M11 - Trägheitsmomente aus Drehschwingungen

				Note	
Vers.-Nr.	**Name des Versuchs**	**Seite**	**Datum**		
M11	Trägheitsmomente aus Drehschwingungen	2 – 12			

1 Aufgabenstellung

1.1 Die Winkelauslenkung des Zeigers der Schwingplatte ist in Abhängigkeit vom angreifenden Drehmoment zu messen und graphisch darzustellen. Das Direktionsmoment D der Spiralfeder ist daraus durch lineare Regression zu bestimmen (statische Methode).

1.2 Die Schwingungsdauer T der Schwingplatte mit aufgesetztem Vollzylinder ist in Abhängigkeit von dessen Abstand s von der Drehachse zu messen, die funktionale Abhängigkeit $T^2 = f(s^2)$ ist graphisch darzustellen, der Satz von Steiner ist zu bestätigen. Direktionsmoment D der Feder und Trägheitsmoment J der Schwingplatte sind durch lineare Regression zu ermitteln (dynamische Methode).

1.3 Eine Koordinate des Massenmittelpunkts und eins der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers sind experimentell zu bestimmen.

2 Grundlagen zum Versuch

2.1 Formeln zu 1.1

Angreifendes Drehmoment M bei Anhängen einer Masse m und dem Hebelarm r

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = r \cdot F_g \cdot \sin 90° = r \cdot m \cdot g \qquad (1)$$

Das Rückstellmoment M_r ist der Auslenkung ρ proportional

$$M_r = -D \cdot \rho$$

Der Proportionalitätsfaktor D heißt das Direktionsmoment der Feder.

Nach der Auslenkung ist die Anordnung in Ruhe, d.h. M und M_r heben sich auf

$$M + M_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot m \cdot g = D \cdot \rho$$
$$\Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{D} \cdot r \cdot g \cdot m \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{D} \cdot M \qquad (3)$$

Also ist ρ proportional zu m. Mittels Gleichung (4) kann nun mittels linearer Regression D bestimmt werden.
D ergibt sich dann mit Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetztes als:

$$D = \frac{1}{b} \pm \frac{1}{b^2} \bar{s}_b \qquad (4)$$

2.2 Formeln zu 1.2

Differentialgleichung der *ungedämpften* Schwingung

$$J \cdot \ddot{\rho} + D \cdot \rho = 0 \qquad (5)$$

Die Sinusfunktion erfüllt diese Gleichung, außerdem ρ(0) = 0, damit setzen wir an:

$$\rho(t) = \hat{\rho} \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{6}$$

Damit

$$\ddot{\rho}(t) = -\hat{\rho} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{7}$$

(6) und (7) in (5):

$$-J \cdot \hat{\rho} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + D \cdot \hat{\rho} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$$

$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{D}{J}$ mit $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ ergibt sich

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \frac{J}{D} \tag{8}$$

wobei sich J mit dem Satz von Steiner bestimmt durch

$$J = J_D + J_K + m_K \cdot s^2 \tag{9}$$

mit s als Abstand Drehachse - Schwerpunktachse

(9) in (8):

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{D}(J_D + J_K) + 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot m_K \cdot s^2 \tag{10}$$

(10) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen T^2 und s^2 dar.
So kann D aus linearer Regression bestimmt werden. D ergibt sich hier nach Anwendung der linearen Fehlerfortpflanzung als:

$$D = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_K}{b} \pm \left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_K}{b^2} \bar{s}_b + \frac{4 \cdot \pi^2}{b} \Delta m_{sys} \right) \tag{11}$$

Außerdem lässt sich J_D bestimmen als:

$$J_D = \frac{a \cdot D}{4 \cdot \pi^2} - J_K \tag{12}$$

J_K eines Zylinders ist gegeben durch

$$J_K = \int_V r^2 dm = \frac{1}{2} m_K \cdot R^2 \tag{13}$$

(11) und (13) in (12) ergibt:

$$J_D = \frac{m_K \cdot a}{b} - \frac{1}{2} m_K \cdot R^2 \tag{14}$$

2.3 *Formeln zu 1.3*

Aus (9) folgt:

$$J = J_K + J_D + m_K \cdot (s + x_s)^2 \tag{15.1}$$

wobei x_s den (unbekannten) Abstand von den Zapfen zum Schwerpunkt des Körpers angibt.
Also ist J eine quadratische Funktion von s.
Aus quadratischer Regression ergibt sich für J folgende Funktion von s:

$$J = a + b \cdot s + c \cdot s^2 \tag{15.2}$$

Trägt man nun J in Abhängigkeit von s auf, ergibt sich eine Parabel. Das Minimum bestimmt denjenigen Abstand s, für den J am kleinsten ist, d.h. für den der Massenmittelpunkt mit der Drehachse zusammenfällt.
Das Massenträgheitsmoment des Körpers berechnet sich dabei nach (15) zu

$$J_K = J_{\min} - J_D \tag{15.3}$$

Da bei minimaler Periodendauer $s + x_s = 0$.

2.4 *Formeln zur linearen Regression*

Als Schaubild des linearen Zusammenhangs sollte sich eine Gerade ergeben mit der allgemeinen Gleichung

$$y = a_1 + b_1 \cdot x \tag{16.1}$$

mit den Parametern

$$a_1 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x} \tag{16.2}$$

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{16.3}$$

wobei

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{16.3.1}$$

und

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (16.3.2)$$

Für die Abweichung von b_1 und a_1 ergibt sich

$$\bar{s}_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\overline{(\Delta y)^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}} \qquad (16.3.3)$$

$$\bar{s}_a = \bar{s}_b \cdot \sqrt{\overline{x^2}} \qquad (16.3.4)$$

wobei

$$\overline{(\Delta y^2)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 \qquad (16.3.5)$$

und

$$\overline{\Delta y}_i = a_1 + b_1 \cdot x_i - y_i \qquad (16.3.6)$$

3 Versuchsaufbau

Zu 1.1

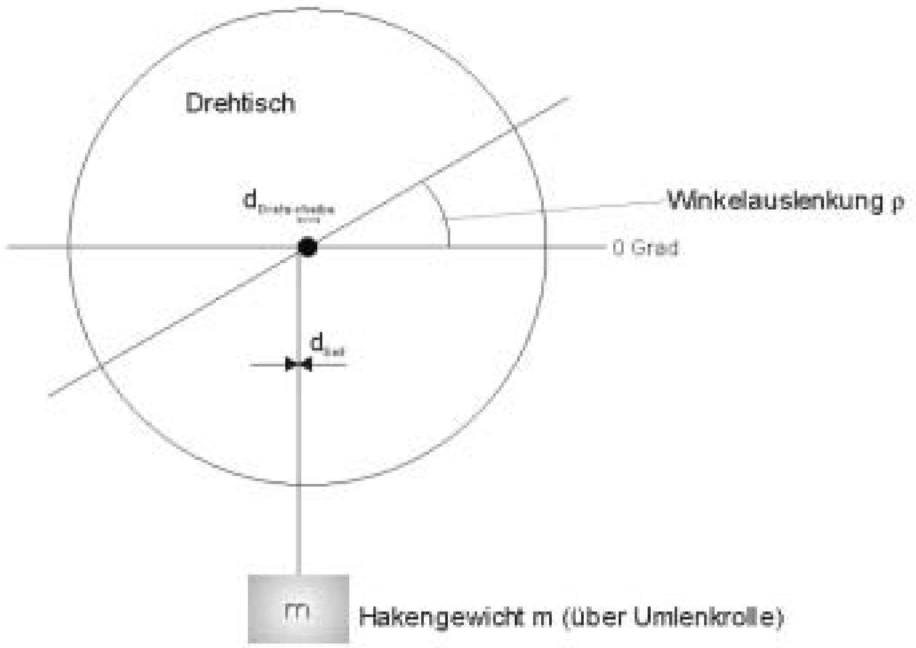

Abb.1 statische Methode

$d_{Drehscheibe} = 3{,}1$ cm $\qquad d_{Seil} = 0{,}1$ cm

D.h., der Hebelarm r ergibt sich zu r = 1,6 cm.

Zu 1.2

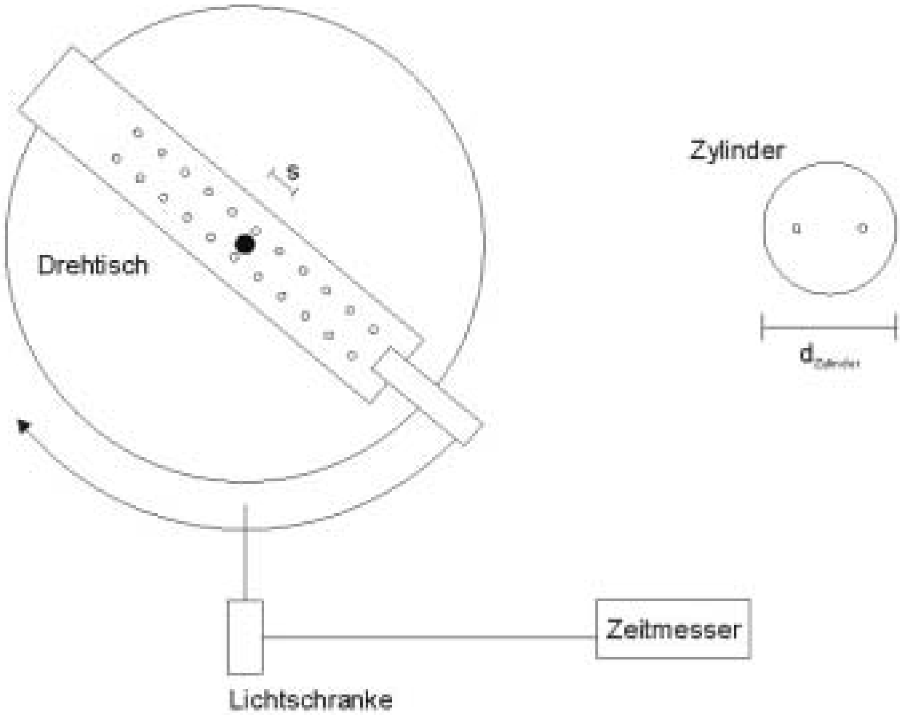

Abb.2 dynamische Methode

$s = 1{,}0$ cm $\quad$ $d_{Zylinder} = 3{,}0$ cm

$m_{Zylinder} = 179{,}68$ g

Zu 1.3

Abb.3 Körper zu 1.3

4 Messergebnisse und Auswertungen

4.1 Erfassung in Tabellarischer Form und Auswertung zu 1.1

Nr.	m/kg	φ/°	M/Nm	φ/rad	φ^2	M^2	Φ * M	$\Delta\varphi^2$ nach 1.Regressionsgerade
1	0,01	4	0,002	0,070	0,005	0,00000	0,000109579	3,71068E-07
2	0,02	9	0,003	0,157	0,025	0,00001	0,000493104	4,17511E-05
3	0,03	13	0,005	0,227	0,051	0,00002	0,001068393	1,53752E-05
4	0,04	18	0,006	0,314	0,099	0,00004	0,001972418	9,91955E-06
5	0,05	22	0,008	0,384	0,147	0,00006	0,003013416	5,23178E-05
6	0,06	28	0,009	0,489	0,239	0,00009	0,004602308	0,000298973
7	0,08	36	0,013	0,628	0,395	0,00016	0,00788967	1,20716E-05
8	0,1	45	0,016	0,785	0,617	0,00025	0,01232761	4,60551E-05
9	0,12	54	0,019	0,942	0,888	0,00035	0,017751758	0,000101977
10	0,15	68	0,024	1,187	1,409	0,00055	0,027942582	4,01916E-05
11	0,2	92	0,031	1,606	2,578	0,00099	0,050406226	0,000133641

Tab.1 Messwerte bei statischer Methode (Anhängen eines Gewichts)

Linearer Zusammenhang nach (3) :

$$\rho = \frac{1}{D} \cdot M$$

Lineare Regression der Form $\rho = a + b \cdot M$ ergibt:

a = -0,00977

b = 51,0931 , $\bar{s}_b = 0{,}31070$

Der Korrelationskoeffizient ergibt sich zu: r = 0,999833638

Damit folgt nach (4)

D = 0,019572 Nm

4.2 Erfassung in tabellarischer Form und Auswertung zu 1.2

Nr.	T/s	s/cm	T^2/s^2	s^2/m^2	T^4/s^4	s^4/m^4	$s^2 * T^2$
1	0,822	0	0,676	0	0,457	0	0,0000000
2	0,824	0	0,679	0	0,461	0	0,0000000
3	0,824	0	0,679	0	0,461	0	0,0000000
4	0,848	1	0,719	0,0001	0,517	0,00000001	0,0000719
5	0,847	1	0,717	0,0001	0,515	0,00000001	0,0000717
6	0,845	1	0,714	0,0001	0,510	0,00000001	0,0000714
7	0,909	2	0,826	0,0004	0,683	0,00000016	0,0003305
8	0,907	2	0,823	0,0004	0,677	0,00000016	0,0003291
9	0,906	2	0,821	0,0004	0,674	0,00000016	0,0003283
10	1,005	3	1,010	0,0009	1,020	0,00000081	0,0009090
11	1,004	3	1,008	0,0009	1,016	0,00000081	0,0009072
12	1,002	3	1,004	0,0009	1,008	0,00000081	0,0009036
13	1,124	4	1,263	0,0016	1,596	0,00000256	0,0020214
14	1,121	4	1,257	0,0016	1,579	0,00000256	0,0020106
15	1,120	4	1,254	0,0016	1,574	0,00000256	0,0020070
16	1,262	5	1,593	0,0025	2,537	0,00000625	0,0039816
17	1,261	5	1,590	0,0025	2,528	0,00000625	0,0039753
18	1,262	5	1,593	0,0025	2,537	0,00000625	0,0039816
19	1,406	6	1,977	0,0036	3,908	0,00001296	0,0071166
20	1,411	6	1,991	0,0036	3,964	0,00001296	0,0071673
21	1,409	6	1,985	0,0036	3,941	0,00001296	0,0071470
22	1,569	7	2,462	0,0049	6,060	0,00002401	0,0120626
23	1,568	7	2,459	0,0049	6,045	0,00002401	0,0120473
24	1,571	7	2,468	0,0049	6,091	0,00002401	0,0120934
25	1,737	8	3,017	0,0064	9,103	0,00004096	0,0193099
26	1,735	8	3,010	0,0064	9,061	0,00004096	0,0192654
27	1,734	8	3,007	0,0064	9,041	0,00004096	0,0192432
28	1,904	9	3,625	0,0081	13,142	0,00006561	0,0293642
29	1,908	9	3,640	0,0081	13,253	0,00006561	0,0294878
30	1,904	9	3,625	0,0081	13,142	0,00006561	0,0293642

Tab.2 Messwerte bei dynamischer Methode

Linearer Zusammenhang zwischen T^2 und s^2 nach (10)

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{D}\left(J_D + J_K\right) + 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot m_K \cdot s^2$$

Lineare Regression der Form $T^2 = a + b \cdot s^2$ ergibt:

b = 364,35900 , $\bar{s}_b = 0{,}32260$

a = 0,67799 , $\bar{s}_a = 0{,}00126$

Der Korrelationskoeffizient ergibt sich zu: r = 0,99998903

Damit folgt nach (11)

$D = 0{,}019468\,Nm$

und nach (14) errechnet sich das Trägheitsmoment des Drehtisches zu:

$J_D = 0{,}0003141\,kg\,m^2$

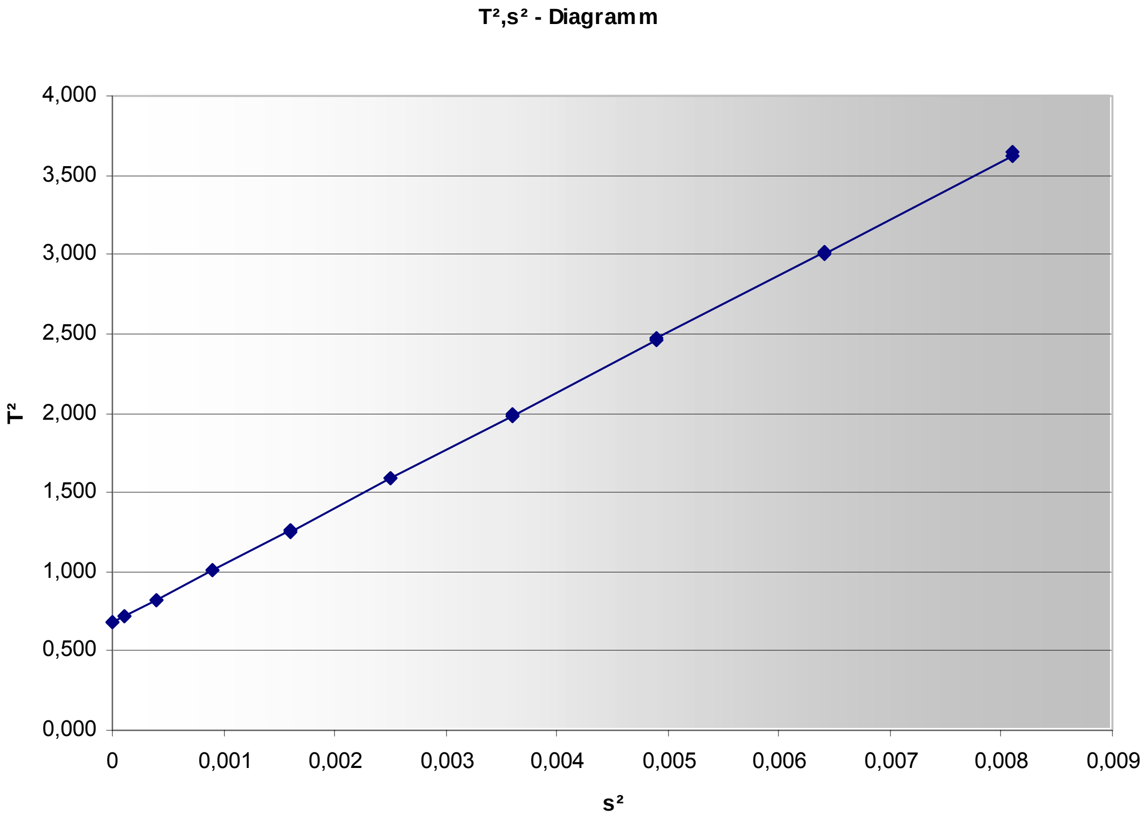

Abb.4 T^2 in Abhängigkeit von s^2

Da bei der dynamischen Methode der Satz von Steiner zur Anwendung gekommen ist und das Ergebnis mit dem aus der statischen Methode nahezu übereinstimmt, kann der Satz von Steiner als erfüllt gelten.

4.3 Erfassung in tabellarischer Form und Auswertung zu 1.3

Nr.	T/s	s/cm	Nr.	T/s	s/cm
1	1,199	-5	18	1,019	0
2	1,198	-5	19	1,142	1
3	1,197	-5	20	1,140	1
4	1,064	-4	21	1,145	1
5	1,064	-4	22	1,295	2
6	1,064	-4	23	1,298	2
7	0,968	-3	24	1,296	2
8	0,968	-3	25	1,480	3
9	0,969	-3	26	1,482	3
10	0,923	-2	27	1,480	3
11	0,924	-2	28	1,669	4
12	0,926	-2	29	1,668	4
13	0,943	-1	30	1,671	4
14	0,942	-1	31	1,876	5
15	0,943	-1	32	1,884	5
16	1,021	0	33	1,873	5
17	1,020	0			

Tab.3 Messwerte bei dynamischer Methode mit unregelmäßigem Körper

(15.1) bzw. (15.2) geben einen quadratischen Zusammenhang zwischen dem Gesamtmassenträgheitsmoment und der Koordinate s des Einsteckpunktes an. Nach quadratischer Regression der Form

$$J = a + b \cdot s + c \cdot s^2$$

gibt der Rechner als Koeffizienten a, b, c an:

$a = 5{,}153499 \cdot 10^{-4}$ $\quad \Delta a = 3{,}571857 \cdot 10^{-7}$

$b = 1{,}030344 \cdot 10^{-5}$ $\quad \Delta b = 7{,}477069 \cdot 10^{-9}$

$c = 2{,}852356 \cdot 10^{-7}$ $\quad \Delta c = 2{,}677220 \cdot 10^{-10}$

Das ergibt eine Parabel mit Minimum bei

$$s_{\min} = -18{,}061288\,mm \;\; (\Delta s_{\min} = 0{,}030059\,mm)$$
$$J_{\min} = 4{,}2230 \cdot 10^{-4}\,kg\,m^2 \;\; (\Delta J_{\min} = 5{,}79565 \cdot 10^{-7}\,kg\,m^2)$$

Der Funktionswert am Tiefpunkt gibt das minimale Gesamtmassenträgheitsmoment an. D.h. hätte man den Körper bei dieser Koordinate eingesteckt wäre $m_K \cdot (s + x_s)^2 = 0$
Das wiederum heißt, dass der Schwerpunkt des Körpers direkt über der Drehachse liegt. Damit ist der Abstand des Schwerpunktes von den Zapfen

$$x_s = -s_{\min} = 18{,}061\,mm$$

Das Trägheitsmoment J_K bzgl. einer Rotation um die Schwerpunktachse senkrecht zur Symmetrieebene ergibt sich damit nach (15.1) und mit $m_K \cdot (s + x_s)^2 = 0$ zu

$$J_K = J_{\min} - J_D = 0{,}0001082\,kg\,m^2$$

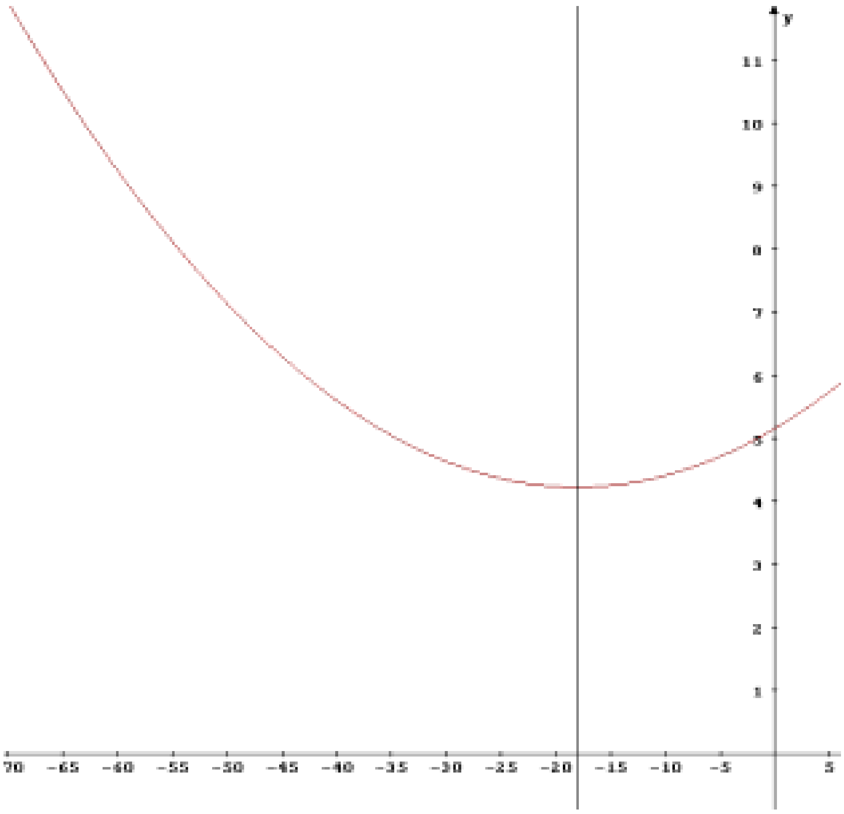

Abb.5 Regressionsparabel

5 Messunsicherheiten

5.1 Messunsicherheiten zu 1.1

Nach (4) ergibt sich der Fehler von D zu

$$\Delta D = \frac{1}{b^2} \cdot \bar{s}_b = 0{,}000119\, Nm$$

5.2 *Messunsicherheiten zu 1.2*

Lineare Fehlerfortpflanzung liefert aus (11)

$$\Delta D = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_K}{b^2} \bar{s}_b + \frac{4 \cdot \pi^2}{b} \Delta m_{sys} = 0{,}0000183\, Nm$$

Lineare Fehlerfortpflanzung nach (14) liefert

$$\Delta J_D = \left| \frac{a}{b} - \frac{R^2}{2} \right| \cdot \Delta m_{sys} + \left| \frac{m_K}{b} \right| \cdot \bar{s}_a + \left| - \frac{m_K \cdot a}{b^2} \right| \cdot \bar{s}_b + \left| m_K \cdot R \right| \cdot \Delta R_{sys} = 1{,}20596 \cdot 10^{-6}\, Nm$$

5.3 *Messunsicherheiten zu 1.3*

$$\Delta x_s = \Delta s_{\min} = 0{,}030059\, mm$$
$$\Delta J_K = \left| \Delta J_{\min} \right| + \left| \Delta J_D \right| = 4{,}235 \cdot 10^{-4}\, kg\, m^2$$

6 Ergebnisse/ Zusammenfassung

6.1 Ergebnisse zu 1.1

Mit der statischen Methode ergibt sich:

$$D = (0{,}019572 \pm 0{,}000119) Nm$$

6.2 Ergebnisse zu 1.2

Mit der dynamischen Methode ergibt sich:

$$D = (0{,}019468 \pm 0{,}0000183) Nm$$

$$J_D = (0{,}0003141 \pm 1{,}206 \cdot 10^{-6}) kg\, m^2$$

6.3 Ergebnisse zu 1.3

Der Massenmittel- bzw. Schwerpunkt des Körpers befindet sich auf der Mittelsenkrechten der beiden Zapfen bei

$$x_s = (18{,}061 \pm 0{,}3006)mm$$

wobei der Ursprung auf der Verbindungsstrecke zwischen den Zapfen liegt und zur Spitze hin die positive Richtung hat.
Das Hauptträgheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse senkrecht zur horizontalen Symmetrieebene beträgt

$$J_K = (0{,}0001082 \pm 0{,}00004235)kg\,m^2$$

7 Diskussion

Zu Aufgabe 1.1 lässt sich sagen, dass das Ablesen der Winkelauslenkung die größte Fehlerquelle war, da die Skaleneinteilung im 2°-Abstand war. Durch die lineare Regression scheint der Fehler aber größtenteils ausgeglichen worden zu sein, da der Korrelationskoeffizient beinahe genau 1 ist und der Koeffizient a vernachlässigbar klein ist. Beides spricht für den direkten linearen Zusammenhang.

Zu Aufgabe 1.2 lässt sich sagen, dass durch Messung nur einer Periode per Lichtschranke eine relativ hohe Genauigkeit erreicht wurde, da bei Messung nur einer Periode die Schwingung noch am ehesten eine ungedämpfte ist, was ja unsere Voraussetzung war.
Die dynamische Methode erscheint uns sehr genau, da quasi kaum Unsicherheitsfaktoren bestehen. Das schlägt sich auch im Korrelationskoeffizienten, der erst als siebte Nachkommastelle keine 8 oder 9 mehr hat, und in den extrem kleinen Fehlern für J_D und D nieder (etwa $\frac{1}{10}$ des Fehlers bei der statischen Methode). Trägt man T^2 gegen s^2 auf, so ist das Schaubild sehr gut als Gerade zu identifizieren. Das, und die Übereinstimmung mit dem Ergebnis von 1.1 kann als Maß für die Gültigkeit des Satzes von Steiner gelten.

Zu Aufgabe 1.3 schließlich ist zu bemerken, dass die gleiche Methode wie bei 1.2 angewandt wurde, die Unsicherheitsfaktoren sind also die gleichen. Für den Schwerpunkt des Körpers ergibt sich durch Berechnung:

$$x_S = \frac{1}{A}\int_A x\,dA = \frac{1}{A}\left(\int_{x_1}^{x_3} \int_{-\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\cdot x-\left(y_2-\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\cdot x_1\right)}^{\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\cdot x+y_2-\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\cdot x_1} x\,dydx + \int_{x_3}^{x_2} \int_{\frac{y_1}{x_2-x_3}\cdot x-\frac{x_2\cdot y_1}{x_2-x_3}}^{-\frac{y_1}{x_2-x_3}\cdot x+\frac{x_2\cdot y_1}{x_2-x_3}} x\,dydx \right) \Rightarrow x_s = 17{,}62mm$$

Der experimentell ermittelte Wert weicht also um ca. 0,4mm vom analytisch ermittelten ab.

8 Literatur

1. H. Stroppe — Physik, Fachbuchverlag Leipzig, Köln, 11., verbesserte Auflage 1999
2. Aufgabenstellung — M11
3. Walcher, W. — Praktikum der Physik, B.G. Teubner Stuttgart, 7. Auflage 1994