \mu F$	0,0388 μF
Kondensator 2	$Z_n = 8,2 \mu F$ $\Delta R_n = 0,41 \mu F$	$\Delta R_x = 0,737 \mu F$	0,378 μF
Reihenschaltung	$Z_n = 1 \mu F$ $\Delta R_n = 0,05 \mu F$	$\Delta R_x = 0,051 \mu F$	
Parallelschaltung	$Z_n = 2,86 mH$ $\Delta R_n = 0,143 mH$	$\Delta R_x = 0,38 mH$	

Spule (Induktivität)	$Z_n = 2,86 \text{ mH}$ $R_n = 0,143 \text{ mH}$	$\Delta R_x = 0,38 \text{ mH}$	0,174 mH
-------------------------	---	--------------------------------	----------

Tabelle 7 : absolute Fehler

6. Zusammenfassung

	Normale	Messgröße	Kleinmessbrücke (1.5)
1.1			
Raumdiagonale	$(300 \pm 15) \Omega$	$(326,305 \pm 33,35) \Omega$	$(325 \pm 3,25) \Omega$
Flächendiagonale	$(200 \pm 10) \Omega$	$(293,827 \pm 32,83) \Omega$	$(294 \pm 2,94) \Omega$
Würfelkante	$(100 \pm 5) \Omega$	$(227,869 \pm 30,07) \Omega$	$(227 \pm 2,27) \Omega$
1.3			
Kondensator 1	$(1 \pm 0,05) \mu\text{F}$	$(0,96 \pm 0,097) \mu\text{F}$	$(0,97 \pm 0,0388) \mu\text{F}$
Kondensator 2	$(8,2 \pm 0,41) \mu\text{F}$	$(7,1 \pm 0,737) \mu\text{F}$	$(9,46 \pm 0,378) \mu\text{F}$
Reihenschaltung	$(1 \pm 0,05) \mu\text{F}$	$(0,872 \pm 0,051) \mu\text{F}$	
Parallelschaltung	$(8,2 \pm 0,41) \mu\text{F}$	$(10,48 \pm 0,991) \mu\text{F}$	
1.4			
Spule (Induktivität)	$(2,86 \pm 0,143) \text{ mH}$	$(3,57 \pm 0,38) \text{ mH}$	$(3,48 \pm 0,174) \text{ mH}$

Tabelle 8: Zusammenfassung

7. Diskussion

Bei $x = \frac{l}{2}$ hat der relative Fehler ein Minimum. Wir konnten nicht immer realisieren, dass der Messschieber genau in der Mitte des Potentiometers ist. Dennoch haben wir sehr gute Messwerte erreicht. Unsere mit der *Wheatstoneschen Messbrücke* ermittelten Werte stimmen in etwa mit den mit Hilfe der Kleinmessbrücke ermittelten Werten überein. Sie liegen sogar in den Fehlergrenzen der Kleinmessbrücke.

Auch die in 1.2 errechneten Werte für die Raumdiagonale, Flächendiagonale und Würfelkante stimmen mit den in 1.1 ermittelten Werten überein.

Die Werte für die Kondensatoren 1 und 2 bestätigen sich auch durch das Überprüfen mit der Kleinmessbrücke.

Außerdem bestätigt sich unser ermittelter Wert für die Parallelschaltung der beiden Kondensatoren durch die Rechnung:

Parallelschaltung zweier Kondensatoren : $C_{ges} = C_1 + C_2$
in unserem Fall: $0,96 \mu\text{F} + 9,47 \mu\text{F} = 10,43 \mu\text{F}$ ($10,48 \mu\text{F}$ gemessen)

Selbes gilt für die Reihenschaltung:

Reihenschaltung zweier Kondensatoren: $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

In unserem Fall: $C_{ges} = 0,872\mu F$ ($0,872\mu F$ gemessen)

Auch der im Experiment ermittelte Wert für die Spule bestätigt sich durch das Prüfen mit der technischen Kleinmessbrücke.

	Wheatstonesche Messbrücke	Technische Kleinmessbrücke
Raumdiagonale	326,31 Ω	325 Ω
Flächendiagonale	293,83 Ω	294 Ω
Würfelkante	227,87 Ω	227 Ω
Kondensator 1	0,96 μF	0,97 μF
Kondensator 2	9,47 μF	9,46 μF
Reihenschaltung	0,872 μF	0,97 μF
Parallelschaltung	10,48 μF	10,43 μF (durch Rechnen)
Spule	3,57 mH	3,48 mH

Tabelle 9 : Übersicht

8.Literatur

- W. Walcher, Praktikum der Physik, BG Teubner Stuttgart
- http://www.iep.ovgu.de/iep_media/grundpraktikum/bdm.pdf
- Stroppe, Physik
- „Physik“ Horst Kuchling, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 18. Auflage 1987

M23

Eigenfrequenz einer Saite

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

M23 – Eigenfrequenz einer Saite

Aufgabenstellung

- 1.1 Die Eigenschwingungen einer gespannten Saite sind zu analysieren, die Eigenfrequenz f der Grundschiwingung ist in Abhängigkeit von der Spannkraft F für 3 unterschiedliche Saitenlängen $l \geq 40\text{cm}$ mit Hilfe von Lissajous-Figuren experimentell zu bestimmen.
- 1.2 Die Frequenzen f der Grundschiwingung sind für die in 1.1 verwendeten Spannkraften F und Saitenlängen l zu berechnen. Berechnete und experimentell bestimmte Frequenzen sind als Funktion von \sqrt{F} graphisch darzustellen und miteinander zu vergleichen, Abweichungen sind zu diskutieren.
- 1.3 Aus den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen ist die Phasengeschwindigkeit c der Seilwelle längs der Saite zu berechnen und als Funktion von \sqrt{F} graphisch darzustellen.

Grundlagen zum Versuch

Wird eine Saite angeregt, so entstehen auf dieser senkrecht schwingende Transversalwellen. Transversalwellen sind Wellen, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen.

Für eine Schwingung mit zwei festen Enden gilt

$$f = n * c / 2l \quad (1)$$

f : Frequenz

n : Anzahl der (ganzzahligen) Schwingungsbäuche

c : Ausbreitungsgeschwindigkeit

l : Saitenlänge

Für die Ausbreitungs(/Phasen-)geschwindigkeit gilt außerdem

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad (2)$$

F : spannende Kraft (in x-Richtung)

ρ : Dichte der Saite

A : Querschnittsfläche der Saite

Aus (1) und (2) folgt für die Eigenfrequenz f_0 einer Saite

$$f_0 = \frac{1}{2 * l} * \sqrt{\frac{F}{\rho * A}} \quad (3)$$

Die Phasengeschwindigkeit einer Schwingung lässt sich auch berechnen mit

$$c = f * \lambda \quad (4)$$

wobei sich die Wellenlänge λ bestimmen lässt durch

$$\lambda = 2 * l / n \quad (5)$$

Versuchsaufbau

Um die Schwingungen der Saite auswerten zu können, werden diese durch einen induktiven Sensor in Spannungsänderungen umgewandelt. Diese Spannungsänderungen werden den Vertikalablenkplatten eines Oszilloskops zugeführt.

An die Horizontalablenkplatten des Oszilloskops wird daraufhin eine harmonische Ausgangsspannung aus einem Tonfrequenzgenerators angelegt. Durch Überlagerung dieser beiden Schwingungen entstehen auf dem Bildschirm des Oszilloskops sogenannte Lissajous-Figuren. Bei Gleichheit dieser beiden Frequenzen entstehen Kreise, Ellipsen oder Geraden.

Daraufhin kann die Frequenz der Saite direkt am Tonfrequenzgenerator abgelesen werden.

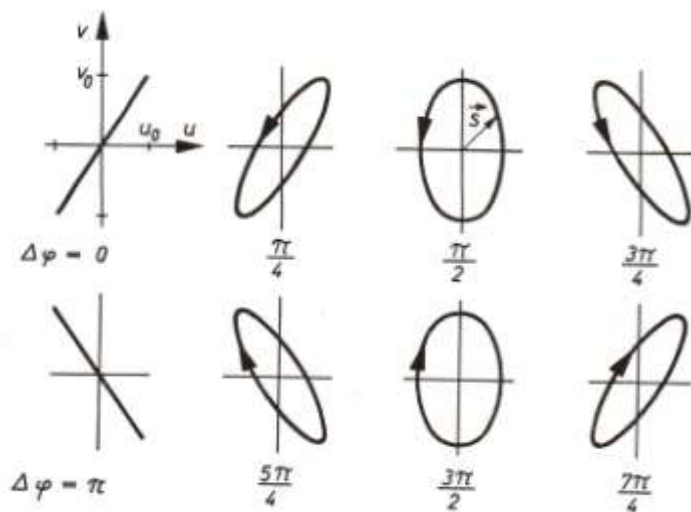


Bild 1: Lissajous-Figuren bei Gleichheit der beiden Frequenzen

Messergebnisse

Das Gewicht der Waagschale mittels Federkraftmesser: $7,8 \text{ N}$ (ca. 780 g)

10 verschiedene Gewichte: 50 g , 100 g , 500 g , 1 kg , 2 kg , 3 kg , 4 kg , 5 kg , 6 kg , 8 kg

in Spannkraften: $0,49 \text{ N}$, $0,98 \text{ N}$, $4,9 \text{ N}$, $9,8 \text{ N}$, $19,6 \text{ N}$, $29,4 \text{ N}$, $39,2 \text{ N}$, $49,0 \text{ N}$, $58,8 \text{ N}$, $78,4 \text{ N}$

→ hier jeweils noch $7,8 \text{ N}$ drauf rechnen

Dichte von den Stahlsaiten: $\rho = 9351 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Durchmesser der Saiten:

Messung	Durchmesser der Saite
1	0,4 mm
2	0,39 mm
3	0,39 mm
4	0,38 mm
5	0,39 mm
6	0,39 mm
7	0,39 mm
8	0,38 mm
9	0,39 mm
10	0,38 mm

Tabelle 1: Durchmesser

$$\bar{d} = 0,388 \text{ mm}$$

Querschnittsfläche der Saite : $A = \frac{\pi}{4} * d^2$

Messergebnisse 1.1

Masse der Gewichte	Frequenz bei 40 cm	Frequenz bei 50 cm	Frequenz bei 60 cm
50g	112 Hz	94 Hz	81 Hz
100g	117 Hz	97 Hz	84 Hz
500g	135 Hz	107 Hz	93 Hz
1kg	156 Hz	123 Hz	102 Hz
2kg	195 Hz	155 Hz	132 Hz
3kg	245 Hz	180 Hz	150 Hz

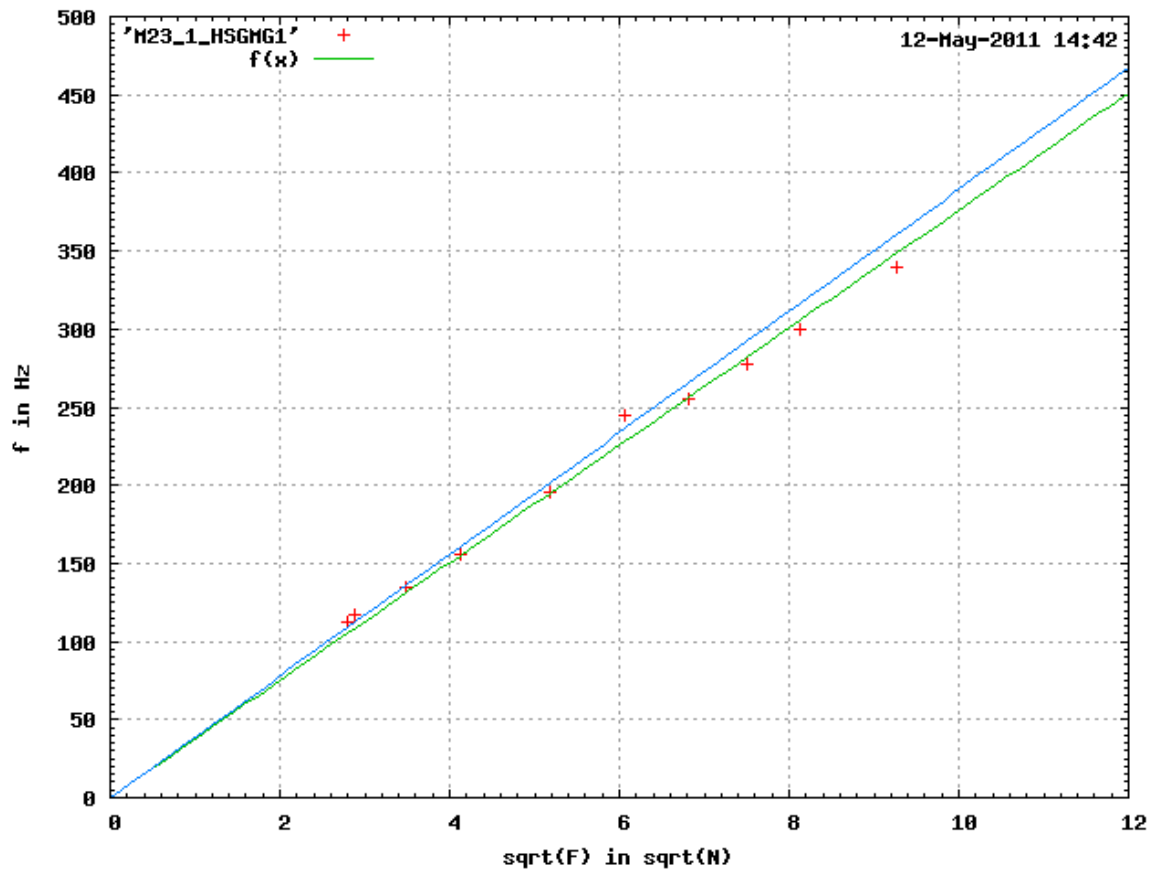
4kg	255 Hz	202 Hz	168 Hz
5kg	278 Hz	224 Hz	183 Hz
6kg	300 Hz	240 Hz	226 Hz
8kg	340 Hz	283 Hz	238 Hz

Tabelle 2: Messergebnisse 1.1

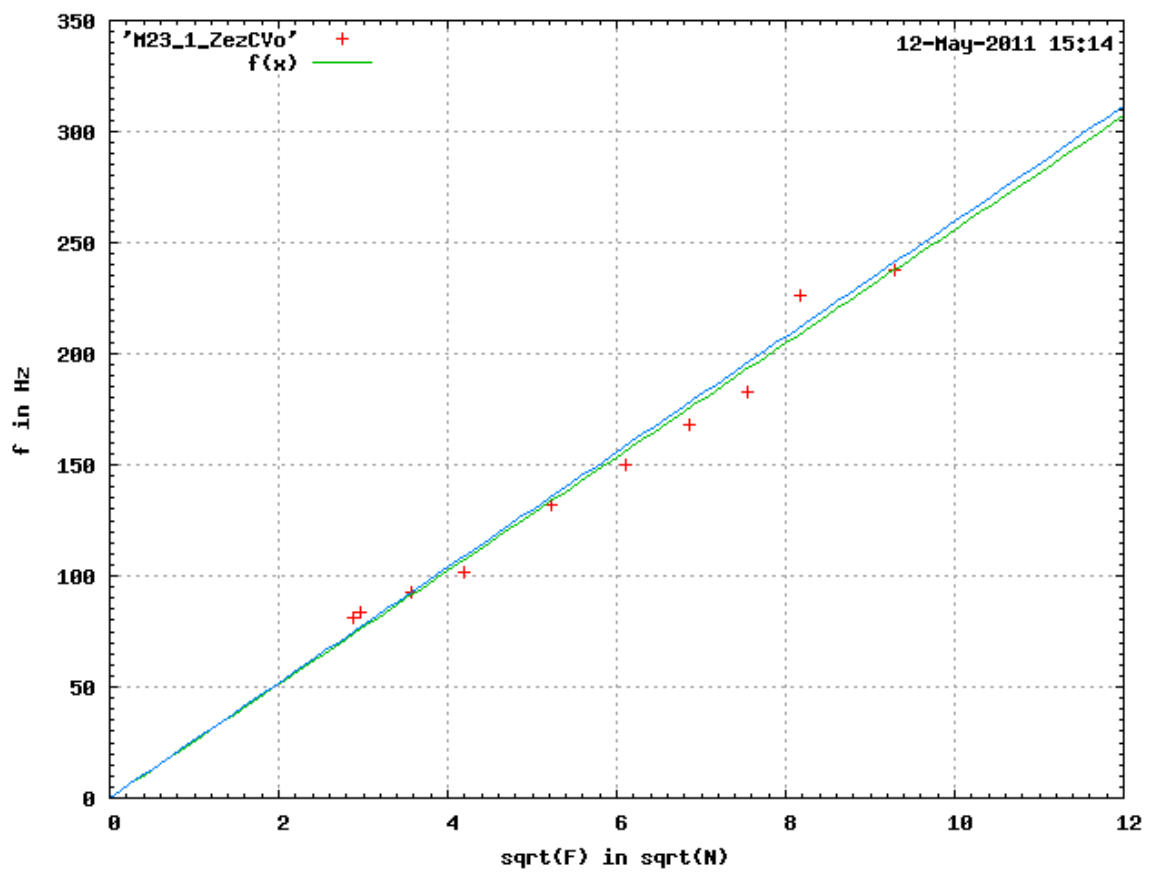
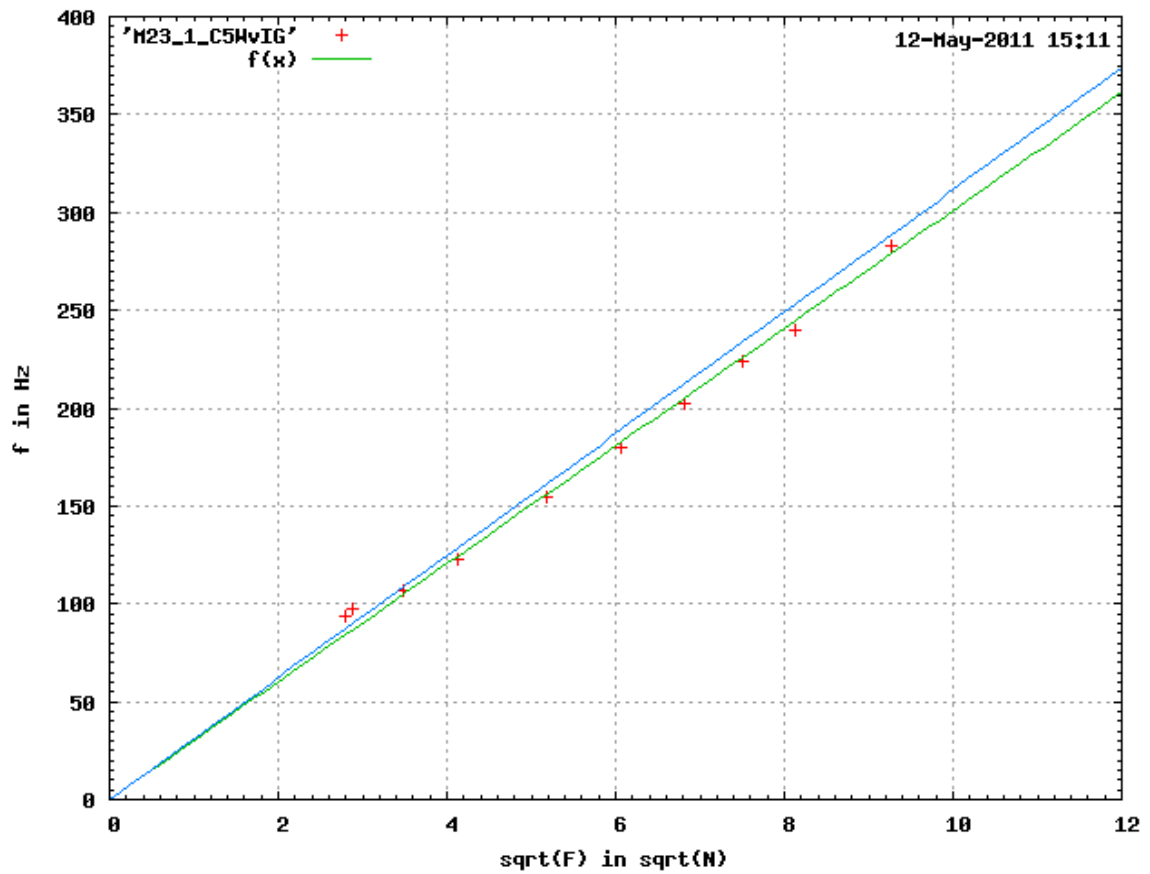
Ergebnisse 1.2

Masse der Gewichte	Frequenz bei 40 cm (errechnet)	Frequenz bei 50 cm (errechnet)	Frequenz bei 60 cm (errechnet)
50 g	108,26 Hz	86,6 Hz	72,2 Hz
100g	111,4 Hz	89,1 Hz	74,3 Hz
500g	134,0 Hz	107,2 Hz	89,3 Hz
1kg	157,7 Hz	126,2 Hz	105,2 Hz
2kg	196,8 Hz	157,5 Hz	131,2 Hz
3kg	229,3 Hz	183,5 Hz	152,9 Hz
4kg	257,8 Hz	206,2 Hz	171,9 Hz
5kg	283,4 Hz	226,7 Hz	188,9 Hz
6kg	306,8 Hz	245,5 Hz	204,6 Hz
8kg	349,1 Hz	279,3 Hz	232,7 Hz

Tabelle 3: errechnete Frequenzen 1.2



Grafik 1: Vergleich bei $l=0,4\text{m}$



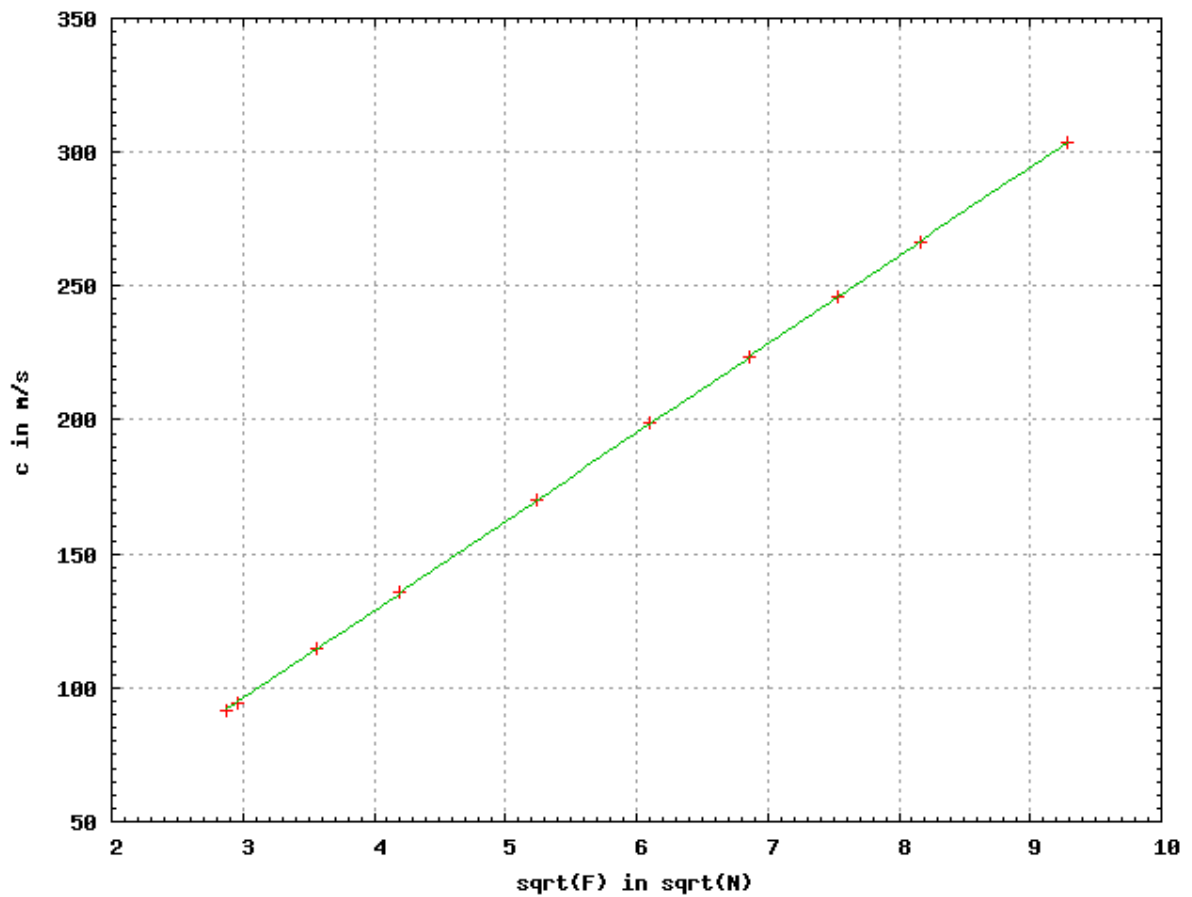
Graphik 2: Vergleich bei $l=0,5$ m

Grafik 3: Vergleich bei $l=0,6\text{ m}$

Ergebnisse 1.3

Masse der Gewichte	Spannkraft F	Phasengeschwindigkeit c
jeweils + ca 780g		
50g	0,49N + 7,8N	91,5 m/s
100g	0,98N + 7,8N	94,3 m/s
500g	4,9N + 7,8N	114,5 m/s
1kg	9,8N + 7,8N	135,6 m/s
2kg	19,6N + 7,8N	170,1 m/s
3kg	29,4N + 7,8N	198,6 m/s
4kg	39,2N + 7,8N	223,6 m/s
5kg	49,0N + 7,8N	246,0 m/s
6kg	58,8N + 7,8N	266,6 m/s
8kg	78,4N + 7,8N	303,5 m/s

Tabelle 4: Phasengeschwindigkeit 1.3



Grafik 4: c als Funktion von \sqrt{F}

Messunsicherheiten

$$\Delta f = \left| \frac{\Delta f}{\Delta l} \right| * \Delta l + \left| \frac{\Delta f}{\Delta F} \right| * \Delta F + \left| \frac{\Delta f}{\Delta A} \right| * \Delta A$$

$$\Delta f = \left| -\frac{1}{2 * l^2} * \sqrt{\left(\frac{F}{A * \delta}\right)} * \Delta l \right| + \left| \frac{\Delta F}{4 * l * A \delta * \sqrt{\frac{F}{A * \delta}}} \right| + \left| -\frac{\Delta A}{4 * l * A^2 * \delta * \sqrt{\frac{F}{A * \delta}}} \right|$$

Abweichung der Länge:

$$\Delta l = 3 \text{ mm}$$

Abweichung der Fläche:

$$d_{\text{max}} = 0,4 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} d_{\text{min}} = 0,38 \text{ mm} \rightarrow \Delta d = 0,01 \text{ mm} \rightarrow \Delta A &= \frac{\pi}{4} * \Delta d^2 = 0,000078539 \text{ mm}^2 \\ &= 0,0000000000 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\bar{d} = 0,388 \text{ mm}$$

Abweichung der Gewichte:

$$50 \text{ g} \pm 50 \text{ mg}$$

$$100 \text{ g} \pm 50 \text{ mg}$$

$$500 \text{ g} \pm 50 \text{ mg}$$

$$1 \text{ kg} \pm 50 \text{ mg}$$

$$2 \text{ kg} \pm 50 \text{ mg}$$

$$3 \text{ kg} \pm 50 \text{ mg} \quad \rightarrow \Delta F = 50 * 10^{-6} \text{ kg} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,905 * 10^{-4} \text{ N}$$

$4\text{kg} \pm 50\text{mg}$

$5\text{kg} \pm 50\text{mg}$

$6\text{kg} \pm 50\text{mg}$

$8\text{kg} \pm 50\text{mg}$

Fehlerfortpflanzung für $l=0,4\text{ m}$:

Masse der Gewichte	Fehlerfortpflanzung Δf	Intervall für Δf	Berechnetes f
50 g	0,82 Hz	107,44 Hz ... 109,08 Hz	108,26 Hz
100 g	0,84 Hz	110,56 Hz ... 112,24 Hz	111,4 Hz
500 g	1,01 Hz	132,99 Hz ... 135,01 Hz	134,0 Hz
1 kg	1,19 Hz	156,51 Hz ... 158,89 Hz	157,7 Hz
2 kg	1,48 Hz	195,32 Hz ... 198,28 Hz	196,8 Hz
3 kg	1,72 Hz	227,58 Hz ... 231,02 Hz	229,3 Hz
4 kg	1,94 Hz	255,86 Hz ... 259,74 Hz	257,8 Hz
5 kg	2,13 Hz	281,27 Hz ... 285,53 Hz	283,4 Hz
6 kg	2,30 Hz	304,5 Hz ... 309,1 Hz	306,8 Hz
8 kg	2,62 Hz	346,48 Hz ... 351,72 Hz	349,1 Hz

Tabelle 5 : Fehlerfortpflanzung bei $l = 0,4\text{ m}$

Fehlerfortpflanzung für $l=0,5\text{ m}$:

Masse der Gewichte	Fehlerfortpflanzung Δf	Intervall für Δf	Berechnetes f
50 g	0,53 Hz	86,07 Hz ... 87,13 Hz	86,6 Hz
100 g	0,54 Hz	88,56 Hz ... 89,64 Hz	89,1 Hz
500 g	0,65 Hz	106,55 Hz ... 107,85 Hz	107,2 Hz
1 kg	0,76 Hz	125,44 Hz ... 126,96 Hz	126,2 Hz
2 kg	0,95 Hz	156,55 Hz ... 158,45 Hz	157,5 Hz

3 kg	1,10 Hz	182,4 Hz ... 184,6 Hz	183,5 Hz
4 kg	1,24 Hz	204,96 Hz ... 207,44 Hz	206,2 Hz
5 kg	1,36 Hz	225,34 Hz ... 228,06 Hz	226,7 Hz
6 kg	1,47 Hz	244,03 Hz ... 246,97 Hz	245,5 Hz
8 kg	1,68 Hz	277,62 Hz ... 280,98 Hz	279,3 Hz

Tabelle 6: Fehlerfortpflanzung bei $l=0,5$ m

Fehlerfortpflanzung für $l=0,6$ m:

Masse der Gewichte	Fehlerfortpflanzung Δf	Intervall für Δf	Berechnetes f
50 g	0,37 Hz	71,83 Hz ... 72,57 Hz	72,2 Hz
100 g	0,38 Hz	73,92 Hz ... 74,68 Hz	74,3 Hz
500 g	0,45 Hz	88,85 Hz ... 89,75 Hz	89,3 Hz
1 kg	0,53 Hz	104,67 Hz ... 105,73 Hz	105,2 Hz
2 kg	0,66 Hz	130,54 Hz ... 131,86 Hz	131,2 Hz
3 kg	0,77 Hz	151,13 Hz ... 153,67 Hz	152,9 Hz
4 kg	0,86 Hz	171,04 Hz ... 172,76 Hz	171,9 Hz
5 kg	0,95 Hz	187,95 Hz ... 189,85 Hz	188,9 Hz
6 kg	1,02 Hz	203,6 Hz ... 205,62 Hz	204,6 Hz
8 kg	1,17 Hz	231,53 Hz ... 233,87 Hz	232,7 Hz

Tabelle 7: Fehlerfortpflanzung bei $l=0,6$ m

Zusammenfassung und Diskussion

Wie man erkennt, sind die errechneten Abweichungen Δf sehr gering. Da es nicht möglich war die Frequenzen genauer als ein Hertz einzustellen, kann man bei den errechneten Abweichungen nicht von realistischen Fehlergrenzen sprechen.

Man muss die Abweichung des Tonfrequenzgenerators beachten. Sie beträgt 1,5 %.

Diese Abweichung und die Tatsache, dass es nicht möglich war die Frequenz genau einzustellen und optimale Lissajous- Figuren zu erreichen, sind Grund für unsere nicht zu großen Abweichungen von gemessenen und errechneten Frequenzen.

Literatur

- Stroppe, Physik
- http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M23_1.php
- <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/lreg.php>

03

Krümmungsradius von Linsen und Spiegeln

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

03 – Krümmungsradius von Linsen und Spiegeln

Aufgabenstellung

- 1.1 Die Krümmungsradien der beiden konvexen Flächen einer Sammellinse sind nach der Methode von Kohlrausch durch lineare Regression zu bestimmen. Aus den beiden Krümmungsradien ist die Brennweite der Sammellinse zu berechnen.
- 1.2 Die Krümmungsradien der beiden konkaven Flächen einer Zerstreuungslinse sind mit Hilfe des Autokollimationsverfahrens zu bestimmen. Aus den Krümmungsradien ist die Brennweite zu berechnen.
- 1.3 Krümmungsradius und Brennweite eines Hohlspiegels sind durch Autokollimation zu bestimmen.
- 1.4 Die Krümmungsradien der beiden sphärischen Flächen einer Linse sind mit dem Ringsphärometer (Tiefentaster) mehrfach zu bestimmen. Aus den Krümmungsradien ist die Brennweite zu berechnen.

Grundlagen zum Versuch

Linsen: Als Linsen bezeichnet man Körper aus durchsichtigem Material, die durch zwei kugelförmige Flächen begrenzt werden. Eine solche Fläche ist konvex, wenn sie sich nach außen krümmt und konkav, wenn sie sich nach innen krümmt. Ein Lichtstrahl wird an jeder dieser Flächen gebrochen. Da es sich in unserem Versuch jedoch um dünne Linsen handelt, kann man dies Vereinfachen, indem man den einfallenden und den austretenden Strahl bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert. All diese Schnittpunkte liegen dann annähernd auf einer Ebene h .

Bei konvexen Linsen befindet sich der imaginäre Bildpunkt P' auf der entgegengesetzten Seite der Linse, während er sich bei konkaven Linsen auf der gleichen Seite wie die Lichtquelle P befindet.

Bei einer konvexen Linse werden parallel laufende Lichtbündel in konvergente Lichtbündel verwandelt, die sich im hinter der Linse liegenden Brennpunkt F' schneiden. Bei konkaven Linsen werden parallel laufende Lichtbündel in divergente Lichtbündel verwandelt, die sich in einem Brennpunkt F' schneiden, der vor der Linse liegt.

Methode von Kohlrausch: Bei diesem Verfahren befinden sich vor der Linse zwei Leuchtpunkte (1 & 2) mit demselben Abstand G zur optischen Achse. Die beiden Marken besitzen einen Abstand g zur Linse. Um nun den Abstand B der Bilder (1' & 2') und deren Abstand b zur Linse zu messen, bringt man direkt vor der Linse eine Skala an. Mit einem Fernrohr, das sich auf der optischen Achse befindet, kann man diese Skala nun ablesen.

Es gilt der Strahlensatz:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

Für den Krümmungsradius R gilt:

$$R = \frac{2 \cdot g \cdot B}{G - 2B} \quad (2)$$

Um die Brennweite f einer bikonvexen Linse zu berechnen gilt:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

mit $n = 1,52$ für Kronglas

R_1, R_2 : Krümmungsradien der beiden Seiten

Autokollimationsverfahren: Hinter die Linse wird ein Planspiegel gestellt, der das imaginäre Bild P' wieder zurück durch die Linse schickt. Befindet sich das scharfe Bild von P'' genau auf der Gegenstandsebene von P, so ist die Gegenstandsweite gleich der Brennweite. Der Abstand zwischen der Linsenmitte und der Gegenstandsebene entspricht dem Krümmungsradius R.

Dieses Verfahren ist nicht bei konvexen Flächen anwendbar, da bei diesen virtuelle Bilder entstehen.

Um nun aus den beiden gemessenen Krümmungsradien die Brennweite der Linse zu bestimmen, gilt die Formel (3).

Ringsphärometer: Ein Ringsphärometer besteht aus einem flachen Hohlzylinder, auf welchen man die Linse auflegen kann. Mithilfe eines Messfühlers kann man nun die Absenkung oder Wölbung der Linse relativ zur Nulllage bestimmen. Um das Ringsphärometer zu kalibrieren, legt man eine planparallele Platte auf.

Der Krümmungsradius berechnet sich nun durch:

$$R = \frac{d^2}{8t} + \frac{t}{2} \quad (4)$$

mit d: Innendurchmesser des Hohlzylinders

t: Absenkung/Wölbung der Linse

Die Brennweite der Linse errechnet sich aus (3).

Spiegel: An einem Hohlspiegel (auch Konkavspiegel) werden Strahlen reflektiert. Ähnlich wie bei der konkaven Linse befinden sich auf der optischen Achse der Brennpunkt F, der die Brennweite f vom Spiegel entfernt ist. Dabei gilt:

$$f = \frac{R}{2} \quad (5)$$

mit R: Krümmungsradius des Spiegels

Um den Krümmungsradius des Spiegels zu berechnen, wenden wir erneut das Autokollimationsverfahren an.

Messergebnisse

Messergebnisse 1.1

Seite A

	B' (Bildpunktabstand)	G (Abstand der Licht-marken)	g (Abstand Lichtmarkenebene – Linse)
1	2,3 mm	51 mm	88,3 cm
2	3,0 mm	61 mm	88,3 cm
3	3,4 mm	71 mm	88,3 cm
4	3,6 mm	70 mm	88,3 cm
5	3,5 mm	68 mm	88,3 cm
6	3,8 mm	67 mm	88,3 cm
7	3,4 mm	65 mm	88,3 cm
8	3,2 mm	63 mm	88,3 cm
9	2,0 mm	59 mm	88,3 cm
10	2,8 mm	55 mm	88,3 cm

Tabelle 1 : Seite A

Seite B

	B' (Bildpunktabstand)	G (Abstand der Licht-marken)	g (Abstand Lichtmarkenebene – Linse
1	2,4 mm	51 mm	88,3 cm
2	2,3 mm	50 mm	88,3 cm
3	2,7 mm	57 mm	88,3 cm
4	2,9 mm	61 mm	88,3 cm
5	2,0 mm	64 mm	88,3 cm
6	2,2 mm	68 mm	88,3 cm
7	2,4 mm	70 mm	88,3 cm
8	3,5 mm	70 mm	88,3 cm
9	3,6 mm	80 mm	88,3 cm
10	2,9 mm	60 mm	88,3 cm

Tabelle 2 : Seite B

Krümmungsradius – Berechnung :

$$(2) \quad R = \frac{2 \cdot g \cdot B}{G - 2B}$$

	Seite A	Seite B
1	87,5mm	91 mm
2	96,3mm	89,5 mm
3	93,5 mm	92,4 mm
4	101,2 mm	92,8 mm
5	101,3 mm	60 mm
6	113 mm	61,1 mm
7	103,2 mm	65 mm
8	99,8 mm	98 mm
9	64,2 mm	87,3mm
10	100,1 mm	94,4mm
\overline{R}	96 mm	83,2 mm

Tabelle 3:
Krümmungsradius

Brennweite:

$$(3) \quad \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{mit } n = 1,52$$

→ f = 85,7 mm

Messergebnisse 1.2

Seite 1	Seite 2
10 cm	10,2 cm
9,8 cm	10,1 cm
10,2 cm	10,2 cm
10,1 cm	10,2 cm
10, 2 cm	10,2 cm
10,1 cm	10,2 cm
$\overline{R} = 10,07 \text{ cm}$	$\overline{R} = 10,18 \text{ cm}$

Tabelle 4 : Messergebnisse 1.2

Berechnung der Brennweite :

$$(3) \quad \frac{1}{f} = (n - 1) * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{mit } n = 1,52$$

$$\rightarrow f = 9,74 \text{ cm}$$

Messergebnisse 1.3

Durch mehrmaliges Überprüfen ergab sich der Krümmungsradius $R = 41,1 \text{ cm}$.

Berechnung der Brennweite:

$$(5) \quad f = \frac{R}{2}$$

$$\rightarrow f = 20,55 \text{ cm}$$

Messergebnisse 1.4

Nullpunkt bei 0,04 mm

Seite 1	Seite 2
3,175 mm – 0,04mm = 3,171mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,17 mm – 0,04mm = 3,166mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,175 mm – 0,04mm = 3,171mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm	3,18 mm – 0,04mm = 3,176mm
t = 3,175 mm	t = 3,175 mm

Tabelle 5: Messergebnisse 1.4 Ringsphärometer

$$d = 45 \text{ mm}$$

Berechnungen zu 1.4 :

$$(4) \quad \underline{\text{Krümmungsradius:}} \quad R = \frac{d^2}{8t} + \frac{t}{2}$$

$$R_1 = 81,2 \text{ mm}$$

$$R_2 = 81,2 \text{ mm}$$

$$(3) \quad \underline{\text{Brennweite:}} \quad f = 78,08 \text{ mm}$$

Messunsicherheiten

zu 1.1

$$\Delta R = \left| \frac{(2gG)}{(G-2B)^2} \right| * \Delta B + \left| -\frac{2gB}{(G-2B)^2} * \Delta G \right|$$

zu 1.4

$$\Delta R = \left| \frac{1}{2} - \frac{d^2}{8t^2} \right| * \Delta t$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta f = \left| -\left(\left(\frac{n-1}{R_1} \right) + \left(\frac{n-1}{R_2} \right) \right)^{-2} * \left(-\frac{n-1}{R_1^2} \right) \right| * \Delta R_1 \\ + \left| -\left(\left(\frac{n-1}{R_1} \right) + \left(\frac{n-1}{R_2} \right) \right)^{-2} * \left(-\frac{n-1}{R_2^2} \right) \right| * \Delta R_2$$

wobei:

$$\begin{aligned} \Delta B &= 0,5mm \\ \Delta G &= 0,5mm \\ \Delta t &= 0,001mm \\ \Delta R_1 &= 1mm \\ \Delta R_2 &= 1mm \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Fehlerrechnung 1.1

	ΔR_1 (Seite A)	ΔR_2 (Seite B)
1	21,85 mm	22,1 mm
2	17,6 mm	22,4 mm
3	15,95 mm	19,7 mm
4	16,5 mm	18,5 mm
5	17 mm	16,2 mm
6	17,7 mm	15,3 mm
7	17,9 mm	15,0 mm
8	18,25 mm	16,4 mm
9	17,8 mm	13,9 mm

10	20,9 mm	18,9 mm
\bar{R}	18,15 mm	17,84 mm

Tabelle 6: Radius Messabweichung

	<i>Intervall R_1</i>	<i>Intervall R_2</i>
1	$65,7mm \leq R_1 \leq 109,35mm$	$68,9 mm \leq R_2 \leq 113,1mm$
2	$78,7mm \leq R_1 \leq 113,9mm$	$67,1 mm \leq R_2 \leq 111,9mm$
3	$77,6 mm \leq R_1 \leq 109,6mm$	$72,7mm \leq R_2 \leq 112,1mm$
4	$84,7 mm \leq R_1 \leq 117,7mm$	$74,3 mm \leq R_2 \leq 111,3mm$
5	$84,3 mm \leq R_1 \leq 118,3mm$	$43,8 mm \leq R_2 \leq 76,2mm$
6	$95,3 mm \leq R_1 \leq 130,7mm$	$45,8 mm \leq R_2 \leq 76,4mm$
7	$85,3 mm \leq R_1 \leq 121,1mm$	$50 mm \leq R_2 \leq 80mm$
8	$81,6 mm \leq R_1 \leq 118,5mm$	$81,6 mm \leq R_2 \leq 114,4mm$
9	$46,4 mm \leq R_1 \leq 82mm$	$73,4 mm \leq R_2 \leq 101,2mm$
10	$79,2 mm \leq R_1 \leq 121mm$	$75,5 mm \leq R_2 \leq 113,3mm$
\bar{R}	$77,85mm \leq \bar{R}_1 \leq 114,15mm$	$65,36mm \leq \bar{R}_2 \leq 101,04mm$

Tabelle 7: Radius Intervall

$$\Delta f = 20 mm$$

$$Intervall: 65,7 mm \leq f \leq 105,7 mm$$

Fehlerrechnung 1.2

$$\Delta f = 1 mm$$

$$Intervall: 96,4mm \leq f \leq 98,4mm$$

Fehlerrechnung 1.3

$$\Delta f = 1mm$$

$$Intervall : 19,55 mm \leq f \leq 21,55mm$$

Fehlerrechnung 1.4

$$\Delta R_1 = 0,8 mm$$

$$\Delta R_2 = 0,8 mm$$

$$Intervall \text{ für Radius: } 79,6 mm \leq R_1, R_2 \leq 81,2 mm$$

$$\Delta f = 0,96 \text{ mm}$$

$$\text{Intervall für Brennweite : } 77,12 \text{ mm} \leq f \leq 79,04 \text{ mm}$$

Diskussion

Die Intervalle der nach dem Autokollimationsverfahren berechneten Brennweiten sind sehr gering. Daher ist diese Methode eine sehr genaue Methode.

Die mit der Methode von Kohlrausch gemessenen Krümmungsradien und Brennweiten liegen in einem sehr großen Intervall. Diese Methode ist sehr ungenau, da durch das Betrachten und Messen durch das Fernrohr relativ große Fehler entstehen können.

Die Methode von Kohlrausch ist außerdem durch das Fernrohr die aufwendigste Methode. Das Ringsphärometer liefert eigentlich sehr genaue Ergebnisse, strapaziert jedoch die Linse mechanisch.

Wir haben ΔB so groß gewählt, weil die Lichtpunkte sehr unscharf und groß waren, und deren Abstand nur sehr schwer zu messen war. Auch deshalb weichen die gemessenen Werte für R so stark voneinander ab.

Literatur

- Stroppe, Physik
- W. Walcher, Praktikum der Physik, BG Teubner Stuttgart

W4

Spezifische Wärmekapazität von Festkörpern

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

W4 – Spezifische Wärmekapazität von Festkörpern

Aufgabenstellung

Die spezifische Wärmekapazität zweier fester Probekörper ist nach der Mischungsmethode zu bestimmen.

1.1 Die Wärmekapazität eines Kalorimeters ist mindestens zweimal nach der Mischungsmethode zu bestimmen. Die Mischungstemperatur ist durch Extrapolation aus dem Temperatur-Zeit-Diagramm zu ermitteln.

1.2 Die spezifische Wärmekapazität zweier Probekörper ist nach der Mischungsmethode zu bestimmen. Die Mischungstemperatur ist wieder aus dem Temperatur-Zeit-Diagramm zu ermitteln.

1.3 Die molare Masse des Probenmaterials ist nach der Regel von Dulong-Petit zu errechnen.

Grundlagen zum Versuch

Besitzen ein Körper und seine Umgebung eine unterschiedliche Temperatur, so findet zwischen dem Körper und seiner Umgebung ein Wärmeaustausch statt, bis beide eine gemeinsame Temperatur ϑ_m besitzen. Dieser Wärmeaustausch ist gleichzusetzen mit einem Austausch von Energie, da Wärme eine Erscheinungsform von Energie ist.

Für die ausgetauschte Wärmemenge ΔQ gilt nun:

$$\Delta Q = c * m * \Delta T \quad (1)$$

mit: c: konstanter Faktor

m: Masse des Körpers

ΔT : Temperaturänderung des Körpers während des Wärmeaustauschs

Den Faktor c nennt man auch *spezifische Wärmekapazität*. Innerhalb eines bestimmten Temperaturbereichs ist dieser konstant. Berechnen lässt sich der Faktor aus:

$$c = \frac{1}{m} * \frac{Q}{T_2 - T_1} \quad (2)$$

$$\text{Einheit: } [c] = 1 \frac{J}{kg * K}$$

Die in Gleichung (1) vorkommende Größe $c * m$ nennt man auch *Wärmekapazität des Körpers (C)*.

$$C = c * m \quad (3)$$

Diese gibt an, wie viel Wärmemenge benötigt wird, um einen Körper der Masse m um $1K$ zu erwärmen.

Kalorimeter: Ein Kalorimeter ist ein Gefäß, das eine bekannte Menge Flüssigkeit der Masse m_{FL} mit der Temperatur ϑ_{FL} enthält. Die Wärmekapazität C_K des Gefäßes und die spezifische Wärmekapazität c_{FL} der Flüssigkeit sind dabei bekannt.

Will man nun die spezifische Wärmekapazität einer anderen Flüssigkeit oder eines Festkörpers der Masse m bestimmen, so tut man diese in das Kalorimeter. Ist die Anfangstemperatur ϑ des Stoffes bekannt, lässt sich die spezifische Wärmekapazität über den Energieerhaltungssatz berechnen:

$$c * m * (\vartheta - \vartheta_M) = c_{FL} * m_{FL} * (\vartheta_M - \vartheta_{FL}) + C_K * (\vartheta_M - \vartheta_{FL}) \quad (4)$$

$$c = \frac{c_{FL} * m_{FL} + C_K}{m} * \frac{\vartheta_M - \vartheta_{FL}}{\vartheta - \vartheta_M} \quad (5)$$

ϑ_M entspricht dabei der Mischtemperatur, die das Thermometer anzeigt.

Diese Formeln gelten nur für isobare Prozesse.

Regel von Dulong-Petit: Ersetzt man die Masse in Gleichung (3) durch die molare Masse M , so erhält man die molare Wärmekapazität C_m eines Körpers.

$$C_m = c * M \quad (6)$$

Nach der Regel von Dulong-Petit kann man diese molare Wärmekapazität jedoch auch beschreiben über:

$$C_m = 3 * R \approx 25 \frac{J}{mol * K} \quad (7)$$

$$\text{mit } R \dots \text{ molare Gaskonstante} = 8,314 \frac{J}{mol * K}$$

Dies kommt daher, dass sich die einem Körper zugeführte Wärmeenergie sich gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade seiner Atome bzw Moleküle verteilt (Gleichverteilungssatz). In einem Festkörper haben diese Teilchen im günstigsten Fall 3 Freiheitsgrade in die drei Raumrichtungen. Aufgrund der Bindungskräfte besitzen die schwingenden Atome jedoch nicht nur kinetische, sondern auch potentielle Energie. Diese beiden Energien sind im zeitlichen Mittel gleich groß. So beträgt die molare Wärmekapazität

$$C_m = \frac{3 * R}{2} + \frac{3 * R}{2} = \frac{6 * R}{2} \quad (8)$$

Aus (6) und (7) folgt nun, dass man die Molmasse M eines Körpers errechnen kann aus:

$$M = \frac{C_m}{c} = \frac{3R}{c} \quad (9)$$

Messergebnisse

Messergebnisse 1.1

1. kaltes Wasser im Kalorimeter, heißes Wasser hinzufügen

1. kaltes Wasser im Kalorimeter

$$\vartheta = 28,4\text{ }^{\circ}\text{C} \quad m = 203,91\text{ g}$$

Vorperiode : (Messung alle 30 s)

t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$	t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$
0	28,1	180	28
30	28,1	210	28
60	28,1	240	27,9
90	28,1	270	27,9
120	28,1	300	27,9
150	28		

Tabelle 1 : Vorperiode 1

2. heißes Wasser hinzufügen

$$\vartheta = 48,6\text{ }^{\circ}\text{C} \quad m = 204,78\text{ g}$$

Hauptperiode: (Messung alle 5 s)

t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$	t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$
305	34,9	320	36,8
310	36,3	325	36,8

315	36,7	330	36,8
-----	------	-----	------

Tabelle 2 : Hauptperiode 1

3. Nachperiode: (Messung alle 30s)

t in s	ϑ in °C	t in s	ϑ in °C
360	36,6	510	36,1
390	36,6	540	36
420	36,4	570	35,9
450	36,3	600	35,9
480	36,2	630	35,8

Tabelle 3 : Nachperiode 1

$$\rightarrow m_{\text{end}} = 345,34 \text{ g}$$

2. heißes Wasser im Kalorimeter, kaltes Wasser hinzu

1. heißes Wasser im Kalorimeter

$$\vartheta = 49,3 \text{ °C}$$

$$m = 207,83 \text{ g}$$

Vorperiode: (Messung alle 30 s)

t in s	ϑ in °C	t in s	ϑ in °C
0	49,3	180	48
30	49,5	210	47,8
60	49,2	240	47,5
90	48,8	270	47,3
120	48,6	300	47
150	48,3		

Tabelle 4: Vorperiode 2

2. kaltes Wasser hinzu

$$\vartheta = 25,4\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$m = 207,87\text{g}$$

Hauptperiode:

(Messung alle 5s)

t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$	t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$
305	40	325	36,6
310	37,4	330	36,6
315	36,8	335	36,6
320	36,6		

Tabelle 5: Hauptperiode 2

3. Nachperiode (Messung alle 30s)

t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$	t in s	ϑ in $^{\circ}\text{C}$
365	36,6	545	36,3
395	36,5	575	36,3
425	36,5	605	36,2
455	36,4	635	36,2
485	36,4	665	36,2
515	36,4		

Tabelle 6: Nachperiode 2

$$\rightarrow m_{\text{end}} = 349,57\text{g}$$

Bestimmung der Wärmekapazität des Kalorimeters

1. heißes in kaltes Wasser:

Mischungstemperatur durch Extrapolation (siehe Diagramm1 Blatt1)

nach Gleichung (5)

$$\rightarrow c_k = 248,32 \text{ J/K*kg} \quad \rightarrow C = 85,75 \text{ J/K}$$

2. kaltes in heißes Wasser:

Mischungstemperatur durch Extrapolation (siehe Diagramm 1 Blatt 2)

nach Gleichung (5)

$$\rightarrow c_k = 49,84 \text{ J/K} \quad \text{*kg} \quad \rightarrow C = 17,42 \text{ J / K}$$

Grund für große Abweichungen siehe Diskussion

$$\rightarrow c_k = 149,08 \text{ J/K*kg} \quad \rightarrow C = 51,585 \text{ J / K}$$

Messergebnisse 1.2

Probekörper 1 (Stahl) :

$$m_{\text{Stahl}} = 243,43\text{g} \quad \vartheta_{\text{Stahl}} = 98,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$m_{\text{Wasser}} = 340,43\text{g} \quad \vartheta_{\text{Wasser}} = 24,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

<u>Vorperiode</u>	<u>Hauptperiode</u>	<u>Nachperiode</u>
24,9 °C	25,0 °C	26,5 °C 29,8 °C

25,0 °C	25,3 °C	26,8 °C 30,0 °C
25,0 °C	25,4 °C	27,1 °C 30,1 °C
25,0 °C	25,4 °C	28,0 °C
25,0 °C	25,6 °C	28,6 °C
25,0 °C	25,8 °C	29,0 °C
25,1 °C	26,0 °C	29,1 °C
25,1 °C		29,3 °C
25,1 °C		29,5 °C
25,1 °C		29,7 °C

spezifische Wärmekapazität:

$$c = 382,0 \text{ J/K} \cdot \text{kg}$$

Probekörper 2 (Aluminium) :

$$m_{Alu} = 92,82 \text{ g} \quad \vartheta_{Alu} = 99,1 \text{ °C}$$

$$m_{Wasser} = 355,07 \text{ g} \quad \vartheta_{Wasser} = 23,3 \text{ °C}$$

<u>Vorperiode</u>	<u>Hauptperiode</u>	<u>Nachperiode</u>
23,3 °C	25,8 °C	27,0 °C
23,4 °C	30,0 °C	26,6 °C
23,4 °C	30,2 °C	26,6 °C
23,4 °C	29,6 °C	26,8 °C

23,4 °C	29,2 °C	26,9 °C
23,4 °C	28,7 °C	27,0 °C
23,4 °C	28,3 °C	27,1 °C
23,5 °C		27,2 °C
23,5 °C		27,3 °C
23,5 °C		27,4 °C
23,5 °C		

spezifische Wärmekapazität:

$$c = 1061,6 \text{ J/K*kg}$$

1.3 Berechnung der molaren Masse nach Dulong – Petit

nach Gleichung (9)

$$M_{Stahl} = 0,06529 \text{ kg / mol}$$

$$M_{Alu} = 0,0235 \text{ kg / mol}$$

Messunsicherheiten

$$\text{Fehler Digitalwaage } \Delta m = 0,0001 \text{ kg}$$

$$\text{Fehler Thermometer } \Delta \vartheta = 0,05 \text{ °C}$$

Fehlerrechnung spezifische Wärmekapazität:

$$\Delta c_k = \left(\left(1 + \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{\vartheta_w - \vartheta_m} \right) * \Delta m + \left(\left| \frac{1}{\vartheta_w - \vartheta_m} + \frac{\vartheta_m - \vartheta_k}{(\vartheta_w - \vartheta_m)^2} + \frac{\vartheta_w - \vartheta_k}{(\vartheta_w - \vartheta_m)^2} \right| \right) * m_k * \Delta \vartheta \right) * c_w$$

bei 1.1)

Δc_{k1} und Δc_{k2} für Messung 1 und 2 berechnen

→ daraus Mittelwert

$$\Delta c_k = \frac{1}{2} \Delta c_{k1} + \frac{1}{2} \Delta c_{k2}$$

bei 1.2)

$$\begin{aligned} \Delta c_f = & \left(\frac{c_m(\vartheta_m - \vartheta_w)}{m_f(\vartheta_f - \vartheta_m)} \right) + \frac{(c_w * m_w + c_k)(\vartheta_m - \vartheta_w)}{m_f^2 * (\vartheta_f - \vartheta_m)} * \Delta m + \frac{\vartheta_m - \vartheta_w}{m_f * (\vartheta_f - \vartheta_m)} * \Delta c_k \\ & + \left(\left| \frac{c_w * m_w + c_k}{m_f(\vartheta_f - \vartheta_m)} \right| + \left| \frac{(c_w * m_w + c_k)(\vartheta_m - \vartheta_w)}{m_f^2(\vartheta_f - \vartheta_m)} \right| \right. \\ & \left. + \left| \frac{(c_w * m_w + c_k)(\vartheta_f - \vartheta_w)}{m_f^2(\vartheta_f - \vartheta_m)} \right| \right) * \Delta \vartheta \end{aligned}$$

bei 1.3)

$$\Delta M = \frac{3R}{c_f^2} * \Delta c_f$$

Zusammenfassung

Aufgabe	Fehler
1.1)	$\Delta c_{k1} = 0,8101 \frac{J}{kg} * mol$
	$\Delta c_{k2} = 0,213 \frac{J}{kg} * mol$
1.2)	$\Delta c_{f1} = 1,2242 \frac{J}{kg} * mol$
	$\Delta c_{f2} = 2,109 \frac{J}{kg} * mol$
1.3)	$\Delta M_1 = 0,008012 \frac{kg}{mol}$
	$\Delta M_2 = 0,004965 \frac{kg}{mol}$

Tabelle 7: Fehler

Aufgabe	Fehlergrenzen
1.1)	$85,24 \frac{J}{K} \leq c_{k1} \leq 86,26 \frac{J}{K}$
	$16,2 \frac{J}{K} \leq c_{k2} \leq 18,6 \frac{J}{K}$
1.2)	$379,89 \frac{J}{kg} * K \leq c_{f1} \leq 382,34 \frac{J}{kg} * K$
	$1059,5 \frac{J}{kg} * K \leq c_{f2} \leq 1063,71 \frac{J}{kg} * K$
1.3)	$0,0573 \frac{kg}{mol} \leq M_1 \leq 0,0733 \frac{kg}{mol}$
	$0,0185 \frac{kg}{mol} \leq M_2 \leq 0,0285 \frac{kg}{mol}$

Tabelle 8: Fehlergrenzen

Diskussion

Wie man sieht, sind die Unterschiede der beiden ermittelten Wärmekapazitäten des Kalorimeters relativ groß. Dies liegt eher weniger an den systematischen Fehler der Messgeräte, sondern vielmehr an der zeichnerischen Extrapolation der Mischungstemperatur.

Da man dies nicht bei der Fehlerrechnung beachten kann, sind unsere Fehlerintervalle klein.

Im Aufgabenteil 1.2, in dem man die spezifischen Wärmekapazitäten zweier fester Probekörper bestimmen sollte, tritt der größte Fehler wieder durch Extrapolation auf. Dennoch stimmen unsere ermittelten Werte ungefähr mit den fest bestimmten spezifischen Wärmekapazitäten überein.

Probekörper 1 (Stahl) : $c = 382 \frac{J}{K} kg$ Festwert: $c = 477 \frac{J}{K} kg$

Probekörper 2 (Alu) : $c = 1061,6 \frac{J}{K} kg$ Festwert: $c = 897 \frac{J}{K} kg$

Die Methode, einen kalten Körper in heißes Wasser zu legen ist verlustbehafteter, da es so zu einem Wärmeverlust während des gesamten Eintauchvorgangs kommt.

In Aufgabenteil 1.3 ist die molare Masse nach der Regel von Dulong Petit zu berechnen.

Hier hängt die Fehlerdifferenz von der in 1.2 errechneten spezifischen Wärmekapazitäten ab.

Literatur

- Stroppe, Physik
- Für die Extrapolation:
W. Walcher, Praktikum der Physik BG Teubner Stuttgart

M8

Pendelschwingungen

Svenja Fahlbusch, Tina Meyer

STK 10

M8 – Pendelschwingungen

Aufgabenstellung

- 1.1 Die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels ist bei mindestens 6 unterschiedlichen Pendellängen l zu messen, die Funktion $T^2 = f(l)$ ist graphisch darzustellen, deren Schwerebeschleunigung g ist durch lineare Regression zu ermitteln.
- 1.2 Die Abhängigkeit der Periodendauern T_A und T_B der Schwingungen eines physikalischen Pendels (Reversionspendels) um seine beiden möglichen Drehachsen A und B vom Abstand x des Laufgewichts von einer der Drehachsen ist aufzunehmen und graphisch darzustellen. Daraus ist die Schwingungsdauer T zu ermitteln, für die der Achsabstand der reduzierten Pendellänge entspricht.
- 1.3 Aus der auf Amplitudenabhängigkeit korrigierten Schwingungsdauer T des Reversionspendels und der reduzierten Pendellänge ist die Schwerebeschleunigung g zu berechnen.

Grundlagen zum Versuch

Harmonische mechanische Schwingungen:

Eine harmonische Schwingung wird beschrieben durch eine Schraubenfeder und einen daran angehängten Massekörper. Dieser besitzt eine Ruhelage $u = 0$. Entfernt man diesen Massekörper nun aus seiner Ruhelage, so führt der Massekörper eine harmonische Schwingung durch, die eine konstante Periodendauer T besitzt.

Für die Auslenkung einer harmonischen Schwingung gilt:

$$u(t) = u_0 * \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

(Weg-Zeit-Gesetz der harmonischen Schwingung; Stroppe S. 290)

Aus der Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

folgt für die Periodendauer T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3)$$

Für die rücktreibende Kraft der Feder gilt:

$$F = -k * u \quad (4)$$

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ($F = m * a$) folgt:

$$-k * u = m * a = m * \ddot{u} \quad (5)$$

$$\text{mit } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}$$

$$\rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m} * u = 0 \quad (6)$$

Setzt man nun Formel (1) in Formel (6) ein erhält man:

$$(\omega_0)^2 = \frac{k}{m} \quad (7)$$

Nun erhält man für die Periodendauer T :

$$(3) \rightarrow T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Mathematisches Pendel/ Fadenpendel:

Als mathematisches Pendel sieht man eine Punktmasse m , die an einem masselosen Faden aufgehängt wurde. An diesem schwingt sie hin und her. Da der Faden der Länge l bei kleinen Auslenkungen φ nahezu gespannt bleibt, wird dieser als starr angenommen. Außerdem geht man davon aus, dass l wesentlich länger als φ ist.

Für ein mathematisches Pendel gilt:

$$J\ddot{\varphi} + m * g * l * \sin\varphi = 0 \quad (9)$$

Analog zur harmonischen Schwingung kann man nun T berechnen über:

$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (10)$$

Daher gilt für die Schwerebeschleunigung g :

$$g = 4 * \pi^2 * \frac{l}{T^2} \quad (11)$$

Physikalisches Pendel/ Reversionspendel:

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper der Masse m , der sich um ein festes Lager dreht. Dabei soll dieses Lager einen Abstand s vom Schwerpunkt des Körpers haben. Der Körper besitzt dabei ein Trägheitsmoment J .

Die Periodendauer T des physikalischen Pendels lässt sich dabei berechnen über die Eigenfrequenz der ungedämpften Drehschwingung (vgl. Stroppe S.294).

$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (12)$$

$$\text{mit } D = m * g * s$$

Um mithilfe von Formel (11) die Schwerebeschleunigung zu berechnen, benötigen wir die reduzierte Pendellänge l_r . Da für die reduzierte Pendellänge l_r die Periodendauer genauso groß ist wie für ein gleichlanges mathematisches Pendel, gilt (10)=(12). Daraus folgt:

$$l_r = \frac{J}{m*s} \quad (13)$$

Nun kann die Schwerebeschleunigung g des physikalischen Pendels aus (11) berechnet werden.

Da während des Versuchs Lagerreibungen und Luftwiderstände auftreten, muss die gemessene Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Amplitude $\hat{\varphi}$ korrigiert werden:

$$T_{\text{korr}} = \frac{T}{1 + \frac{\hat{\varphi}^2}{16}} \quad (14)$$

(siehe „Hinweise zum Versuch“)

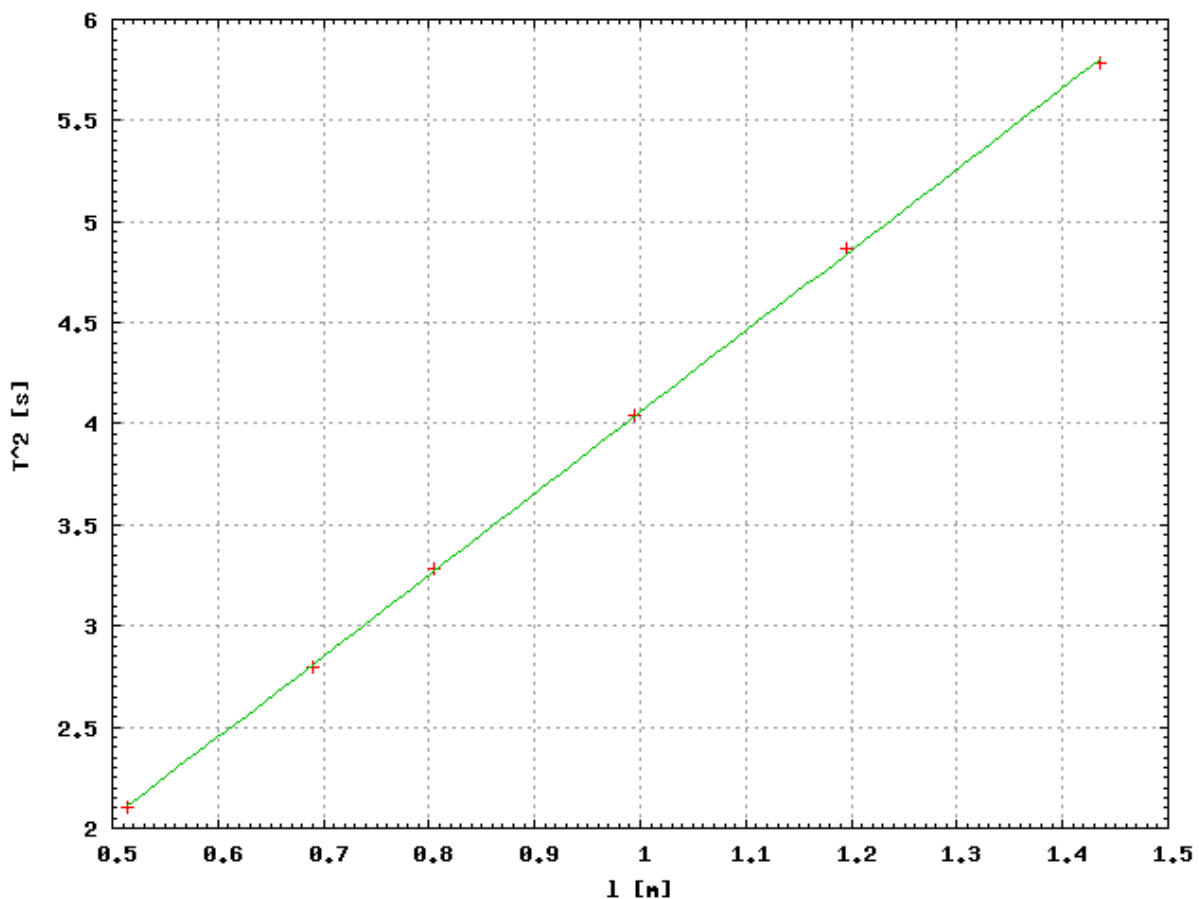
Messergebnisse

Messergebnisse 1.1

Gemessen mit jeweils 10 Schwingungen und ca. 10° Auslenkung

Pendellänge l	$10 * T_1$	$10 * T_2$	\bar{T}	\bar{T}^2
51,5 cm	14,52 s	14,47 s	1,4495 s	2,10105 s
69 cm	16,71 s	16,76 s	1,6735 s	2,8006 s
80,5 cm	18,14 s	18,11 s	1,8125 s	3,28516 s
99,5 cm	20,11 s	20,11 s	2,011 s	4,04412 s
119,5 cm	22,05 s	22,05 s	2,205 s	4,86203 s
143,5 cm	24,02 s	24,07 s	2,4045 s	5,78162 s

Tabelle 1: Messergebnisse 1.1



Graphik 1: Lineare Regression $T^2 = f(l)$

Anstieg der Regressionsgeraden: 4,0155497784 (siehe Helfer im Internet)

$$\rightarrow \frac{l}{T^2} = \frac{1}{4,0155497784} \cong 0,249 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Mithilfe des konstanten Verhältnisses $\frac{l}{T^2}$ kann man nun die Schwerebeschleunigung g berechnen:

$$(11) \rightarrow g = 4 * \pi^2 * \frac{l}{T^2} = 4 * \pi^2 * 0,249 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8314 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Messergebnisse 1.2

Gesamter Abstand von A und B : 130 cm ; Auslenkung: 5°

Messung vom Ende ohne Extragewicht

1. Großes Gewicht unten

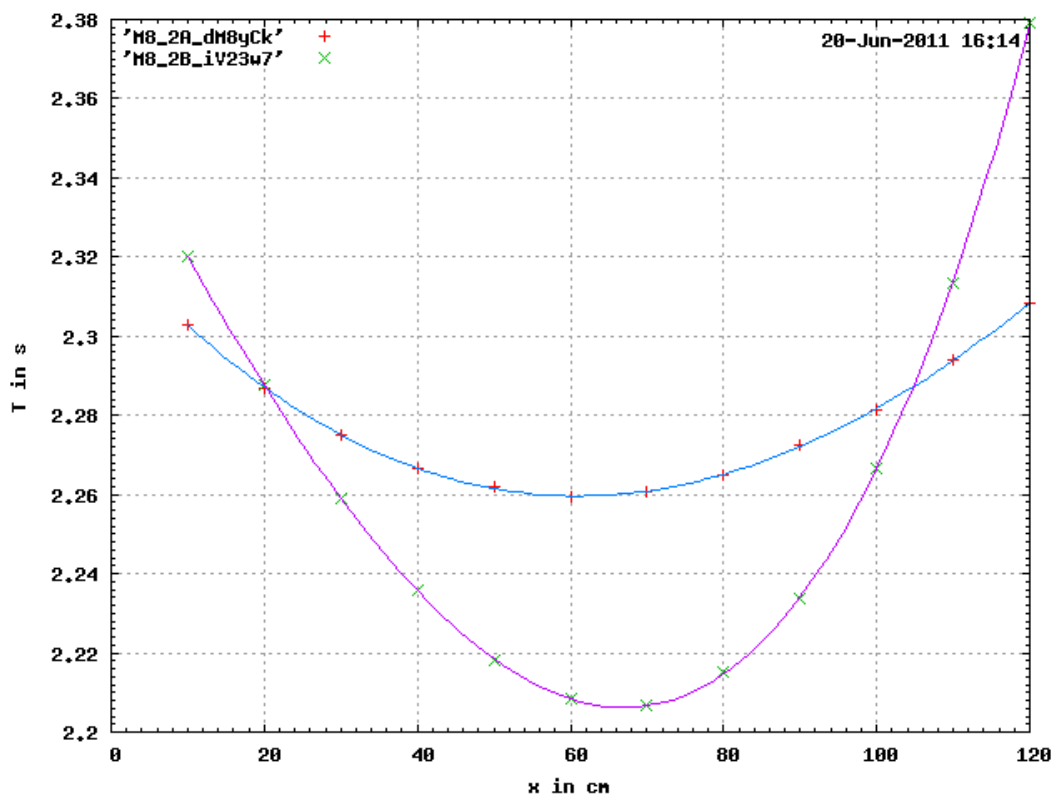
Abstand x	Periodendauer	Abstand x	Periodendauer
10 cm	2,3041 s	70 cm	2,2619 s
20 cm	2,2881 s	80 cm	2,2661 s
30 cm	2,2760 s	90 cm	2,2734 s
40 cm	2,2676 s	100 cm	2,2826 s
50 cm	2,2630 s	110 cm	2,2951 s
60 cm	2,2606 s	120 cm	2,3094 s

Tabelle 2: Messergebnisse 1.2 großes Gewicht unten

2. Großes Gewicht oben

Abstand x	Periodendauer	Abstand x	Periodendauer
10 cm	2,3214 s	70 cm	2,2078 s
20 cm	2,2888 s	80 cm	2,2162 s
30 cm	2,2599 s	90 cm	2,2349 s
40 cm	2,2368 s	100 cm	2,2676 s
50 cm	2,2191 s	110 cm	2,3147 s
60 cm	2,2095 s	120 cm	2,3802 s

Tabelle 3: Messergebnisse 1.2 großes Gewicht oben



Graphik 2: T_A und T_B

➔ Zwischen 20 und 30 cm sind Periodendauern annähernd gleich
Messung alle 2 cm

Gewicht oben		Gewicht unten	
Abstand x	Periodendauer	Abstand x	Periodendauer
20 cm	2,2885 s	30 cm	2,2761 s
22 cm	2,2820 s	28 cm	2,2787 s
24 cm	2,2770 s	26 cm	2,2805 s
26 cm	2,2707 s	24 cm	2,2827 s
28 cm	2,2650 s	22 cm	2,2852 s
30 cm	2,2602 s	20 cm	2,2882 s

Tabelle 4: Messergebnisse in 2 cm Schritten

- ➔ Schnittpunkt zwischen 20 und 22 cm
 Nach Praktikumshefter: Schnittpunkt bei 20,21 cm
 mit $T_S = 2,28684 \text{ s}$ (mithilfe des Praktikumshefters schon auf Amplitudenabhängigkeit korrigiert)
- ➔ Reduzierte Pendellänge beträgt für diesen Fall (Gewicht bei 20,21cm) 1,30m.

Rechnungen 1.3

Aus Formel (12) und (13) folgt nun:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r \cdot m \cdot s}{m \cdot g \cdot s}}$$

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{1,3m}{(2,28684s)^2} = 9,81367 \frac{m}{s^2}$$

Messunsicherheiten

Für 1.1:

Ausgehend von $\Delta T = 0,1s$ und $\Delta l = 0,2cm$:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \Delta l + \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^3} \cdot \Delta T$$

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{(\bar{T})^2} \cdot 0,002m + \frac{4\pi^2 \cdot l}{(\bar{T})^3} \cdot 0,1s$$

Pendellänge l	\bar{T}	$\Delta g \left[\frac{m}{s^2} \right]$
51,5 cm	1,4495 s	0,705174
69 cm	1,6735 s	0,609401
80,5 cm	1,8125 s	0,557764
99,5 cm	2,011 s	0,502523
119,5 cm	2,205 s	0,456289
143,5 cm	2,4045 s	0,421166

Tabelle 5: Messungenauigkeiten für die verschiedenen Längen

$$\rightarrow \overline{\Delta g} = 0,542053 \frac{m}{s^2}$$

Für steigendes l wird Δg immer geringer, da die Ungenauigkeit ΔT deutlich größer als Δl ist und l einen Einfluss auf den Faktor von ΔT hat.

Für 1.2:

Ausgehend von $\Delta T = 0,0001s$ und $\Delta l = 0,2cm$:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2} * \Delta l + \frac{4\pi^2 * l}{T^3} * \Delta T$$

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{(2,28684s)^2} * 0,002m + \frac{4\pi^2 * 1,3m}{(2,28684s)^3} * 0,0001s = 0,015527 \frac{m}{s^2}$$

Zusammenfassung und Diskussion

Für das mathematische Pendel beträgt die Schwerebeschleunigung:

$$9,28935 \frac{m}{s^2} \leq g \leq 10,3735 \frac{m}{s^2}$$

Für das Reversionspendel beträgt die Schwerebeschleunigung:

$$9,79814 \frac{m}{s^2} \leq g \leq 9,8292 \frac{m}{s^2}$$

Die mittlere Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche beträgt $9,81 \frac{m}{s^2}$. Regionale Unterschiede in der Schwerebeschleunigung können jedoch auf Höhenunterschiede und die Erdrotation zurückgeführt werden. Durch letztere besitzt die Erde eine elliptische Form, der Abstand zwischen Pol und Erdmittelpunkt ist geringer als der zwischen Äquator und Erdmittelpunkt, daher wird auch die Schwerebeschleunigung größer, je näher man einem Pol kommt.

Aus unseren Messwerten ist zu erkennen, dass die Messung der Schwerebeschleunigung mithilfe des Reversionspendels genauer ist als mit einem Fadenpendel. Dies ist darauf zurück zu führen, dass die optisch-elektronische Messung genauer ist, als die Messung mit der Stoppuhr. Zwar wurde versucht, diesen Fehler durch die Messung von zehn Perioden möglichst gering zu halten, doch ist trotz allem eine elektronische Vorrichtung deutlich genauer als das menschliche Auge.

Auch wurde im Fall des Reversionspendels die Periodendauer auf Amplitudenabhängigkeit korrigiert, die Periodendauer des Fadenpendels jedoch nicht.

Auch in der Längenbestimmung gab es Messungenauigkeiten, da beim Fadenpendel die Länge durch die Kugelform der Masse nicht exakt bestimmt werden konnte und auch beim Reversionspendel Fehler beim Ablesen der Länge entstehen konnten.

Bei beiden Pendeln traten außerdem Lagerreibung und Luftreibung auf. Letztere könnte man dadurch ausschließen, dass man den Versuch in einem Vakuum durchführt.

Trotz aller Ungenauigkeiten ist das Reversionspendel ein sehr genauer Versuch zur Bestimmung der lokalen Schwerebeschleunigung g .

Literatur

- Stroppe, Physik
- <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/lreg.php>
- http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M8_2.php