

Abstand  $a\sqrt{2}/2$  hat, folgt

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{2i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}/2} (Q_1 + Q_2 + Q_3) = 63,6 \text{ V.}$$

Die Spannung  $U$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$  ist folglich gleich der Potentialdifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 5,5 \text{ V}$ . Das Bild zeigt für das hier betrachtete Punktladungssystem die Linien konstanten Potentials (Äquipotentiallinien).

**476** a) Das vom Dipol in  $P$  erzeugte Potential ist gleich der Summe der beiden Einzelpotentiale  $\varphi_{\pm} = \pm q/(4\pi\epsilon_0 r_{\pm})$ . Für  $r \gg l$  wie hier folgt wegen  $r_+ = r - l/2$  und  $r_- = r + l/2$ :  $r_+ r_- = r^2 - l^2/4 \approx r^2$ . Mit dem elektrischen Dipolmoment  $p = ql = 2 \cdot 10^{-10} \text{ C m}$  erhält man somit für das Potential in  $P$ :

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right) \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0,8 \text{ V.}$$

Die Feldstärke berechnet sich zu  $E = -d\varphi/dr = p/(2\pi\epsilon_0 r^3) = 1,07 \text{ V/m}$ . Eine einzelne Punktladung erzeugt dagegen das Potential  $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r) = 120 \text{ V}$  bzw. die Feldstärke  $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2) = 80 \text{ V/m}$ . b) Für den Betrag des Drehmoments gilt  $M = Fl = [qQ/(4\pi\epsilon_0 r^2)]l = Qp/(4\pi\epsilon_0 r^2) = 8 \cdot 10^{-8} \text{ N m}$ ; es bewirkt eine Ausrichtung der Dipolachse in Feldrichtung.

**477** a) Trägt die Kugel in einem Zwischenstadium die Ladung  $q$ , so herrscht an ihrer Oberfläche das Potential  $\varphi(q) = q/(4\pi\epsilon_0 R)$ . Beim weiteren Aufladen um  $dq$  muß gegen die dort bereits vorhandenen (gleichnamigen) Ladungen die Arbeit  $dW = \varphi(q) dq$  verrichtet werden, insgesamt also

$$W = \int_0^Q \varphi(q) dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 9 \text{ J.}$$

b) Die Spannung ist gleich der Potentialdifferenz zwischen Kugeloberfläche (als Sitz der Ladungen) und Unendlich:

$$U = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 1,8 \text{ MV}$$

mit  $\varphi(\infty) = 0$ . Außerdem folgt damit aus a) die Beziehung  $W = QU/2$ .

**478** Die an der Seifenblase angreifende Gewichtskraft wird zum einen von der bei konstanter Sinkgeschwindigkeit wirkenden Reibungskraft  $6\pi\eta r v$  (STOKESSches Gesetz), andererseits – im Zustand der Schweben – von der elektrischen Feldkraft  $zeE$  (mit  $z$  als Anzahl der Elementarladungen auf der Blase) gerade kompensiert. Daraus folgt  $zeE = 6\pi\eta r v$ , oder mit  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  die Anzahl  $z = 6\pi\eta r v/(eE) \approx 10^{10}$ .

**479** a) Im homogenen elektrischen Feld ist der Betrag der Feldstärke zwischen zwei Punkten mit der Potentialdifferenz  $U$ :  $E = U/d$ . Es ist also hier  $E = 15000 \text{ V/m} = 15 \text{ kV/m}$ . Die Feldlinien verlaufen von der Anode zur Katode. b) Die auf eine Ladung  $q$  wirkende Feldkraft ist gleich dem Vektor  $F = qE$ , für ein Elektron ( $q = -e$ ) also  $F = -eE$ , d. h., dem Feldstärkevektor entgegengerichtet. Der Betrag der Kraft errechnet sich zu  $F = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ N}$ . c) Die (gewonnene) Verschiebungsarbeit ist

$$W = Fd = eEd = eU = 4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 300 \text{ eV.}$$

d)  $W$  geht vollständig in kinetische Energie des freien Elektrons über:  $W = W_k = mv^2/2$ . Daraus folgt  $v = \sqrt{2W_k/m} = 1,03 \cdot 10^7 \text{ m/s} \approx c/29$ . (Für  $v < 0,1c$  ist eine relativistische Rechnung i. a. noch nicht erforderlich.)

**480** a) Wir haben hier die gleichen Verhältnisse wie beim waagrechten Wurf eines Körpers: Wegen  $F = -eE$  (Feldkraft) und  $F = ma$  (NEWTONSches Grundgesetz) erfährt das Elektron im Feld eine konstante Beschleunigung vom Betrage  $a = eE/m$  (analog der Fallbeschleunigung  $g$  beim Wurf), und daher gilt auch hier die Gleichung für die Wurfparabel (vgl. Auf-

gabe 30 mit dem Einschubwinkel  $\alpha_0 = 0^\circ$ ). b) Die Geschwindigkeit in Einschubrichtung bleibt konstant  $v_x = v_0$ , in Feldrichtung ist  $v_z = at$ , mit  $a = eE/m$ ,  $E = U/d$  und  $t = l/v_0$  also  $v_z = eUl/(mv_0d) = 8,25 \cdot 10^6$  m/s. Damit wird  $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = 1,8 \cdot 10^7$  m/s. c) Die Bewegungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung sind unabhängig voneinander. Es gilt daher wie beim freien Fall  $h = at^2/2 = eUl^2/(2mv_0^2d) = 25,8$  mm. d) Die potentielle Energie nimmt (analog  $mgh$  beim freien Fall) um  $mah = (h/d)eU = 3,1 \cdot 10^{-17}$  J ab, die kinetische Energie um den gleichen Betrag  $m(v^2 - v_0^2)/2$  zu. Die Gesamtenergie des Elektrons bleibt also erhalten (konservatives Kraftfeld).

**481** Die Arbeit, die vom elektrischen Feld am Elektron beim Durchlaufen der Potentialdifferenz (Spannung)  $U$  verrichtet wird, berechnet sich zu  $W = eU$  mit  $e$  als Elementarladung. Sie geht vollständig in kinetische Energie des Elektrons über. Diese ist gleich der Differenz aus Gesamtenergie  $E = mc^2$  (mit der Impulsmasse  $m = m_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ ) und Ruhenergie  $E_0 = m_0c^2$ :

$$eU = m_0c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right].$$

Für  $v = 0,95c$  erhält man daraus  $U = 1,13$  MV.

**482** a)  $6,24 \cdot 10^{18}$ ; b)  $Q/n = N_A e = F = 96485$  C/mol (FARADAY-Konstante), somit  $Q \approx 10^5$  C,  $m \approx 0,55$  mg.

**483** a)  $Q = 9,65 \cdot 10^7$  C,  $E = 8,67 \cdot 10^7$  V/m; b)  $|\Delta\varphi| = 6,9 \cdot 10^{12}$  V = 6,9 TV (Teravolt).

**484**  $1,602 \cdot 10^{-19}$  J = 1 eV (Definition der Energieeinheit Elektronvolt).

**485** Aus  $E_\alpha = qQ/(4\pi\epsilon_0 r_{\min}^2)$ ,  $q = 2e$  und  $Q = 13e$  folgt  $r_{\min} = 1,87 \cdot 10^{-14}$  m.  $r_{\min}$  ist damit von der Größenordnung des Kernradius.

**486**  $F = \frac{|Q_3|}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \cos 120^\circ}$  (Kosinussatz) = 7,14 N.

**487** a) 3,6 J; b) null. **488** a)  $\varphi_A = 144$  V,  $\varphi_B = -48$  V, d. h.  $\varphi_A > \varphi_B$ . b)  $W = 9,6$  mJ.

**489** 62,5 cm rechts von  $Q_1$ . **490**  $v = 0,9963c$ ;  $m = 11,66 m_0$ .

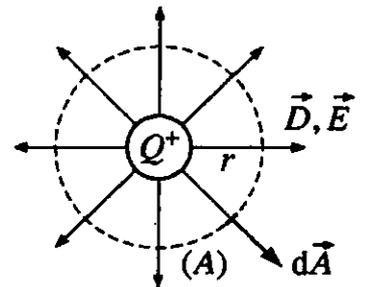
**491** (Bild) a) Jede Ladung  $Q$  als Quelle eines elektrischen Feldes erzeugt außerhalb von ihr eine elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte)  $D$ . Bildet man das Integral

$$\oint_{(A)} D \cdot dA = Q \quad \begin{array}{l} (dA \text{ Normalenvektor eines} \\ \text{Flächenelements der Größe } dA) \end{array}$$

über eine geschlossene Oberfläche  $A$ , so erhält man die gesamte, von dieser Fläche eingeschlossene Ladung  $Q$ . Wählt man eine zur Punktladung  $Q$  konzentrische Kugelfläche mit  $r$  als Radius und somit  $A = 4\pi r^2$  als Oberfläche, hat der Flächennormalenvektor  $dA$  immer die gleiche Richtung wie die radialsymmetrisch verlaufenden  $D$ -Vektoren (das skalare Produkt ist daher  $D \cdot dA = D dA \cos 0^\circ = D dA$ ), und  $D$  ist überall auf der Kugelfläche gleich. Weiterhin gilt  $D = \epsilon_0 E$ , womit man erhält:

$$\oint_{(A)} D dA = \epsilon_0 E \oint_{(A)} dA = \epsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = Q.$$

Daraus folgt  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \approx 0,1$  V/m. b)  $D = \epsilon_0 E = 8,6 \cdot 10^{-13}$  C/m<sup>2</sup> und wegen  $D = \Psi/A$ :  $\Psi = DA = 2,7 \cdot 10^{-12}$  C =  $Q$ .



**492** Aus Symmetriegründen ergibt sich ein radiales, zylindersymmetrisches Feld, ähnlich dem Bild zu Aufgabe 491 (Lösung). Der Vektor der Feldstärke  $E$  steht senkrecht auf jedem beliebigen, konzentrisch zum Draht verlaufenden Zylindermantel im Abstand  $r$  zur Drahtachse, und sein Betrag ist dort  $E = \text{const.}$  Erstreckt man das Flußintegral über ein Drahtstück der Länge  $l$ , so ist

**507** a) Aus  $Q = C_1 U_1$  folgt  $U_1 = Q/C_1 = 220 \text{ V}$  und  $E_1 = U_1/d_1 = 22 \text{ kV/m}$ . b) Die Kapazität eines leeren Plattenkondensators berechnet sich allgemein zu  $C = \epsilon_0 A/d$  ( $A$  Plattenfläche). Es ist  $C_2/C_1 = d_1/d_2$ ,  $C_2 = (d_1/d_2)C_1 = 50 \text{ pF}$ ,  $U_2 = Q/C_2 = 440 \text{ V}$  und  $E_2 = U_2/d_2 = 22 \text{ kV/m} = E_1$ . Die Feldstärke bleibt also bei konstanter Aufladung des Kondensators konstant (wegen der gleichbleibenden Flußdichte  $D = Q/A = \epsilon_0 E$ ).

**508** a) Die Kapazität erhöht sich um den Faktor  $\epsilon_r$  auf  $C = \epsilon_r C_0 = 220 \text{ pF}$ . Die Ladung bleibt erhalten:  $Q = Q_0 = C_0 U_0 = 1,76 \cdot 10^{-8} \text{ As} = 17,6 \text{ nC}$ . Wegen  $Q = CU = C_0 U_0$  wird  $U = (C_0/C)U_0 = U_0/\epsilon_r = 80 \text{ V}$  und somit  $W = QU/2 = Q_0 U_0/(2\epsilon_r) = W_0/\epsilon_r = 7,04 \cdot 10^{-7} \text{ Ws} = 704 \text{ nJ}$ . Spannung und Energieinhalt fallen also auf den  $\epsilon_r$ -ten Teil ab. b) Jetzt ist ebenfalls  $C = \epsilon_r C_0 = 220 \text{ pF}$ . Die Spannung bleibt erhalten:  $U = U_0$ . Damit wird  $Q = CU = \epsilon_r Q_0 = 4,84 \cdot 10^{-8} \text{ As} = 48,4 \text{ nC}$  und  $W = QU/2 = \epsilon_r Q_0 U_0/2 = \epsilon_r W_0 = 5,324 \cdot 10^{-6} \text{ Ws} = 5,324 \mu\text{J}$ . Ladung und Energieinhalt steigen also auf das  $\epsilon_r$ -fache.

**509** Bei einer angenommenen Vergrößerung des Abstandes der Kondensatorplatten von  $x$  auf  $x + dx$  muß gegen die Kraft  $F$ , mit der sich die Platten anziehen, die Arbeit  $dW = -F dx$  verrichtet werden. Diese ist für  $U = \text{const}$  gleich der Änderung der im Kondensator gespeicherten elektrischen Feldenergie  $dW_e = (1/2)U^2 dC$ , wobei wegen  $C(x) = \epsilon_0 A/x$ ,  $dC/dx = -\epsilon_0 A/x^2$  folgt:  $dW_e = -[\epsilon_0 A U^2/(2x^2)] dx$ . Aus  $dW = dW_e$  ergibt sich mit den Zahlenwerten

$$F = \frac{\epsilon_0 A U^2}{2x^2} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 15 \text{ mN}.$$

Damit erhält man als Zugspannung  $\sigma = F/A = 0,1 \text{ N/m}^2 = 0,1 \text{ Pa}$ .

**510** a) Die Kapazität eines Körpers, der durch die Ladung  $Q$  auf die Spannung  $U$  aufgeladen wird, ist  $C = Q/U$ . Dabei ist  $U$  in unserem Fall die Potentialdifferenz zwischen der Kugeloberfläche, dem Sitz der Ladung, und Unendlich:  $U = \varphi(R) - \varphi(\infty)$  mit  $\varphi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ , vgl. Aufgabe 473, und  $\varphi(\infty) = 0$ . Es ist also  $U = Q/(4\pi\epsilon_0 R) = Q/C$  und somit die Kapazität der Kugel  $C = 4\pi\epsilon_0 R = 5,56 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 5,56 \text{ pF}$ . b) Die erforderliche Flächenladungsdichte auf der Kugeloberfläche  $A$  beträgt

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{CU}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 U}{R} = 1,77 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2.$$

**511** Die Feldstärke an der Kugeloberfläche  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ , vgl. Aufgabe 473, darf die Durchschlagfeldstärke  $E_D$  nicht überschreiten. Es muß also gelten  $E < E_D$ , d. h. mit  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  als Kapazität der Kugel:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{CU}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{U}{R} < E_D$$

oder  $U < E_D R = 200 \text{ kV}$ .

**512** a) Die Potentialdifferenz zwischen Innen- und Außenleiter beträgt

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} (\ln a - \ln b) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \ln \frac{b}{a}.$$

Wegen  $U = Q/C$  ergibt sich  $C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r l / \ln(b/a)$ . b) Aus den gegebenen Zahlenwerten folgt der Kapazitätsbelag  $C' = C/l = 67,4 \text{ pF/m}$ .

**513** Die Feldstärke eines zylindersymmetrischen Feldes (geladener Draht im Dielektrikum) im Abstand  $r$  von der Zylinderachse beträgt  $E(r) = Q/(2\pi\epsilon_0\epsilon_r l r)$ , vgl. Aufgabe 492. Mit  $Q = CU$  und  $C' = C/l = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r / \ln(b/a)$ , s. Aufgabe 512, folgt

$$E(r) = \frac{U}{r \ln(b/a)} = 135,7 \text{ kV/m}.$$

**514** An beiden Kondensatoren liegt die gleiche Spannung  $U$ , daher ist  $Q_1 = C_1 U = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 24 \text{ nC}$  und  $Q_2 = C_2 U = 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 72 \text{ nC}$ . Somit ist die Gesamtladung der Parallelschaltung  $Q = Q_1 + Q_2 = 96 \text{ nC}$ . b) Die Gesamtkapazität beträgt  $C = C_1 + C_2 = 800 \text{ pF}$ .



644 a) Das Induktionsgesetz lautet hier wegen  $B = \text{const}$ :

$$u_{\text{ind}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = -B\frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Bei Drehung der Schleife um  $90^\circ$  um eine Achse senkrecht zum Feld ist die Flächenänderung  $\Delta A$  im Feld gleich der Schleifenfläche selbst, also  $\pi R^2$ , womit folgt  $|u_{\text{ind}}| = \pi R^2 B / \Delta t = 2,5 \text{ mV}$ . b) Für das elektrische Feld  $E$  in der Schleife gilt wegen des LENZschen Gesetzes die *Linke-Hand-Regel* (Minuszeichen im Induktionsgesetz): Zeigt der Daumen der linken Hand in die Richtung der *Änderung* des  $B$ -Feldes durch die Schleife (in unserem Fall also in  $-B$ -Richtung, da der Fluß durch die Schleife bei der Drehung abnimmt), so geben die gekrümmten Finger die Richtung von  $E$  bzw. der Kraft  $qE$  auf Ladungen  $q$  an. Da die Richtung des Stromes durch die Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger definiert ist, ist die Richtung von  $E$  zugleich die Richtung des Induktionsstromes, in unserem Fall also entgegen dem Uhrzeigersinn. c)  $u_{\text{ind}} = 0$ , da sich dabei der magnetische Fluß durch die Schleife nicht ändert.

645 (Bild) a) Der magnetische Fluß  $d\Phi$  durch einen infinitesimal schmalen Streifen  $dA = b dr$  der Schleife ( $r$  Abstand vom Draht) ist mit der magnetischen Feldstärke  $H = I / (2\pi r)$  in der Umgebung des Drahtes:

$$d\Phi = B dA = \mu_0 H dA = \frac{\mu_0 I b dr}{2\pi r}.$$

Nach Integration über die Schleifenfläche erhält man den gesamten Fluß

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

mit  $r_1 = r_0 + s$  und  $r_2 = (r_0 + a) + s$ , wobei  $s = vt$  die zum Zeitpunkt  $t$  zurückgelegte Entfernung der dem Draht näheren bzw. entfernteren Rechteckseite  $b$  vom ursprünglichen Drahtabstand ist. Damit folgt als Induktionsspannung in der Schleife

$$u_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left( \ln \frac{vt + r_0 + a}{vt + r_0} \right) = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi (vt + r_0)(vt + r_0 + a)}.$$

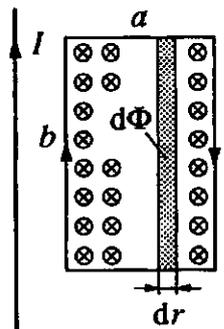
Für  $t_1 = 0,01 \text{ s}$  erhält man  $u_{\text{ind}} = 18,0 \mu\text{V}$ , und nach  $t_2 = 0,1 \text{ s}$  ist  $u_{\text{ind}} = 0,72 \mu\text{V}$ . b) Nach der Rechte-Hand-Regel ist das vom Strom  $I$  erzeugte Magnetfeld rechts vom Draht in die Zeichenebene hinein gerichtet. Da mit zunehmender Entfernung der Schleife vom Draht das Magnetfeld abnimmt, wirkt der induzierte Stromfluß dieser Abnahme entgegen, d. h., er stärkt das Feld. Demzufolge wird die Schleife vom Induktionsstrom im Uhrzeigersinn durchflossen.

646 a) Im Kupferstab wird die Spannung  $|u_{\text{ind}}| = Blv$  induziert (vgl. Aufgabe 643), die in ihm einen Stromfluß  $I = u_{\text{ind}}/R = Blv/R$  ( $R$  Widerstand des Stabes) hervorruft. Die bewegten Ladungsträger im Stab erfahren dadurch eine Kraft  $F_{\text{ind}} = IlB = B^2 l^2 v/R$ , die nach der LENZschen Regel der Fallbewegung entgegen, also aufwärts, gerichtet ist. Diese Bremskraft muß dem Trägheitsgesetz zufolge betragsmäßig gleich der Gewichtskraft  $G$  sein, wenn der Stab im Magnetfeld mit konstanter Geschwindigkeit sinken soll:

$$F_{\text{ind}} = G \quad \text{oder} \quad \frac{B^2 l^2 v}{R} = mg. \quad (1)$$

Wegen  $m = \rho_m A l$  und  $R = \rho l/A$  folgt aus (1) für die gesuchte Geschwindigkeit  $v = \rho_m \rho g / B^2 = 1,28 \text{ m/s}$  und daraus mit  $v^2 = 2gh$  die Fallhöhe  $h = 83 \text{ mm}$ . b) Mit  $v = 1,28 \text{ m/s}$  wird  $|u_{\text{ind}}| = Blv = 1,8 \text{ mV}$ , und mit  $R = 4\rho l/(\pi d^2) = 2,27 \cdot 10^{-4} \Omega$  folgt  $I = 7,9 \text{ A}$ ,  $F_{\text{ind}} = 0,011 \text{ N}$  und  $P = I^2 R = 14 \text{ mW}$ . Die Strom fließt nach der Rechte-Hand-Regel (Kraft auf positive Ladungsträger) im Uhrzeigersinn.

647 a) Die vom magnetischen Fluß  $\Phi$  durchsetzte Windungsfläche  $A$  ändert sich periodisch mit der Drehzahl  $n = f = 50 \text{ s}^{-1}$  bzw.  $\omega = 2\pi f$  gemäß  $A(t) = ab \cos \omega t$ . Der Fluß durch die Spule



**678** Der resultierende (komplexe) Scheinwiderstand der zwei in Reihe geschalteten  $LC$ -Glieder ist gleich null zu setzen:

$$j(X_L - X_C) + \frac{1}{j(B_C - B_L)} = 0 \quad \text{oder} \quad X_L - X_C - \frac{1}{B_C - B_L} = 0.$$

Mit  $X_L = 1/B_L = \omega L$  und  $X_C = 1/B_C = 1/(\omega C)$  folgt daraus  $L^2 C^2 \omega^4 - 3LC\omega^2 + 1 = 0$ , woraus man durch Lösen der quadratischen Gleichung für  $\omega^2$  erhält

$$\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}; \quad \omega_1 \approx 1,618\omega_0, \quad \omega_2 \approx 0,618\omega_0.$$

**679** Aus  $1/Z = 1/(R_1 + j\omega L) + 1/[R_2 - (j/(\omega C))]$  folgt

$$Z = \frac{(R_1 + j\omega L) \left( R_2 - \frac{j}{\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\omega(R_1 R_2 C + L) + j(\omega^2 R_2 LC - R_1)}{\omega(R_1 + R_2)C + j(\omega^2 LC - 1)} = R + jX$$

mit  $X = \omega[\omega^2 LC(R_2^2 C - L) - (R_1^2 C - L)]/[\omega^2(R_1 + R_2)^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2]$ . Die Schaltung verhält sich für  $X = 0$  wie ein reiner Wirkwiderstand, woraus man  $\omega^2 = (R_1^2 C - L)/[LC(R_2^2 C - L)]$  erhält. Es wird  $f = \omega/(2\pi) = 2,116$  kHz und damit  $Z = R \approx 690 \Omega$ .

**680** Die periodische Bewegung des Kolbens im Zylinder ist keine Schwingung. Ein schwingungsfähiges System muß eine stabile Gleichgewichtslage besitzen, derart, daß bei Störung des Gleichgewichts Kräfte auftreten, die in die Gleichgewichtslage zurückwirken. Ist die rücktreibende Kraft der Störung direkt (oder zumindest für kleine Auslenkungen annähernd) proportional (lineares Kraftgesetz), so treten harmonische Schwingungen auf.

**681** Die Auslenkung  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  ist  $x = x_m \sin \omega t$  ( $x_m$  Amplitude,  $\omega = 2\pi/T$  Kreisfrequenz). Für die Geschwindigkeit folgt daraus  $v = \dot{x} = \omega x_m \cos \omega t$ ; sie wird für  $|\cos \omega t| = 1$  mit  $v_m = \omega x_m$  am größten. Dies ist für  $\omega t = n\pi$  ( $n$  ganze Zahl), also zu den Zeitpunkten  $t = n(\pi/\omega) = n(T/2)$  der Fall. Wegen  $\sin n\pi = 0$  ist dies die Gleichgewichtslage  $x = 0$  des Oszillators. Die Beschleunigung  $a = \ddot{x} = -\omega^2 x_m \sin \omega t$  ist dagegen für  $|\sin \omega t| = 1$  mit  $a_m = \omega^2 x_m$  am größten. Diese Bedingung ist für  $\omega t = (2n+1)\pi/2$ , oder zu den Zeiten  $t = (2n+1)\pi/(2\omega) = (2n+1)(T/4)$  erfüllt, wenn sich der Oszillator an den Umkehrpunkten der Schwingung  $x = \pm x_m$  befindet.

**682** Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz lauten für den harmonischen Oszillator

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_0); \quad v(t) = \dot{x}(t) = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$x(0) \equiv x_0 = x_m \sin \varphi_0 = 0,05 \text{ m}; \quad v(0) \equiv v_0 = \omega x_m \cos \varphi_0 = 13,6 \text{ m/s}$$

erhält man

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{\tan \varphi_0}{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \tan \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0} = \frac{2\pi f x_0}{v_0} = 0,5775.$$

Daraus ergeben sich für  $\varphi_0$  zwei Werte,  $30^\circ$  und  $210^\circ$ . Da aber die Anfangsbedingungen  $\sin \varphi_0 > 0$  und  $\cos \varphi_0 > 0$  fordern (wegen  $x_0 > 0$  und  $v_0 > 0$ ), ist  $\varphi_0 = 30^\circ$  der gültige Winkel. (Im Falle von  $210^\circ$  wäre  $\sin \varphi_0 < 0$  und  $\cos \varphi_0 < 0$ .) Damit wird  $x_m = x_0 / \sin \varphi_0 = 10$  cm.

**683** a) Mit der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  erhält man in diesem Fall  $T = \pi(\sqrt{l_1/g} + \sqrt{l_2/g})$ . Daraus folgt  $\sqrt{l_2/g} = T/\pi - \sqrt{l_1/g} = 0,158$  s und  $l_2 = 24,5$  cm. Der gesuchte Abstand ist also  $\overline{AS} = l_1 - l_2 = 75,5$  cm. b) Beim Auslenken um  $\varphi_1$  nach links wird die Pendelmasse um  $h = l_1(1 - \cos \varphi_1) = 1,37$  mm angehoben. Wegen der Energieerhaltung schwingt das ungedämpfte Pendel auch bis zur gleichen Höhe  $h$  nach rechts aus. c) Der maximale Auslenkungswinkel nach rechts ergibt sich aus  $h = l_2(1 - \cos \varphi_2)$  zu  $\varphi_2 = 6,06^\circ$ .

**684** a) Mit dem Massenträgheitsmoment für die Kreisscheibe  $J_S$  und dem Satz von STEINER  $J_A = J_S + ms^2 = m(R^2/2 + s^2)$  ergibt sich die Schwingungsdauer zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{2gs} + \frac{s}{g}}.$$

b) Mit  $s = R$  folgt daraus  $T = 2\pi \sqrt{(3/2)R/g}$ . Der Vergleich mit der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  ergibt als reduzierte Pendellänge  $l = (3/2)R = 25,5$  cm, womit man  $T \approx 1$  s erhält. c) Für  $R \ll s$  ist der erste Term unter der Wurzel bei a) vernachlässigbar, und man erhält den Ausdruck für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels mit der Pendellänge  $l = s$ .

**685** Die zusätzliche Gewichtskraft  $G = m_1g$  ruft eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Federkraft  $F_1 = -kx_1 = -G$  hervor, woraus die Federkonstante (Richtgröße) der Federung  $k = m_1g/x_1 = 81,75$  kN/m folgt. Nach dem NEWTONSchen Grundgesetz gilt mit  $m = m_0 + m_1 = 1050$  kg als schwingende Masse:  $F = ma = m\ddot{x} = -kx$  bzw. die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1)$$

Sie wird gelöst durch den Ansatz  $x = x_m e^{\lambda t}$ . Damit wird in (1)  $\ddot{x} = \lambda^2 x_m e^{\lambda t} = \lambda^2 x$ , also  $\lambda^2 + (k/m) = 0$ ,  $\lambda = \sqrt{-1} \sqrt{k/m} = j \sqrt{k/m} = j\omega$ . Man erhält somit die komplexe Lösung

$$x = x_m e^{j\omega t} = x_m (\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

wobei sowohl Real- als auch Imaginärteil sowie alle Linearkombinationen  $A \sin \omega t + B \cos \omega t$  ( $A, B$  Konstanten) Lösungen von (1) sind. Wird z. B. als Anfangsbedingung  $x = 0$  für  $t = 0$  gefordert, so ist  $x = x_m \sin \omega t$ . Die Eigenkreisfrequenz ist  $\omega = \sqrt{k/m} = 8,824$  rad/s; daraus folgt  $f = \omega/(2\pi) = 1,40$  Hz und  $T = 1/f = 0,712$  s. Für die leere Karosserie erhält man (mit  $m = m_0 = 800$  kg)  $f_0 = 1,61$  Hz,  $T_0 = 0,621$  s.

**686** Mit der rücktreibenden Federkraft  $F = ma = m\ddot{x} = -m\beta x$  lautet die Bewegungsgleichung  $\ddot{x} + \beta x = 0$ . Ihre allgemeine Lösung ist (vgl. Aufgabe 685, oben)

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad v = \dot{x} = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$$

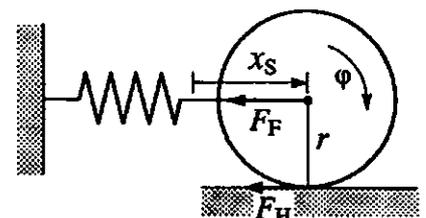
mit  $\omega = \sqrt{\beta}$ . Aus der ersten Anfangsbedingung  $x = 0$  für  $t = 0$  folgt  $B = 0$  und somit  $A = x_1$ , aus der zweiten  $v = v_1$  für  $t = 0$ :  $v_1 = \omega A = \omega x_1$ . Man erhält (wie in der Lösung zu Aufgabe 8)  $x_1 = v_1/\omega = v_1/\sqrt{\beta}$ . Die Dauer des Stoßvorgangs bis zur maximalen Stauchung der Federn entspricht der Zeit  $\Delta t = T/4$ . Mit  $\sqrt{\beta} = \omega = 2\pi/T$  folgt daraus  $\Delta t = \pi/(2\sqrt{\beta}) = 0,035$  s.

**687** (Bild) In  $x$ -Richtung wirken auf den Schwerpunkt des Körpers bei Auslenkung aus der Ruhelage um  $x_S$  die Federkraft  $F_F = -kx_S$  und die Haftreibungskraft  $F_H$ . Somit erhält man für die Translationsbewegung des Schwerpunktes die Bewegungsgleichung  $-kx_S - F_H = m\ddot{x}_S$ . Die Haftreibungskraft ergibt in Bezug auf den Schwerpunkt das Drehmoment  $M = rF_H$ , so daß für die Rotationsbewegung um die Schwerpunktschwerachse  $M = rF_H = J_S \ddot{\varphi}$  gilt. Hieraus folgt unter Beachtung der geometrischen Zwangsbedingung  $x_S = r\varphi$  bzw.  $\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi}$  (Rollen ohne Schlupf)  $F_H = J_S \ddot{\varphi}/r = J_S \ddot{x}_S/r^2$  und somit für die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes

$$-kx_S - \frac{J_S}{r^2} \ddot{x}_S = m\ddot{x}_S \quad \text{oder} \quad \ddot{x}_S + \omega^2 x_S = 0$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{kr^2}{mr^2 + J_S}} = \frac{1}{\sqrt{1 + J_S/(mr^2)}} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Die Eigenfrequenz  $\omega$  ist also um den Faktor  $1/\sqrt{1 + J_S/(mr^2)} = \sqrt{2/3} \approx 0,816$  im Falle a) des rollenden Vollzylinders und  $\sqrt{5/7} \approx 0,845$  im Falle b) der Kugel kleiner als die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  des Federschwingers mit reibungsfrei gleitender Masse.

Funktion wie harmonische Schwingungen. Sind  $x_1 = x_{m1}e^{j(\omega t + \varphi_1)}$  und  $x_2 = x_{m2}e^{j(\omega t + \varphi_2)}$  mit  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 60^\circ$  die Teilschwingungen und  $x = x_m e^{j(\omega t + \varphi_1 + \psi)}$  die Überlagerungsschwingung, so gilt

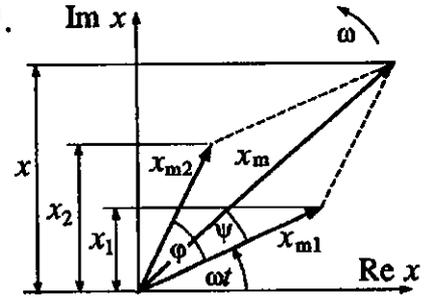
$$x = x_1 + x_2 = (x_{m1} + x_{m2}e^{j\Delta\varphi})e^{j(\omega t + \varphi_1)} = x_m e^{j\psi} e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

Nach Division durch den Faktor  $e^{j(\omega t + \varphi_1)}$  folgt aus der Gleichheit der Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten:

$$x_{m1} + x_{m2} \cos \Delta\varphi = x_m \cos \psi; \quad x_{m2} \sin \Delta\varphi = x_m \sin \psi.$$

Es gilt also für den Phasenwinkel  $\psi$  zwischen  $x_1$  und  $x$ :

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{x_{m2} \sin \Delta\varphi}{x_{m1} + x_{m2} \cos \Delta\varphi} = 0,5166; \quad \psi = 27,3^\circ.$$



Weiterhin folgt wegen  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$  für die Amplitude von  $x$ :

$$x_m = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2} \cos \Delta\varphi} = 16,0 \text{ cm.}$$

**705**  $t = 0,01 \text{ s}; 0,05 \text{ s}; 0,07 \text{ s}; 0,11 \text{ s.}$       **706**  $x_{1s} = 13 \text{ cm}, x_{2s} = x_{5s} = -13 \text{ cm}, x_{5\text{min}} = 0.$

**707**  $x_m = |a_m|T^2/(4\pi^2) = 13 \text{ cm}; \quad \sin \varphi_0 = x_0/x_m, \varphi_0 \approx 45^\circ (\pi/4).$

**708**  $f_P/f_R = 2.$       **709** Mit  $E = (k/2)x_m^2$  und  $F = kx_m$  folgt  $x_m = 2E/F = 4 \text{ cm.}$

**710** Mit  $\mu = m/2$  (vgl. Aufgabe 688) wird  $\omega_0 = \sqrt{A/\mu} = 5,79 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}; f_0 = 9,21 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}.$

**711**  $J = M/(4\pi^2 f_0^2 \varphi).$  Mit  $M = 35 \text{ N m}, f_0 = 1,5 \text{ Hz}$  und  $\varphi = \pi/12$  folgt  $J = 1,5 \text{ kg m}^2.$

**712** a)  $J = J_1 T_0^2/(T_1^2 - T_0^2) = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2;$       **713**  $R = \sqrt{2D/k} = 4,0 \text{ cm.}$

b)  $D = 4\pi^2 J_1/(T_1^2 - T_0^2) = 7,28 \cdot 10^{-4} \text{ N m/rad.}$

**714** Für die hier vorliegende reibungsfreie Drehschwingung gilt die Schwingungsdifferentialgleichung  $J\ddot{\varphi} + D\varphi = 0$ . Mit  $J = ml^2/3$  und dem rücktreibenden Drehmoment  $M = -Fl = -D\varphi = -kxl \approx -kl^2\varphi$  folgt daraus  $(ml^2/3)\ddot{\varphi} + kl^2\varphi = 0$  bzw.  $\ddot{\varphi} + (3k/m)\varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ , d. h.  $\omega_0 = \sqrt{3k/m} = 20 \text{ s}^{-1}, f_0 = 3,2 \text{ Hz.}$

**715** Das rücktreibende Drehmoment ist bei kleinen Auslenkungen  $M = -mgl \sin \varphi - kxa$  (vgl. Aufgabe 692). Mit  $x = a \sin \varphi$  und  $\sin \varphi \approx \varphi$  folgt  $M = -(mgl + ka^2)\varphi$ . Aus  $M = J\ddot{\varphi}$  und  $J = ml^2$  erhält man  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$  mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{g/l + ka^2/(ml^2)}.$

**716**  $\ln(x_0/x_m) = n\delta T = \ln 2; n = \ln 2/(\delta T) = (f/\delta) \ln 2 = 10.$

**717** Aus  $e^{-\delta t} = 0,5$  folgt  $\delta = (\ln 2)/t = 0,0116 \text{ s}^{-1}$ . Mit  $T = 2,006 \text{ s}$  wird  $\Lambda = \delta T = 0,023.$

**718** a)  $\delta = (\ln 100)/(10 \text{ s}) = 0,46 \text{ s}^{-1}.$  b) Aus  $k/m = g/\Delta l = 100 \text{ s}^{-2}$  folgt  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$  und damit für den aperiodischen Grenzfall  $\delta = \omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}.$  c) Es ist  $\delta^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 - (4\pi^2/T^2)$  und  $T^2 = \Lambda^2/\delta^2$ , woraus folgt  $\delta = \omega_0 \Lambda / \sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2} = 6,9 \text{ s}^{-1}.$

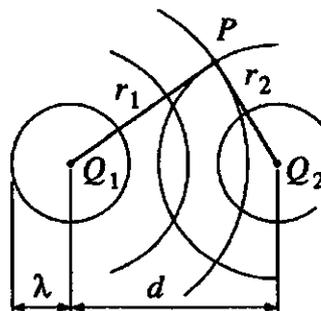
**719** Mit  $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  als Resonanzkreisfrequenz einer gedämpften Schwingung ist

$$\tan \varphi_R = \frac{2\delta\omega_R}{\omega_0^2 - \omega_R^2} = \frac{\omega_R}{\delta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}.$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  wird somit  $\tan \varphi_R \rightarrow \infty$  oder  $\varphi_R \rightarrow \pi/2$ , d. h., die Phase der erzwungenen Schwingung bleibt um  $90^\circ$  hinter der Erregung zurück. Die schwingende Masse geht also gerade durch die Gleichgewichtslage, wenn die erregende Kraft maximal ist. Desweiteren folgt für die Resonanzüberhöhung  $(u_m/x_m)_R \rightarrow \infty$ , d. h., im Resonanzfall würde bei fehlender Dämpfung die Resonatoramplitude unendlich groß („Resonanzkatastrophe“).

**720** a) Es ist  $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{(k/m) - 2\delta^2} = 11,23 \text{ s}^{-1}$  (vgl. Aufgabe 700), womit sich  $v = l/T_R = l f_R = l \omega_R / (2\pi) = 21,4 \text{ m/s} = 77,2 \text{ km/h}$  ergibt. b) Mit  $x_m = h/2$  wird  $u_m(\omega_R) = \omega_0 x_m / [2\delta \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2}] = 10,3 \text{ cm.}$

**746** (Bild) Für die Interferenzmaxima muß der Gangunterschied  $\Delta L$  als Differenz der Abstände  $r_1 = \overline{Q_1 P}$  und  $r_2 = \overline{Q_2 P}$  für alle Punkte  $P$  maximaler Verstärkung gleich  $|r_1 - r_2| = n\lambda$  sein. Diese Bedingung wird durch die Hyperbel als geometrischer Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, erfüllt. Die Interferenzmaxima einer bestimmten Ordnung  $n$  liegen also auf den zwei Ästen einer Hyperbel mit den Quellpunkten  $Q_1$  und  $Q_2$  als Brennpunkte. Der Abstand der Scheitelpunkte beider Hyperbeläste muß gleich  $n\lambda < d$  sein. Die höchste Ordnung der Interferenz ist also der größte ganzzahlige Wert  $n$ , der die Bedingung  $n < d/\lambda$  erfüllt; er hängt damit vom Verhältnis des Quellpunktabstandes zur Wellenlänge ab.



**747** a) Die Überlagerung der Wellenzüge entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung und Phase

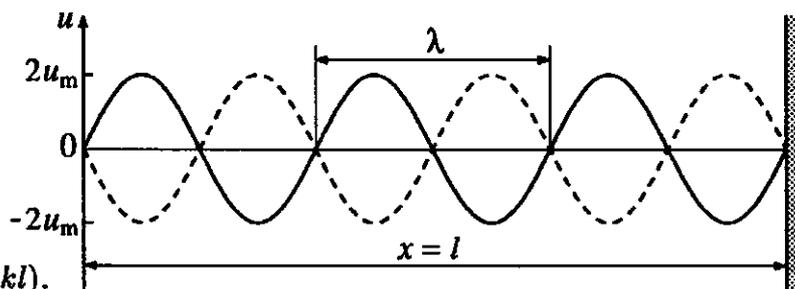
$$u_1 = u_m \cos(\omega t - kx) \quad \text{und}$$

$$u_2 = -u_m \cos(\omega t + kx - 2kl)$$

(s. Aufgabe 743, Lösung) ergibt die stehende Welle

$$u = u_1 + u_2$$

$$= 2u_m \sin(\omega t - kl) \sin(kx - kl).$$



Die für laufende Wellen typische Verknüpfung von Zeit  $t$  und Ortskoordinate  $x$  im Argument der sin- bzw. cos-Funktion, die das Fortschreiten der Phase anzeigt, tritt in der Wellenfunktion der stehenden Welle nicht mehr auf; in ihr sind  $t$  und  $x$  entkoppelt. Der stehenden Welle entspricht demnach eine Schwingung (Eigenschwingung)  $\sin(\omega t - kl)$  der Frequenz  $\omega$  mit der ortsabhängigen Amplitude  $2u_m \sin(kx - kl)$ . b) Für  $k(x_K - l) = -n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), d. h. bei  $x_K = l - n\pi/k = l - n(\lambda/2) = 3 \text{ m}; 2,5 \text{ m}; \dots; 0,5 \text{ m}; 0$  ist die Amplitude null. Hier liegen die Schwingungsknoten. Schwingungsbäuche mit maximaler Amplitude  $2u_m$  bilden sich für  $k(x_B - l) = -n\pi - \pi/2$ , d. h. bei  $x_B = l - n\pi/k - \pi/(2k) = l - (2n + 1)(\lambda/4) = 2,75 \text{ m}; 2,25 \text{ m}; \dots; 0,25 \text{ m}$ . Der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten oder Bäuchen beträgt also jeweils  $\lambda/2$  (Bild).

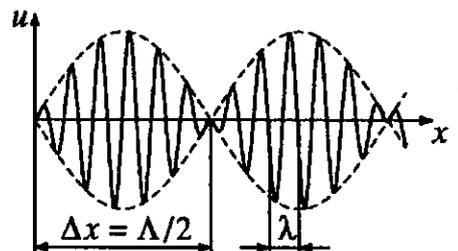
**748** (Bild) a) Die Resultierende aus den Teilwellen

$$u_1 = u_m \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{und} \quad u_2 = u_m \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

ist mit  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ ,  $k_1 - k_2 = \Delta k$  und  $(\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega$ ,  $(k_1 + k_2)/2 = k$ :

$$u = u_1 + u_2 = 2u_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \sin(\omega t - kx)$$

$$= A(t, x) \sin(\omega t - kx), \quad (1)$$



entsprechend einer harmonischen Welle mit der orts- und zeitabhängigen Amplitude  $A(t, x)$ . b) Die Tonfrequenz der Welle (1) ist  $f = \omega/(2\pi) = (f_1 + f_2)/2 = 439 \text{ Hz}$ , entsprechend  $\lambda = c/f = 0,774 \text{ m}$ . c) Nach (1) ist die Amplitude der Schwebung

$$A(t, x) = 2u_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) = 2u_m \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\Lambda}\right)\right]$$

mit der Schwebungsdauer  $T_S = T/2 = 2\pi/\Delta\omega$  bzw. der Schwebungsfrequenz  $f_S = 1/T_S = f_1 - f_2 = 2 \text{ Hz}$ . Die Breite einer Wellengruppe ist

$$\Delta x = \frac{\Lambda}{2} = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{1}{(1/\lambda_1) - (1/\lambda_2)} = \frac{c}{f_1 - f_2} = \frac{c}{f_S} = 170 \text{ m}.$$

**749** Wenn wie hier die Phasengeschwindigkeit  $c$  eine Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  ist, liegt Dispersion vor, und es muß zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit  $c_g$  unterschieden werden. a) Für  $\lambda = 10 \text{ m}$  ist  $c = \sqrt{g\lambda/(2\pi)} = 3,95 \text{ m/s}$ .  $c_g$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich z. B. die

**758**  $u_1 = u_m \sin \omega_1(t - x/c_1)$  und  $u_2 = u_m \sin \omega_2(t - x/c_2)$ . Schwebungswelle:

$$u_1 + u_2 = 2u_m \sin \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{x}{2} \left( \frac{\omega_1}{c_1} + \frac{\omega_2}{c_2} \right) \right] \cos \left[ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{x}{2} \left( \frac{\omega_1}{c_1} - \frac{\omega_2}{c_2} \right) \right].$$

$c_g$  ist diejenige Geschwindigkeit, mit der sich die Amplitude der Schwebung (cos-Funktion = 1) fortpflanzt (vgl. Aufgabe 748), d. h.

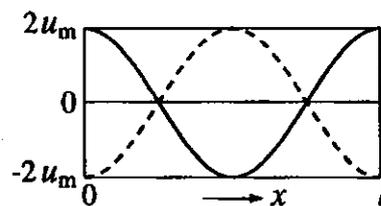
$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{x}{2} \left( \frac{\omega_1}{c_1} - \frac{\omega_2}{c_2} \right) = 0, \quad \frac{x}{t} = c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{(\omega_1/c_1) - (\omega_2/c_2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = 0,225 \text{ m/s}.$$

**759**  $\Delta L = [2(n+z) + 1]\lambda/2 - (2n+1)\lambda/2 = z\lambda$ ;  $\Delta\varphi = k \Delta L = (2\pi/\lambda) \Delta L = 2\pi z$ .

**760** Für das erste Interferenzminimum gilt  $\Delta L = L_1 - L_2 = \lambda/2$ ;  $\lambda = 1,22 \text{ m}$ ;  $f = 279 \text{ Hz}$ .

**761** a) und b):  $f_n = c/\lambda_n = nc/(2l)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Mit  $f_1 = 100 \text{ Hz}$  (Grundschiwingung) wird  $f_n = nf_1 = 200 \text{ Hz}, 300 \text{ Hz}, \dots$  (2., 3., ... Oberschiwingung). c)  $f_1 = c/(4l) = 50 \text{ Hz}$ ;  $f_n = (2n-1)f_1 = 150 \text{ Hz}, 250 \text{ Hz}, \dots$

**762** (Bild) An den Stabenden befinden sich Schwingungsbäuche. Es ist  $u(t, x) = 2u_m \sin \omega t \cos kx$  mit  $k = n\pi/l$  bzw.  $l = n(\lambda/2)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Hier ist  $n = 2$ .



Aufgabe 762

**763** Mit  $c = 340 \text{ m/s}$  wird  $\lambda = c/f = 77,3 \text{ cm}$ ;  $l = \lambda/4 \approx 20 \text{ cm}$ .

**764**  $\lambda/4 = 20 \text{ cm}$ ;  $\lambda = 80 \text{ cm}$ ;  $f = c/\lambda = 425 \text{ Hz}$ .

**765** Frequenz der emittierten Wellen  $f_e = 9,4 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ , Frequenz der reflektierten Wellen  $f_r = f_e/[1 - (v/c)]$ , Schwebungsfrequenz  $f_s = f_r - f_e$ ;  $v = c/[(f_e/f_s) + 1] \approx 120 \text{ km/h}$ .

**766** Da Quelle und Empfänger beide die Geschwindigkeit  $v$  haben, folgt für die Empfangsfrequenz bei gegenseitiger Annäherung  $f = f_0(c+v)/(c-v)$ . Mit  $\gamma = f/f_0 = 9/8$  erhält man  $v = c(\gamma - 1)/(\gamma + 1) = c/17 = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$ .

**767** Der Stern nähert sich uns (Violettverschiebung) mit der Geschwindigkeit  $v = c \Delta\lambda/\lambda_0 = 103 \text{ km/s}$  (vgl. Aufgabe 752).

$$\text{768} \quad c_g = \frac{h}{2\pi m} k.$$

**769** a)  $c_g = d\omega/dk = (\omega_m a/2) \cos(ka/2)$ . b) Für  $\lambda \gg a$  oder  $ka \ll 2\pi$  gilt die Näherung  $\sin(ka/2) \approx ka/2$  und somit  $\omega(k) = \omega_m \sin(ka/2) \approx \omega_m ka/2$ ,  $c_g = d\omega/dk = \omega/k = \omega_m a/2 = c$ , d. h.  $\omega$  hängt linear von  $k$  ab; die Gruppengeschwindigkeit ist konstant und gleich der Phasengeschwindigkeit. c)  $c_g = 0$ . Dies folgt für  $ka/2 = \pi/2$ , d. h.  $k = \pi/a$  oder  $\lambda = 2a$ .

**770**  $\lambda = c/f \approx 17 \text{ mm} \dots 21 \text{ m}$ .

**771** Bei einer Umdrehung je Sekunde ist die Frequenz  $f = z \text{ Hz}$ , bei  $n = 20$  Umdrehungen/s ist  $f = nz = 300 \text{ Hz}$ .

**772** Sind Gasdruck  $p$  und Gasdichte  $\rho$  gegeben, so berechnet sich die Schallgeschwindigkeit eines Gases nach  $c = \sqrt{\kappa p/\rho}$  mit  $\kappa = C_{mp}/C_{mV}$  als Adiabatenexponent ( $C_{mp}$ ,  $C_{mV}$  Molwärmern, vgl. Aufgabe 433). Für ein zweiatomiges Gas ( $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  mit jeweils 5 Molekül-Freiheitsgraden) ist mit  $R_m$  als molarer Gaskonstante  $C_{mV} = (5/2)R_m$  und  $C_{mp} = C_{mV} + R_m = (7/2)R_m$ , d. h.  $\kappa = 1,4$ . Damit wird  $c_0 = 331,6 \text{ m/s}$  (Normwert).

**773** Es ist  $c = \sqrt{\kappa R_m T/M}$  (diese Beziehung ist identisch mit der in Aufgabe 772, wenn dort für die Dichte  $\rho = M/V_m$  und gemäß der Zustandsgleichung  $p = R_m T/V_m$  gesetzt wird). Mit  $R_m = 8,3145 \text{ J/(mol K)}$  erhält man für  $T_1 = (273,15 + 30) \text{ K} = 303,15 \text{ K}$ :  $c_1 = 349,4 \text{ m/s}$  und damit wegen  $c_1/c_2 = \sqrt{T_1/T_2}$  für  $T_2 = (273,15 - 20) \text{ K} = 253,15 \text{ K}$ :  $c_2 = 319,3 \text{ m/s}$ . Einem Grad Temperaturerhöhung entspricht also eine Vergrößerung von  $c$  um  $0,6 \text{ m/s}$ .

**774** Für die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten gilt  $c = \sqrt{K/\rho}$ . Dabei ist  $\rho$  die Dichte und  $K$  der Kompressionsmodul der Flüssigkeit (reziproker Wert der Kompressibilität, vgl. Aufgabe 246). Dieser gibt die Druckzunahme  $\Delta p$  (auf  $10 \text{ m}$  Wassertiefe beträgt sie  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ) bezogen auf die damit verbundene relative Volumenabnahme  $-\Delta V/V$  bzw. Dichtezunahme  $\Delta\rho/\rho$  an, also

$K = -\Delta p/(\Delta V/V) = \Delta p/(\Delta \rho/\rho)$  (wegen  $\rho = m/V$  bzw. nach Differentiation mit  $m = \text{const}$ :  $\Delta \rho/\Delta V = -m/V^2 = -\rho/V$ ). Hier ist  $\Delta p = 10^7 \text{ Pa}$  und  $\Delta \rho/\rho = 0,0046$ , womit  $K = 2,17 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  und  $c = 1450 \text{ m/s}$  folgt.

**775** Die Wellenlänge der Grundschwingung des in der Mitte eingespannten Messingstabes ist  $\lambda_M = 2l$  (an jedem Stabende ein Wellenbauch), womit sich als Schwingungsfrequenz des Stabes  $f = c_M/\lambda_M = c_M/(2l)$  ergibt. Diese ist gleich der Frequenz der vom Stab abgestrahlten Schallwellen in Luft  $c_L/\lambda_L$ ; es gilt also  $c_M/\lambda_M = c_L/\lambda_L$ , woraus folgt  $c_M = c_L(\lambda_M/\lambda_L) = c_L(2l/\lambda_L) = 3460 \text{ m/s}$ . Die Schallgeschwindigkeit in einem dünnen Stab ist  $c = \sqrt{E/\rho}$ , woraus mit den Werten für Messing folgt  $E = \rho c_M^2 = 1,03 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 103 \text{ GPa}$ .

**776** Nach dem HOOKEschen Gesetz  $\sigma = E\varepsilon$  erhält man mit der Dehnung  $\varepsilon = \Delta l/l$ , der Zugspannung  $\sigma = F/A = mg/A$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  als Längenänderung  $\Delta l = l\varepsilon = l\sigma/E = lmg/(EA)$ . Die Geschwindigkeit der longitudinalen Schallwellen in einem dünnen Stab ist  $c = \sqrt{E/\rho} = l/t$ , woraus man  $E = \rho l^2/t^2$  erhält. Dies oben eingesetzt, ergibt  $\Delta l = mgt^2/(\rho l A) = 0,45 \text{ mm}$ .

**777** Die Phasengeschwindigkeit von Seilwellen (Transversalwellen) berechnet sich aus  $c = \sqrt{\sigma/\rho}$ . Da für die zwischen den beiden festen Enden der Saite sich ausbildenden stehenden Wellen der Wellenlänge  $\lambda$  (Eigenschwingungen) stets  $l = n(\lambda/2)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt, folgt für die Frequenz der  $n$ -ten harmonischen Oberschwingung

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n}{2l}c = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad \text{mit der Frequenz der Grundschwingung } f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}. \quad (1)$$

a) Für  $f_1 = 200 \text{ Hz}$  (Grundschwingung) ergibt sich daraus eine Saitenspannung von  $\sigma = 4\rho l^2 f_1^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 0,2 \text{ GPa}$ . Mit  $A = \pi d^2/4 = 1,96 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$  wird die Zugkraft  $F = \sigma A = 39,2 \text{ N}$ . b) Es ist jetzt mit  $l' = l/2$ ,  $d' = 2d$  bzw.  $A' = 4A$  sowie  $F' = F/4$  nach (1):

$$f_1' = \frac{1}{2l'}\sqrt{\frac{F'}{\rho A'}} = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \frac{f_1}{2} = 100 \text{ Hz}.$$

**778** Der Schallpegel  $L$  (gemeinsame Bezeichnung für Schallintensitäts- und Schalldruckpegel) ist definiert durch

$$L/\text{dB} = 10 \lg \frac{J}{J_0} = 20 \lg \frac{p}{p_0}, \quad (1)$$

wobei  $J$  die Schallintensität oder Schallstärke (in  $\text{W/m}^2$ ) und  $p = p_m/\sqrt{2}$  der Effektivwert des Schallwechseldruckes oder Schalldruckes mit  $p_m$  als Schallwechseldruckamplitude (in  $\text{Pa} \equiv \text{N/m}^2$ ) ist. Bezugsgrößen dabei sind  $J_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  (Hörschwelle beim 1000-Hz-Ton) und  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  (zu  $J_0$  gehöriger effektiver Schalldruck). Für  $J = J_0$  bzw.  $p = p_0$  ist also  $L = 0$ . Es gilt  $J \sim p^2$ , daher in (1) bei  $\lg p$  der Faktor 20 statt 10 bei  $\lg J$ . a) Es ist nach (1)

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \lg \frac{J_2}{J_0} - 10 \lg \frac{J_1}{J_0} = 10 \lg \frac{J_2}{J_1},$$

d. h.  $J_2/J_1 = 10^{\Delta L/10}$ , mit  $\Delta L = 1 \text{ dB}$  also  $J_2/J_1 = 1,26$ . b) Entsprechend folgt aus (1) mit  $\Delta L = 1 \text{ dB}$  für das Verhältnis der Schalldrücke  $p_2/p_1 = 10^{\Delta L/20} = 1,12$ .

**779** Der Lautstärkepegel  $A$ , gemessen in phon, stimmt bei der Frequenz 1000 Hz mit dem Schallpegel  $L$ , gemessen in Dezibel (vgl. Aufgabe 778), überein:  $A = 10 \lg(J/J_0)$ . Demnach ist a)  $A_1 = 10 \text{ phon}$ ; b)  $A_2 = 20 \text{ phon}$ ; c)  $A_3 = 50 \text{ phon}$ ; d)  $A_4 = 120 \text{ phon}$ . Die Schmerzgrenze des menschlichen Ohres liegt bei 130 phon.

**780** Das Schalldämmmaß, gemessen in dB, ist definiert durch  $R = L_1 - L_2 = 10 \lg(J_1/J_2)$ , wobei  $J_1$  und  $L_1$  Schallintensität und Schallpegel außen und  $J_2$  und  $L_2$  die entsprechenden Größen innen sind. a) Aus  $L_2 = 40 \text{ dB}$  und  $R = 50 \text{ dB}$  folgt  $L_1 = L_2 + R = 90 \text{ dB}$  (Hupe, Druckluftbohrer). b) Es ist  $\lg(J_1/J_2) = R/10 = 5$ , somit  $J_1/J_2 = 10^5$ .