Physik-Praktikum 28.4.1999

M 11 Trägheitsmomente am Drehtisch

1 Aufgabenstellung

1.1 Die Winkelauslenkung des Drehtischs ist in Abhängigkeit vom angreifendenden Drehmoment zu messen und graphisch darzustellen. Das Direktionsmoment D der Spiralfeder ist daraus durch lineare Regression zu bestimmen (statische Methode).

1.2 Durch Messung der Schwingungsdauer T des Drehtisches mit aufgesetztem Vollzylinder in Abhängigkeit von dessen Abstand s von der Drehachse ist der Satz von Steiner zu bestätigen.

1.3 Die funktionale Abhängigkeit T2 = f(s2) ist graphisch darzustellen. Direktionsmoment D der Spiralfeder und Trägheitsmoment J des Drehtisches sind durch lineare Regression zu ermitteln (dynamische Methode der D-Bestimmung).

1.4 Eine Koordinate des Massenmittelpunkts und eins der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers sind experimentell zu bestimmen.

2 Grundlagen zum Versuch

1) Bestimmung des Direktionsmoments D der Spiralfeder (statische Methode)

Das angreifende Drehmoment M errechnet sich aus der Gewichtskraft des Hakengewichts und dem Radius der Achse.

$$M = \vec{r} \times \vec{F}_g = r \cdot F_g \cdot \sin 90^\circ = r \cdot F_g = r \cdot m \cdot g \qquad (1)$$

Gleichzeitig wird durch das angreifende Drehmoment M eine Winkelbeschleunigung α erzeugt.

$$\alpha = \frac{M}{J} \qquad (2)$$

Diese Winkelbeschleunigung wird kompensiert durch die vom Direktionsmoment D erzeugte Winkelbeschleunigung $\ddot{\rho}$, die der Winkelauslenkung ρ proportional ist.

$$\ddot{\rho} = -\frac{D}{J}\rho \qquad (3)$$

Die Winkelbeschleunigung α ist betragsmäßig so groß wie die Winkelbeschleunigung $\ddot{\rho}$, aber entgegengesetzt gerichtet.

$$\alpha = -\ddot{\rho} \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (2), (3) und (4) folgt dann:

$$\frac{M}{J} = \frac{D}{J}\rho \Rightarrow M = D \cdot \rho \qquad (5)$$

Mittels Gleichung (5) und den Meßwerten für Drehmoment M und Winkelauslenkung ρ kann über lineare Regression das Direktionsmoment D der Spiralfeder bestimmt werden.

2) Bestimmung des Direktionsmoments D der Spiralfeder (dynamische Methode) und des Trägheitsmomentes J_D des Drehtisches

Allgemein gilt für die Schwingungsdauer eines Drehtisches:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D} \tag{6}$$

Das Trägheitsmoment J des Systems Drehtisch + Zylinder ergibt sich aus den einzelnen Trägheitsmomenten:

$$J = J_D + J_Z \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich der Drehachse des Drehtisches berechnet sich nach dem Steinerschen Satz:

$$J_Z = \frac{mR^2}{2} + ms^2 \qquad (8),$$

wobei s der Abstand der Drehachse zur Zylinderachse , m Masse und R Radius des Zylinders sind.

Aus (7) und (8) folgt:

$$J = J_D + \frac{mR^2}{2} + ms^2 \tag{9}$$

Gleichung (9) eingesetzt in (6) ergibt folgende Beziehung:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(J_D + \frac{mR^2}{2} + ms^2\right) = \frac{4\pi^2 m}{D}s^2 + \frac{4\pi^2}{D}\left(J_D + \frac{mR^2}{2}\right) \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man die lineare Beziehung zwischen T² und s². Eine Linearität der graphischen Darstellung T²=f(s²) in der späteren Auswertung würde den Satz von Steiner betätigen.

Durch lineare Regression kann der Anstieg B der Ausgleichsgeraden bestimmt werden und daraus wiederum das Direktionsmoment D der Spiralfeder :

$$B = \frac{4\pi^2 m}{D} \Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{B} \tag{11}$$

Aus dem Achsenabschnitt A der Regressionsgeraden läßt sich dann das Trägheitsmoment J_D des Drehtisches bestimmen:

$$T^2(0) = A = \frac{4\pi^2}{D}\left(J_D + \frac{mR^2}{2}\right) \Rightarrow J_D = A\frac{D}{4\pi^2} - \frac{mR^2}{2} \tag{12}$$

Bei diesem Versuch bestimmen wir die Schwingungsdauer T für sämtliche Abstände s jeweils aus mindestens einer Dreifachmessung. Dabei messen wir die benötigte Zeit t für möglichst viele Einzelschwingungen n. Aus t und n errechnen wir T :

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{n_i} \tag{13}$$

3) Bestimmung des Massenmittelpunktes und eines der Hauptträgheitsmomente des unregelmäßig geformten Körpers

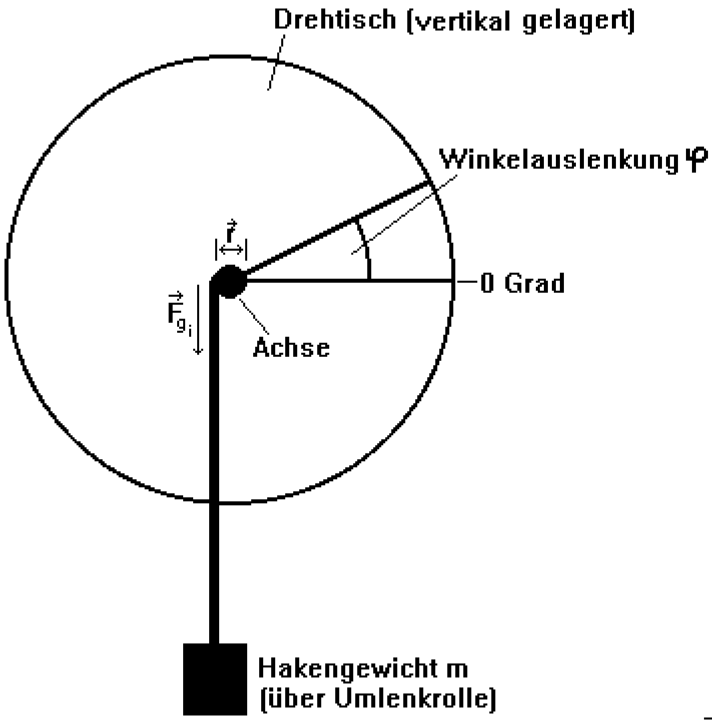
Der Probekörper wird nacheinander in Löcher verschiedenen Abstands s zur Drehachse gesteckt und das Massenträgheitsmoment des Körpers ausgerechnet (Messung über die Schwingungsdauer):

- nach (6) ergibt sich $J = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = J_D + J_K \Rightarrow J_K = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - J_D$ (14)

Das Massenträgheitsmoment des Körpers J_K wird nun in Abhängigkeit vom Abstand des Einsteckpunktes zur Achse s in ein Diagramm abgetragen. Bei einer Rotation des Probekörpers um seine Schwerpunktachse wird J_K am kleinsten, da dann Drehachse = Schwerpunktachse. Dieses Minimum ergibt sich aus der graphischen Darstellung, die einer Parabel entspricht. Der zum Minimum gehörende Abstand s_0 entspricht der Entfernung des Massenmittelpunktes vom Einsteckpunkt.
Die übrigen Koordinaten des Massenmittelpunktes ergeben sich aus Symmetriebetrachtungen.

3 Versuchsaufbau

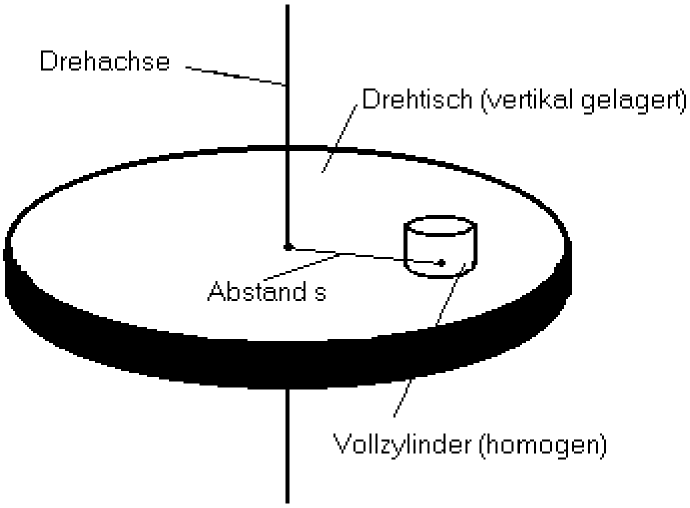
zu 1)



Auf der anderen Seite des Tisches befindet sich an der Achse eine Spiralfeder, die mit ihrem anderen Ende fest am Gehäuse des Drehtisches verschraubt ist.

zu 2 und 3)

Der Aufbau erfolgt gemäß der Abbildung. Im Teilversuch 3 wird anstatt des Vollzylinders ein Probekörper verwendet. Folgende Meßgeräte wurden verwendet: Waage zum Messen der Masse des Vollzylinders, Meßschieber zum Bestimmen der Durchmesser von Drehachse und Vollzylinder, Stoppuhr zum Messen der Dauer der Schwingungen.



5 Meßunsicherheiten

zusammengefaßte Meßunsicherheiten der einzelnen Meßgeräte (siehe Tabelle Meßergebnisse)

Meßschieber: Δx = $\pm$0,15mm

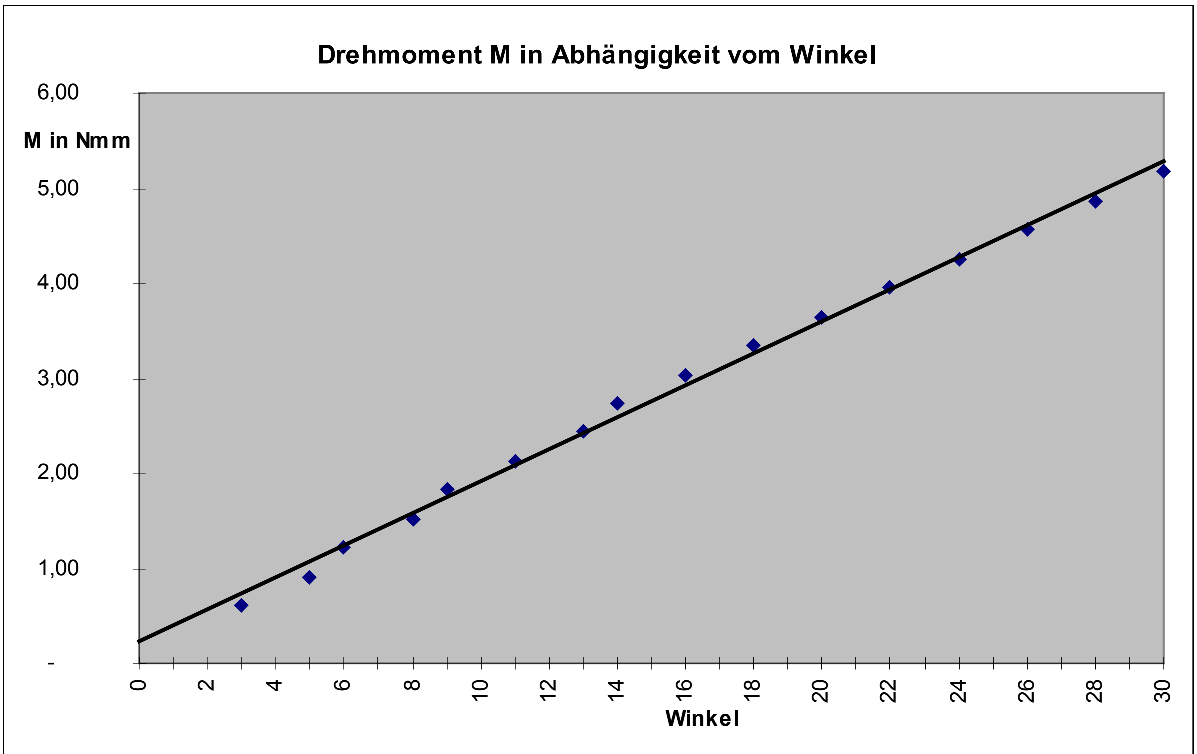
Waage: Δm = $\pm$0,015g

Stoppuhr: Δt = $\pm$(0,015s+5*10^{-4}*t) $\Rightarrow$ t = 12,61s max Zeitwert $\Rightarrow$ Δt = $\pm$0,022s

Drehtisch: $\Delta\rho$ = $\pm$3°

zu 1) Statische Methode der Bestimmung des Direktionsmomentes D

Aus (5) ergibt sich: $D = \frac{M}{\rho}$; in der graphischen Darstellung $M(\rho)$ entspricht D dem Anstieg der Regressionsgeraden (Parameter B). Zur Berechnung von D wurden vorher die Winkelangaben in Bogenmaß umgerechnet.



$\overline{M}$ = 0,0028890 Nm

$\overline{\rho}$ = 0,2759802

$\overline{M\rho}$ =0,0009998 Nm

$\overline{\rho^2}$ = 0,097116

Parameter $b = \dfrac{\overline{M\rho} - \overline{M} \cdot \overline{\rho}}{\overline{\rho^2} - (\overline{\rho})^2}$ = 9,667*10^{-3}Nm = ΔD

Parameter $a = \overline{M} - b \cdot \overline{\rho}$ = 0,221*10^{-3}Nm

Geradengleichung der Ausgleichsgeraden M = 0,221*10^{-3}Nm+9,667*10^{-3}Nm* ρ

Korrelationskoeffizient $r = \dfrac{\overline{M\rho} - \overline{M} \cdot \overline{\rho}}{\sqrt{\left[\overline{\rho^2} - (\overline{\rho})^2\right]\left[\overline{M^2} - (\overline{M})^2\right]}}$ = 0,99808

Vertrauensfaktor $t_{v,n-1}$ bei n=16 Messungen und Vertrauensniveau 99,73% = 3,586

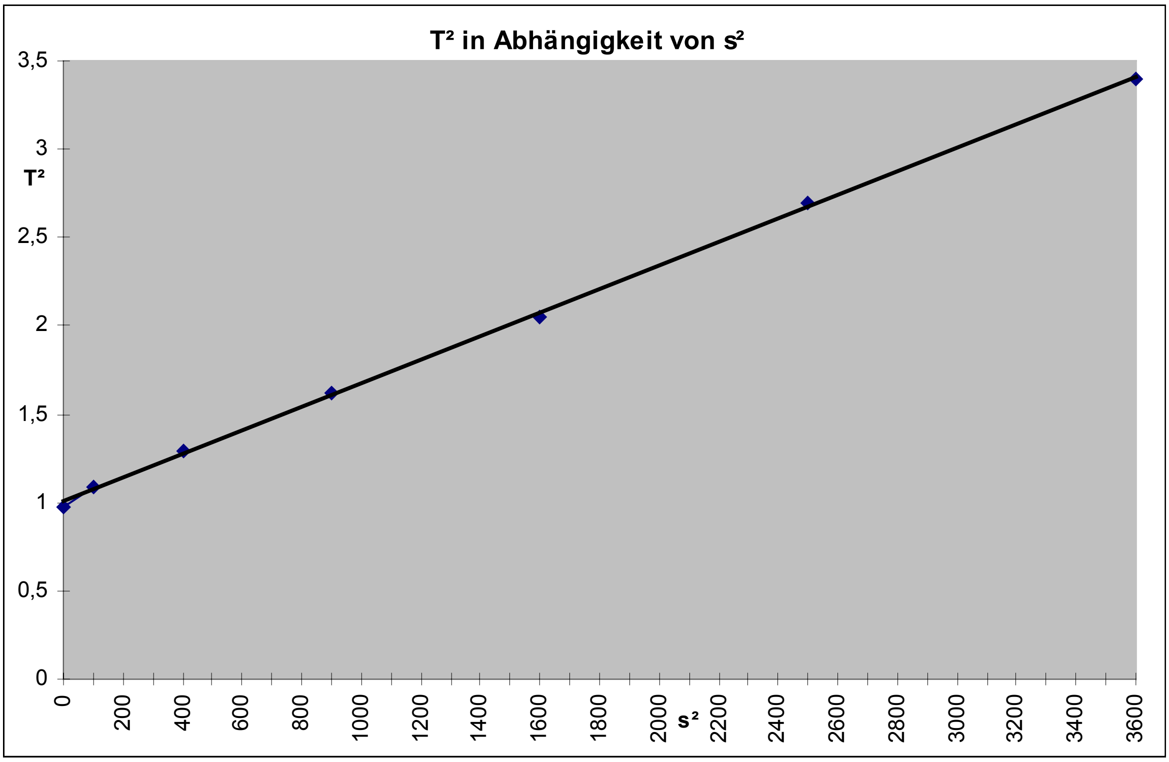
Unsicherheit des Anstiegs $\Delta B = t_{v,n-1} \cdot \sqrt{\dfrac{B^2 \cdot (1-r^2)}{(n-2) \cdot r^2}}$ = 0,58*10^{-3} Nm = ΔD

➔ Direktionsmoment D = **(9,67 $\pm$0,58)***10^{-3} **Nm**

zu 2) Bestimmung des Direktionsmomentes D (dynamische Methode) und des Trägheitsmomentes J des Drehtisches

Die Abstände der negativen und der positiven Achse fallen beim Quadrieren zusammen, deshalb wurden die Meßwerte der Zeiten für die entsprechenden Abstände zusammengefaßt, es liegen für s=0 nur 3 Meßwerte, für alle anderen Positionen 6 vor, aus denen sich $\overline{T}$ nach (13) errechnet .

MW von T	y=T² in s²	x=s² in m²
0,98714	0,97445	0,0000
1,04394	1,08980	0,0001
1,13525	1,28880	0,0004
1,27414	1,62342	0,0009
1,43301	2,05351	0,0016
1,64325	2,70028	0,0025
1,84468	3,40285	0,0036



x=s² und y=T²

$\overline{y}$ = 0,0028881 s²

$\bar{x}$ = 0,2759802 m²

$\overline{xy}$ = 0,0009995 s²m²

$\overline{x^2}$ = 0,0971158 m²*m²

Parameter $b = \dfrac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{x^2 - (\bar{x})^2}$ = 668,417 s²/m²

Parameter $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ = 1,007 s²

Geradengleichung der Ausgleichsgeraden T² = 1,007 s²+668,417 s²/m²*s²

Korrelationskoeffizient $r = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left[x^2 - (\bar{x})^2\right]\left[y^2 - (\bar{y})^2\right]}}$ =0,99971

Vertrauensfaktor $t_{v,n-1}$ bei n=7 Meßwerten und Vertrauensniveau 99,73% = 5,507

Unsicherheit des Anstiegs $\Delta B = t_{v,n-1} \cdot \sqrt{\dfrac{B^2 \cdot (1 - r^2)}{(n-2) \cdot r^2}}$ = 39,66 s²/m²

-> Anstieg B = **(668,42 $\pm$39,65) s²/m²**

D errechnet sich nach (11) zu 0,012369 Nm

lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz:

allgemein: $$\Delta e = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z$$

Funktion: $$D = \frac{4\pi^2 m}{B}$$

angewandt: $$\Delta D = \left|\frac{\partial D}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial D}{\partial B}\right| \cdot \Delta B = \frac{4\pi^2}{B} \cdot \Delta m + \left|-\frac{4\pi^2 m}{B^2}\right| \cdot \Delta B$$ = 0,0016Nm

-> D = (0,0124 $\pm$ 0,0016)Nm

J_D errechnet sich nach (12) zu 0,000293 kgm²

lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz:

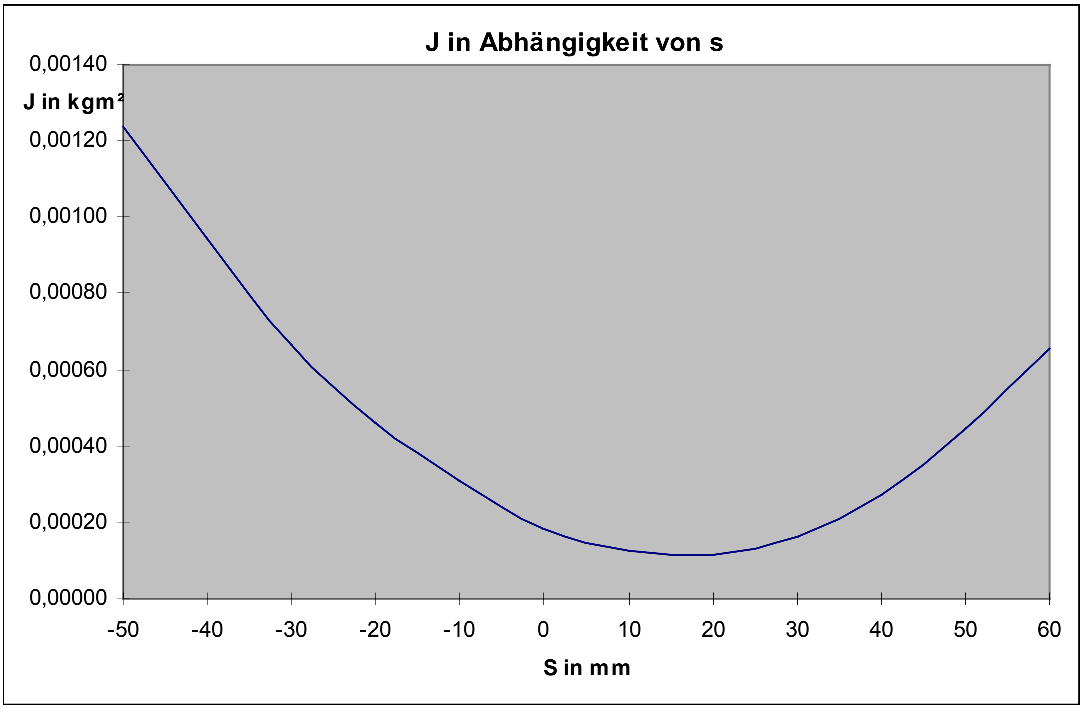
Funktion: $$J_D = \frac{AD}{4\pi^2} - \frac{mR^2}{2}$$

angewandt: $$\Delta J_D = \frac{A}{4\pi^2} \cdot \Delta D + \left|-\frac{R^2}{2}\right| \cdot \Delta m + mR\Delta R$$ = 0,000041 kgm²

-> J_D **= (0,000293 $\pm$ 0,000041) kgm²**

zu 3) Bestimmung des Massenmittelpunktes und eines der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers

Mittelwerte T in s	J in kg*m²
2,21167	0,001240
1,98667	0,000944
1,74722	0,000664
1,55190	0,000462
1,38750	0,000310
1,23542	0,000185
1,15583	0,000126
1,14111	0,000115
1,20259	0,000160
1,34167	0,000271
1,53536	0,000446
1,73833	0,000654



Durch quadratische Regression der Form $J = a + b \cdot s + c \cdot s^2$ ergibt sich für die Regressionsfunktion

J(s)=0,000183-0,008182*s+0,264798*s²

Durch Differentation ergibt sich daraus J(s)'= - 0,008182+0,529595*s, was gleich Null gesetzt wird und damit für das Extremum s=15,45 mm und eingesetzt in J(s) $J_{\min}$=0,00012 kgm².

Der Körper wird durch die x-z-Ebene in 2 Teile symmetrisch geteilt. Die zweite Symmetrieebene ist eine zur x-y-Ebene durch z=Höhe/2 gehende Fläche. Somit liegt der Massenmittelpunkt auf der Schnittgeraden beider Ebenen. Es ergeben sich dann folgende Werte für den Punkt (siehe Skizze) :

x-Koordinate = (Abstand Einsteckpunkt zum Rand)+s = **19,05 mm**
y-Koordinate = **0 mm**
z-Koordinate = Höhe/2 = **7,45mm**

6 Zusammenfassung

Bei den Versuchen wurden folgende Meßergebnisse ermittelt:

1) **D = (0,00967$\pm$0,00058) Nm**

2) **D = (0,0124$\pm$0,0016) Nm**
J_D = (0,000293 $\pm$0,000041) kgm²

3) **s=15,45 mm**
$J_{\min}$=0,00012 kgm².

zu 1) Im Diagramm ergibt sich eine lineare Verteilung der Meßwerte ohne allzugroße Abweichungen. Dies bestätigt auch ein Blick auf den Korrelationskoeffizienten, der ziemlich nah an 1 liegt. Daraus läßt sich schließen, daß der gemessene Wert dem wahre Wert von D nahe kommt. Die Ungenauigkeit der Gewichte ist vernachlässigbar klein (1%), ein größeres Problem wahr die Skaleneinteilung der Meßscheibe, sie war nur auf 2° genau eingeteilt, so daß alle Werte auf 1° genau durch Interpolation abgeschätzt werden mußten. Da statisch gemessen wurde, spielt die Reibung des Fades an der

Umlenkrolle keine Rolle. Ein weiterer systematischen Fehler ist, daß der Mittelpunkt der Scheibe nicht genau mit der Drehachse übereinstimmt.

zu 2) Aus dem Diagramm ist sehr gut eine lineare Beziehung zwischen T^2 und s^2 zu sehen und auch der Korrelationskoeffizient deutet auf eine stark lineare Beziehung hin, so daß der Satz von Steiner bewiesen ist. Auch hier wird die Reibung des Lagers und mögliche dezentrale Anordnung der Scheibe und der Meßlöcher sowie eine nicht optimal zylindrischen Form des Gewichts vernachlässigt. Viel größeren Einfluß auf das Meßergebnis hat die Zeitmessung. Optimal wäre eine Messung mittels Lichtschranke gewesen, es wurden aber die Schwingungsdauer gemessen, indem die Zeit zwischen den 2 Wendepunkten (da dadurch die Amplitude keinen Einfluß hat) gestoppt wurde. Dies geschah allerdings „von Hand“ und bei einer durchschnittlichen menschlichen Reaktionszeit von 0,8 s ergibt sich schon eine größere Unsicherheit. Um diesen Einfluß zu vermindern, wurden für jeden Meßpunkt die Zeit drei mal gemessen. Dabei wurde die Anordnung so oft wie möglich geschwungen gelassen und durch Division durch die Anzahl der Schwingungen ein Wert für die Schwingungsdauer ermittelt. Da T^2 in Abhängigkeit von s^2 gesucht war, wurden die Meßergebnisse für die Abstände in beiden Richtungen (negativ und positiv definert) zusammengefaßt, so daß für s = 0 drei T-Werte und für s <> 0 sechs T-Werte in den Mittelwert eingingen und somit gröbere Fehler von T vermindert wurden.

zu 3) Da im Teilversuch 3 dieselbe Meßmethode angewendet wurde, traten auch hier dieselben Fehler wie im Teilversuch 2 auf.