

Das rotierende Massependel

1. Aufgabenstellung

- 1.1. Die Winkelauslenkung des Zeigers der Schwingplatte ist in Abhängigkeit vom angreifenden Drehmoment zu messen und graphisch darzustellen. Das Direktionsmoment D der Spiralfeder ist daraus durch lineare Regression zu bestimmen (statische Methode).
- 1.2. Die Schwingungsdauer T der Schwingplatte mit aufgesetztem Vollzylinder ist in Abhängigkeit von dessen Abstand s von der Drehachse zu messen, die funktionale Abhängigkeit $T^2 = f(s^2)$ ist graphisch darzustellen, der Satz von Steiner ist zu bestätigen. Direktionsmoment D der Feder und Trägheitsmoment J der Schwingplatte sind durch lineare Regression zu ermitteln (dynamische Methode der D -Bestimmung).
- 1.3. Eine Koordinate des Massenmittelpunkts und eins der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers sind experimentell zu bestimmen.

2. Grundlagen zum Versuch

2.1. Bestimmung des Direktionsmoments (statische Methode)

Für eine einfache, translatorische Schraubenfeder gilt bekannterweise:

$$F_r = -k \cdot s \quad (1)$$

Durch Ersetzen der translatorischen Größen mit ihren rotatorischen Pendants erhält man:

$$M_r = -D \cdot \varphi \quad (2)$$

beziehungsweise zur gesuchten Größe umgestellt:

$$D = -\frac{M_r}{\varphi} \quad (2a)$$

Das hier genannte Rückstellmoment M_r , welches von der Feder ausgeübt wird, muss im statischen Fall dem durch das Gewicht an der Umlenkrolle zugefügte Drehmoment betragsmäßig entsprechen. Ein Drehmoment ist das Produkt aus Kraft und Hebelarm [Gröbel]:

$$M_r = -M = -F_G \cdot r \quad (3)$$

$$D = \frac{F_G \cdot r}{\varphi} \quad (3a)$$

2.2. Die dynamische Methode der Direktionsmomentbestimmung

Für Periodendauer einer Schraubenfeder, an der eine Masse translatorisch schwingt, ist seit der Mittelstufe bekannt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

Überträgt man auch hier die Größen auf die Rotation, so gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (5)$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment J setzt sich zusammen aus dem Massenträgheitsmoment

(MTM) des Drehtisches J_0 sowie dem MTM, das durch den aufgesteckten Massezylinder dazukommt. Dieses bestimmt sich nach dem Satz von Steiner durch das eigene MTM (zur Symmetrieachse des Zylinders) J_Z sowie dem abstandsabhängigen Summanden MS^2 (M ist die Masse des Zylinders, S sein Abstand zur Schwerachse):

$$J = J_0 + J_Z + MS^2 \quad (6)$$

Aus (4) und (5) ergibt sich:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + J_Z + MS^2}{D}} \quad (7)$$

Laut Aufgabenstellung sollen wir einen Zusammenhang $T^2 = f(S^2)$ aufstellen. Dieser Zusammenhang ergibt sich als Quadrat der obigen Gleichung:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + J_Z + MS^2}{D} = \frac{4\pi^2 \cdot (J_0 + J_Z)}{D} + \frac{4\pi^2 \cdot M}{D} \cdot S^2 \quad (7a)$$

Führt man eine lineare Regression des $T^2 = f(S^2)$ -Diagramms durch, so erhält man eine Steigung a sowie einen Achsenabschnitt b , aus denen man wie folgt das Direktionsmoment D und das Massenträgheitsmoment J_0 des Tisches bestimmen kann:

$$T^2 = f(S^2) = a \cdot S^2 + b \quad (8)$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot M}{a} \quad (8a)$$

$$J_0 = \frac{b \cdot D}{4\pi^2} - J_Z \quad (8b)$$

2.3. Die dynamische Methode der Schwerpunktsbestimmung

Mit dem Formelwerk der vorherigen Aufgabe haben wir einen Zusammenhang zwischen Abstand des Aufsteckkörpers von der Drehachse und der Periodendauer. Genauer betrachtet ist S der Abstand des Schwerpunktes dieses Körpers von der Drehachse. Formel (8) gibt an, dass die Schwingungsdauer T minimal wird, wenn auch der Abstand S minimal (also null) wird.

Dieser Zusammenhang wird auch klar, wenn man sich das Zustandekommen des Massenträgheitsmomentes nach Steiner anguckt, Formel (6): Liegt der Schwerpunkt des Probekörpers genau auf der Drehachse, so wird der Summand $MS^2 = 0$ und folglich das MTM minimal.

Interessanter ist die Frage, wie man anhand von endlich vielen Messwerten nun den Tiefpunkt des T - s -Diagramms ermittelt. Eine lineare Regression ist untauglich, da wir eine echt quadratische Gleichung vorliegen haben. Die Literatur schlägt als „quadratische Regression“ das Aufstellen eines überbestimmten, linearen Gleichungssystems vor, das über die „Methode der kleinsten Quadrate“ (Gauss) näherungsweise gelöst werden kann [HoehMath].

Demnach kann aus der folgenden, im Optimalfall für jeden Messwert gültigen Gleichung:

$$T = a s^2 + b s + c \quad (9a)$$

folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden, welches dann nicht mehr überbestimmt ist:

$$\begin{pmatrix} \sum s_i^4 & \sum s_i^3 & \sum s_i^2 \\ \sum s_i^3 & \sum s_i^2 & \sum s_i^1 \\ \sum s_i^2 & \sum s_i^1 & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum s_i^2 T_i \\ \sum s_i T_i \\ \sum T_i \end{pmatrix} \quad (9b)$$

Aus diesem Gleichungssystem ergibt sich eine Parabel mit den Parametern a , b und c , dessen Tiefpunkt analytisch zu bestimmen ist. Dadurch ergibt sich der Abstand S_0 des Schwerpunkts von den Einsteckbolzen.

Aus dem Satz von Steiner (6) kann man dann das Massenträgheitsmoment dieses Körpers bestimmen. Als Ausgangspunkt können wir wie bei dem 2. Versuch die Formel (7a) nutzen:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + J_K + M(S - S_0)^2}{D} \quad (10a)$$

Das Massenträgheitsmoment des Drehtisches J_0 ist mittlerweile bekannt, ebenso der Abstand S_0 des Schwerpunktes von dem Einsteckpunkt. Masse M und Direktionsmoment D brauchen ebenso nicht mehr errechnet werden. Folglich lässt sich aus (10a) das Massenträgheitsmoment J_K des Probekörpers bestimmen:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + J_K}{D} + \frac{4\pi^2 M}{D} \cdot (S - S_0)^2 \quad (10b)$$

Die Anwendung der obigen Formel erfordert wiederum eine lineare Regression zwischen $(S - S_0)^2$ und T^2 .

3. Versuchsaufbau

3.1. Verwendete Gerätschaften

Für die statische Messung nutzten wir eine Winkelskala auf der Drehplatte, die auf $\Delta\varphi = 1^\circ$ genau abzulesen war. Die Zugkraft wurde über mehrere Gewichte realisiert (50g, 2x 20g, 10g). Der Hebelarm betrug $r = 0,5 \cdot (31,3 \text{ mm} + 0,7 \text{ mm}) = 16 \text{ mm}$.

Bei der dynamischen Messung brauchten wir eine Gabellichtschranke, die die Periodendauer mit einer Genauigkeit von $\Delta T_{GLS} = 0,001 \text{ s}$ messen kann (die Genauigkeit ist keine Herstellerangabe, sie ist aus der Anzahl der Ziffern in der Digitalanzeige geschätzt). Verschiedene Massenträgheitsmomente wurden mit einem Vollzylinder erzeugt, dessen Masse $M = 179,3472 \text{ g}$ beträgt. Sein Radius beträgt $R = 15,0 \text{ mm}$, daraus folgt sein Massenträgheitsmoment $J_Z = 0,5 \cdot M \cdot R^2 = 20,17656 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ [StroppeMTM].

Der unsymmetrische Probekörper, den wir in der dritten Teilaufgabe vermessen haben, hat eine Masse von $M = 276,01 \text{ g}$ bei einer Höhe von $h = 14,9 \text{ mm}$.

3.2. Versuchsdurchführung

Die Erzeugung der zehn unterschiedlichen Drehmomente geschieht während der statischen Messung durch Anhängen von Gewichtstücken (mit bekannter Masse) an eine Kordel, die über eine Umlenkrolle an der Achse des Drehtisches angreift, und zwar tangential:

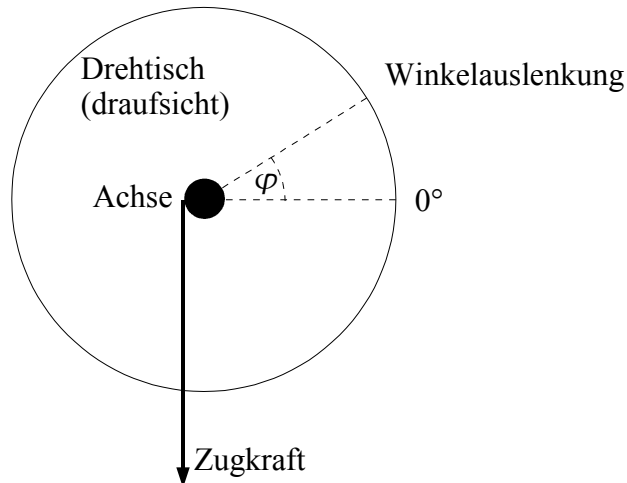


Abbildung 1: Versuchsanordnung bei der statischen Direktionsmomentsmessung

Im dynamischen Fall wird die Periodendauer gemessen, die sich verändert, wenn man das Gesamtmassenträgheitsmoment variiert, indem man einen Massezylinder auf dem Drehtisch verschiebt. Die Periodendauer wird dabei vom Abstand S des Massezylinders zur Drehachse beeinflusst, nicht jedoch von der Anfangsauslenkung. Dennoch wird diese stets mit 50° konstant gehalten.

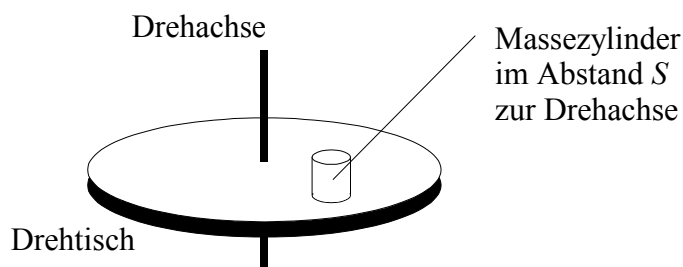


Abbildung 2: Versuchsanordnung bei der dynamischen Direktionsmomentsmessung

Die Messungen an dem Probekörper der dritten Teilaufgabe erfolgt analog zu den Messungen im zweiten Versuch.

4. Messergebnisse

4.1. Die statische Messung

Rechnet man das angehängte Gewicht über die Gravitationskonstante $g=9,81\text{ ms}^{-2}$ in die ausgeübte Zugkraft um, so erhält man aus unseren Messwerten folgendes Diagramm:

Die eingezeichnete Regressionsgerade hat folgende Gleichung:

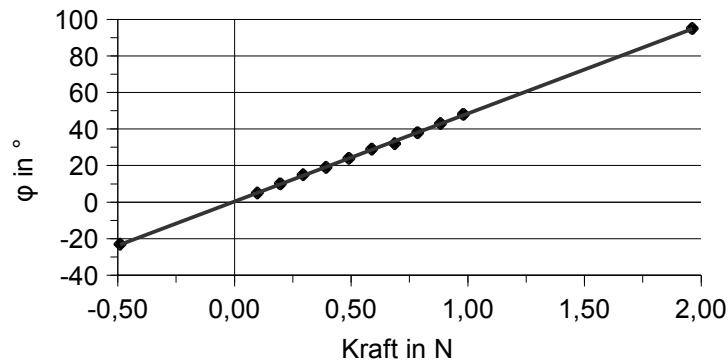


Abbildung 3: Unsere Messwerte bei der statischen Messung

$$\varphi = 0,384^\circ + 48,113^\circ \frac{F_G}{1\text{ N}} \approx 48,113^\circ \frac{F_G}{1\text{ N}} \quad (11a)$$

Setzt man diesen Zusammenhang in die Gleichung (3a) ein, so erhält man:

$$D = \frac{F_G \cdot r}{48,113^\circ \frac{F_G}{1\text{ N}}} = \frac{r \cdot 1\text{ N}}{48,113^\circ} \quad (11b)$$

In dieser Formel bezeichnet r den Hebelarm der angreifenden Kraft. Es wurden $r = 16\text{ mm}$ gemessen:

$$D = \frac{0,016\text{ m} \cdot 1\text{ N}}{48,113^\circ} = \frac{0,016\text{ m} \cdot 1\text{ N}}{48,113^\circ \cdot \pi \cdot (180^\circ)^{-1}} = 0,01905\text{ Nm}$$

4.2. Die dynamische Messung

Die beiden direkt ermittelten Versuchsgrößen T und S sind in dem folgenden Diagramm quadratisch aufgetragen:

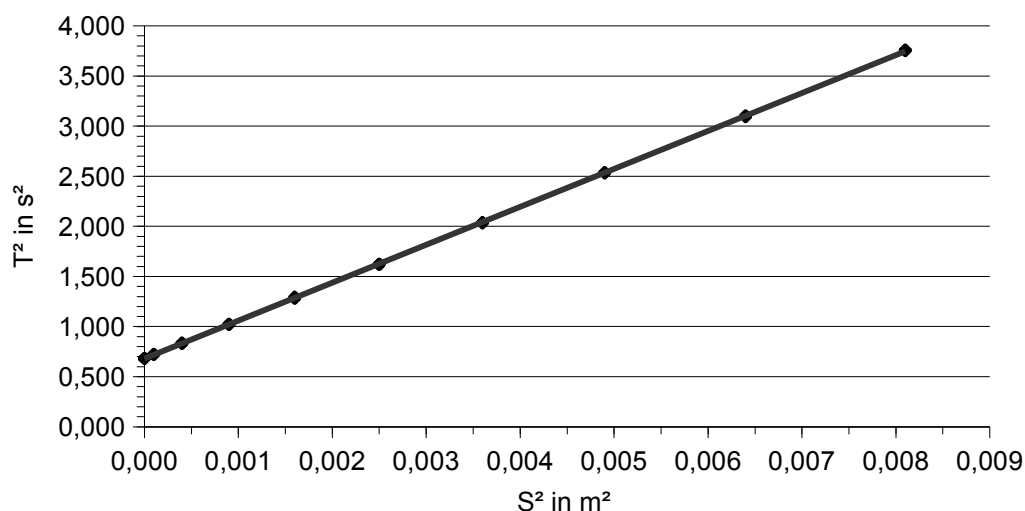


Abbildung 4: Die Messung der Periodendauer in Abhängigkeit des Ortes der Zusatzmasse

Die hier gefundene Regressionsgerade lautet:

$$T^2 = 0,681\text{ s}^2 + 378,511 \frac{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{m}^2} \quad (12)$$

Setzt man diese Erkenntnis in die Gleichungen (8), (8a) und (8b) ein, so erhält man die folgenden Zusammenhänge:

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot M}{378,511 \frac{s^2}{m^2}} = \frac{4\pi^2 \cdot 179,3472 \text{ g}}{378,511 \frac{s^2}{m^2}} = 0,01870 \frac{m^2 \cdot kg}{s^2} = 0,01870 \text{ Nm} \quad (13a)$$

$$J_0 = \frac{b \cdot D}{4\pi^2} - J_z = \frac{0,681 s^2 \cdot 0,01870 \text{ Nm}}{4\pi^2} - J_z = 0,0003225737 \text{ kg} \cdot m^2 - J_z \quad (13b)$$

Um das Massenträgheitsmoment des Drehtisches J_0 zu erfahren, müssen wir nur noch das Massenträgheitsmoment des Massezylinders J_z einsetzen:

$$J_0 = 0,0003225737 \text{ kg} \cdot m^2 - 20,17656 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot m^2 = 302,39714 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot m^2 \quad (13c)$$

4.3. Die Schwerpunktsbestimmung

Stellt man die Messwerte der Periodendauer in Abhängigkeit des Abstandes s dar, so erhält man folgendes Diagramm:

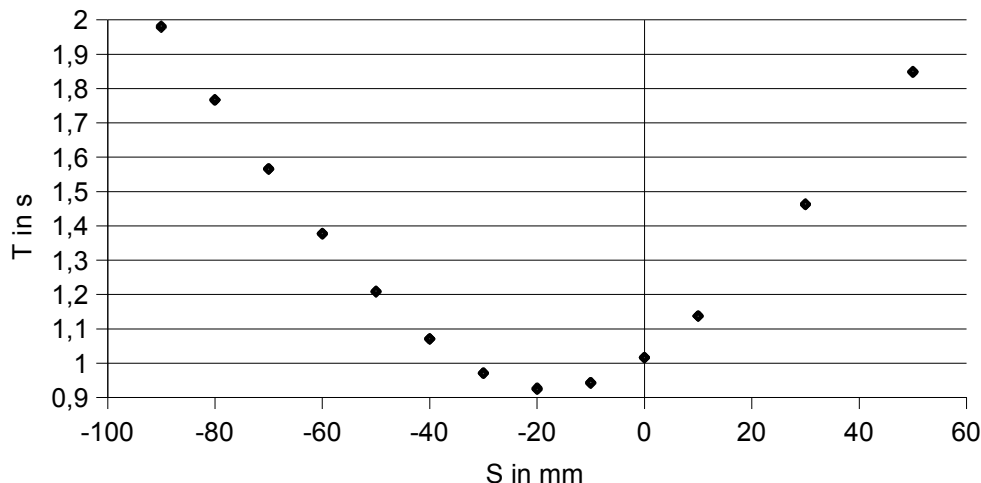


Abbildung 5: Die Periodendauerkurve bei dem Probekörper, dessen Schwerpunkt dynamisch zu bestimmen war

Aus Gleichung (9b) können wir folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 415590000 & -4887000 & 87900 \\ -4887000 & 87900 & -990 \\ 87900 & -990 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140268,7 \\ -1395,1 \\ 49,8 \end{pmatrix} \quad (14a)$$

Daraus ergibt sich der quadratische Zusammenhang:

$$T = 0,000201985 \frac{s}{mm^2} S^2 + 0,00689 \frac{s}{mm} S + 1,0239 s \quad (14b)$$

Der Tiefpunkt dieser Kurve liegt bei $S_0 = -17,0557 \text{ mm}$, d.h. der Schwerpunkt des gut 17 mm hinter dem Einsteckpunkt:

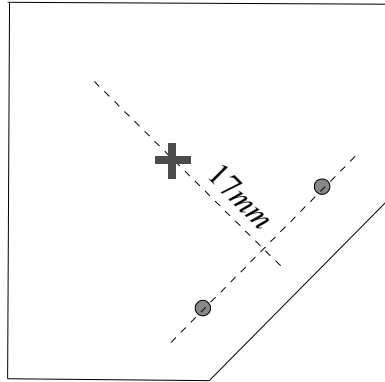


Abbildung 6: Die Lage des Schwerpunktes im Probekörper

Man kann nun das Massenträgheitsmoment dieses Körpers bezüglich einer Rotation um die Schwerpunktsachse wiederum aus dem Satz von Steiner berechnen. Für Formel (10b) benötigen wir ein $(S - S_0)^2 - T^2$ -Diagramm:

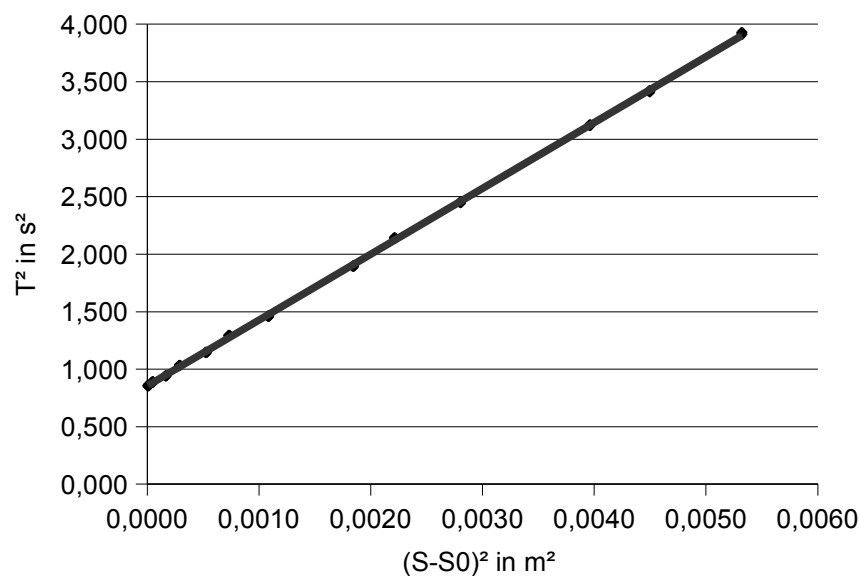


Abbildung 7: $S^2 - T^2$ -Diagramm des dritten Versuchs

Die eingezeichnete Regressionsgerade lautet wie folgt:

$$T^2 = 0,854356 s^2 + 572,642602 \frac{s^2}{m^2} (S - S_0)^2 \quad (15a)$$

Diese Gleichung muss (10b) entsprechen:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + J_K}{D} + \frac{4\pi^2 M}{D} \cdot (S - S_0)^2 \quad (15b)$$

also:

$$4\pi^2 \cdot \frac{302,39714 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 + J_K}{0,01905 \text{ Nm}} = 0,854356 s^2 \quad (15c)$$

$$J_K = \frac{0,854356 s^2 \cdot 0,01905 \text{ kg m}^2 s^{-2}}{4\pi^2} - 302,39714 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 = 0,00010987 \text{ kg m}^2 \quad (15d)$$

5. Messunsicherheiten

5.1. Unsicherheiten bei der statischen Messung

Setzt man (3a) und den gefundenen Regressionszusammenhang in die Formel der linearen Fehlerfortpflanzung ein, so erhält man:

$$D = \frac{F_G \cdot r}{\varphi} = \frac{r \cdot 1 \text{ N}}{0,83973}$$

(Hierbei ist $a=0,83973$ die Steigung der Regressionsgeraden. Ihre mittlere Abweichung beträgt $\Delta a=0,2663$.)

$$\Delta D_{\max} = \frac{r \cdot 1 \text{ N}}{a} = \left| \frac{\partial D}{\partial r} \Delta r \right| + \left| \frac{\partial D}{\partial a} \Delta a \right| = \left| \frac{1 \text{ N}}{a} \cdot \Delta r \right| + \left| \frac{r \cdot 1 \text{ N}}{a^2} \cdot \Delta a \right| \quad (16)$$

Für den Hebelarm nehmen wir $\Delta r=0,3 \text{ mm}$ an. Das Messgerät mag zwar genauer messen können, doch wir mussten einen Faden messen, der sehr leicht nachgab. Unsere mehrfachen Messungen ergaben einen entsprechend großen Spielraum.

$$\Delta D_{\max} = \left| \frac{1 \text{ N}}{0,83973} \cdot 0,3 \text{ mm} \right| + \left| \frac{16 \text{ mm} \cdot 1 \text{ N}}{0,83973^2} \cdot 0,2663 \right| = 0,3573 \text{ mNm} + 6,0424 \text{ mNm} = 0,00640 \text{ Nm}$$

Damit ist das Ergebnis der statischen Messung:

$$D = 0,0191 \text{ Nm} \pm 0,0064 \text{ Nm}$$

5.2. Unsicherheiten bei der dynamischen Messung

Aus $D = \frac{4\pi^2 \cdot M}{a}$ mit $a = 378,511 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$ und $\Delta a = 0,39074 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$ erhalten wir:

$$\Delta D = \left| \frac{\partial D}{\partial M} \cdot \Delta M \right| + \left| \frac{\partial D}{\partial a} \cdot \Delta a \right| = \left| \frac{4\pi^2}{a} \cdot \Delta M \right| + \left| \frac{4\pi^2 \cdot M}{a^2} \cdot \Delta a \right| \quad (17)$$

Mit $M = 179,3472 \text{ g} \pm 0,0001 \text{ g}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta D &= \left| \frac{4\pi^2}{378,511 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}} \cdot 0,0001 \text{ g} \right| + \left| \frac{4\pi^2 \cdot 179,3472 \text{ g}}{\left(378,511 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right)^2} \cdot 0,39074 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right| \\ &= 0,0000104299 \text{ g} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 0,0193101 \text{ g} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 0,00001932056 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$D = 0,01870 \text{ Nm} \pm 0,00002 \text{ Nm}$$

6. Zusammenfassung und Diskussion

Das Direktionsmoment der Feder:

$$D_{\text{stat}} = 0,0191 \text{ Nm} \pm 0,0064 \text{ Nm}$$

$$D_{\text{dyn}} = 0,01870 \text{ Nm} \pm 0,00002 \text{ Nm}$$

Das Massenträgheitsmoment des Drehtisches:

$$J_0 = 302,39714 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Die Schwerpunktlage relativ zum Einsteckpunkt und das Hauptmassenträgheitsmoment des Körpers:

$$S_0 = -17,0557 \text{ mm}$$

$$J_K = 0,00010987 \text{ kg m}^2$$

Zunächst fällt auf, dass die dynamische Messung wesentlich genauer ist als die statische. Dies mag darin begründet sein, dass bei der statischen Messung die Winkelablesung nur auf ca. 1° genau erfolgen konnte und „Augenmaß“ erforderte, während bei der dynamischen Messung eine Lichtschranke mit Messelektronik genutzt werden konnte.

Ebenso lassen sich aus der dynamischen Messung mehr Informationen ableiten, hier neben dem Direktionsmoment auch das Massenträgheitsmoment des gesamten Drehtisches. Über letzteres konnten wir im dritten Versuch anhand des Satzes von Steiner sogar Massenträgheitsmomente eines Probekörpers zu beliebigen Achsen errechnen. Somit war auch der Schwerpunkt errechenbar.

7. Literatur

Gröbel: Gröbel, Technische Mechanik I: Statik, 2004, <http://www.uni-magdeburg.de/ifme/l-dynamik/grundkurs-et.html>

HoehMath: Meyberg, Vachenauer, Höhere Mathematik 1, Springer-Verlag Berlin, 1999, Seite 403ff (Funktionen in mehreren Variablen: Differentiation)

StroppeMTM: H. Stroppe, Physik für Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften, Fachbuchverlag Leipzig, 2003, Seite 92ff (Dynamik des starren Körpers)