

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM
Physik für Ingenieursstudiengänge
II

12. Juni 2014

Autoren

Marek MERTEN
Pascal BOCK

Dozent

Dr. rer. nat. habil. Peter
STREITENBERGER

Bemerkungen

Dies Protokoll wurde erstellt mit \LaTeX ! Trotz der positiven Bewertung ist das Protokoll nicht fehlerfrei! Es fehlen unter anderem an einigen Stellen Quellenangaben zu benutzten Abbildungen.

Alle Grafiken wurden mit Gnuplot 4.6 erstellt. Bei Fragen zum Protokoll, \LaTeX oder Gnuplot bitte eine E-Mail an:
pascal.bock@st.ovgu.de

Versuchsverzeichnis ¹

Nr.	Bezeichnung des Versuches	Seite	Datum	Note/Signum
M1	Messfehler	8	6. April 2013	1,0
M11	Trägheitsmomente aus Drehschwingungen	21	30. April 2013	1,0
E5	Gleichstromquellen	35	14. Mai 2013	1,0
W8	Adiabatenexponent	54	28. Mai 2013	1,0
O10	Newtonsche Ringe	72	11. Juni 2013	1,0
M7	Stoßpendel	88	25. Juni 2013	

¹Durch das Hochwasser 2013 in Magdeburg konnte der Versuch 'M7 Stoßpendel' nicht durchgeführt werden!

Inhaltsverzeichnis

1	M1 Messabweichungen	8
1.1	Aufgabenstellung	8
1.2	Grundlagen zum Versuch	8
1.2.1	Dichtebestimmung	8
1.2.2	Unterscheidung von Messabweichungen	9
1.2.3	zufällige Messwertstreuung	10
1.2.4	Fehlerfortpflanzung	11
1.2.5	lineare Regression	11
1.3	Versuchsaufbau	12
1.4	Messergebnisse	13
1.4.1	Bestimmung von Messwerten	13
1.4.2	Ermittlung von Messunsicherheiten	15
1.5	Diskussion der Ergebnisse	19
1.5.1	Vergleich von Vertrauensbereich und Fehlergrenzen des Messgeräts	19
1.5.2	Schnittmenge der Ergebnisintervalle (Gleichung 1.29)	19
1.5.3	Material des Probekörpers	19
2	M11 Messabweichungen	21
2.1	Aufgabenstellung	21
2.2	Grundlagen zum Versuch	21
2.2.1	Herleitung der Formeln	21
2.2.2	Statische Bestimmung des Direktionsmoments D	24
2.2.3	Dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D	24
2.2.4	Bestimmung des Massenmittelpunkts und eines Hauptträgheitsmoments eines unregelmäßig geformten Körpers	26
2.3	Versuchsaufbau	26
2.4	Messergebnisse	28
2.4.1	gemessene Größen	28
2.4.2	Statische Bestimmung des Direktionsmoments D	28
2.4.3	Dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D	29
2.4.4	Bestimmung des Massenmittelpunkts und eines Hauptträgheitsmoments eines unregelmäßig geformten Körpers	31
2.5	Messfehler	32
2.6	Diskussion der Ergebnisse	33
2.6.1	Zusammenfassung der Messungen	33
2.6.2	Statische und dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D	33
2.6.3	Bestimmung von Trägheitsmomenten	34
2.6.4	Bestimmung einer Schwerpunktkoordinate	34
3	E5 Gleichstromquellen	35
3.1	Aufgabenstellung	35
3.2	Grundlagen zum Versuch	35

3.2.1	Arten von Spannungsquellen	35
3.2.2	Das Ohmsche Gesetz	36
3.2.3	Leistung P im Gleichstromkreis	36
3.2.4	aktiver und passiver Zweipol	37
3.2.5	Bestimmung der Leerlaufspannung	37
3.2.6	Strom-Spannungs-Charakteristik einer Gleichstromquelle	39
3.2.7	Bestimmung des Arbeitspunkts bei linearem Innenwiderstand	41
3.2.8	Der Arbeitspunkts bei nicht linearem Innenwiderstand	42
3.3	Versuchsaufbau	43
3.3.1	Schaltpläne zur Aufnahme der Messwerte für die Strom-Spannungs- Charakteristik	43
3.3.2	Messfehler	44
3.4	Messergebnisse	44
3.4.1	Bestimmung der Leerlaufspannung nach <i>POGGENDORF</i>	44
3.4.2	Strom-Spannungs-Charakteristik	45
3.4.3	Differentielle Widerstände	47
3.4.4	elektrische Leistung	47
3.5	Messfehler	50
3.5.1	elektrochemische Spannungsquelle	50
3.5.2	Solarzelle	50
3.6	Diskussion der Ergebnisse	50
3.6.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	50
3.6.2	Vergleich von $R_{P_{max}}$ und R_i	51
3.6.3	Innenwiderstand einer Solarzelle	52
3.6.4	Kompensationsverfahren nach <i>POGGENDORF</i>	52
3.6.5	mögliche Gründe für Messfehler	53
4	W8 Adiabatenexponent	54
4.1	Aufgabenstellung	54
4.2	Grundlagen zum Versuch	54
4.2.1	1. Hauptsatz der Thermodynamik	54
4.2.2	ideales Gas	54
4.2.3	ideale Gasgleichung	55
4.2.4	Zustandsänderung von Gasen	55
4.2.5	Adiabatenexponent	55
4.2.6	spezifische Wärmekapazität	55
4.2.7	Herleitung der Gleichung nach <i>POISSON</i>	56
4.2.8	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach <i>CLEMENT und DESOR-</i> <i>MES</i>	58
4.2.9	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach <i>RÜCHARDT</i>	60
4.2.10	erwartete Messergebnisse	61
4.3	Versuchsaufbau	62
4.3.1	Messmethode nach <i>CLEMENT und DESORMES</i>	62
4.3.2	Messmethode nach <i>RÜCHARDT</i>	62

4.3.3	Messfehler	62
4.4	Messergebnisse	62
4.4.1	Bestimmung der Dauer des Druckausgleichs	62
4.4.2	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach <i>CLEMENT und DESORMES</i>	64
4.4.3	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach <i>RÜCHARDT</i>	65
4.4.4	Bestimmung der molaren und spezifischen Wärmekapazitäten	66
4.5	Messfehler	67
4.5.1	Methode von <i>CLEMENT und DESORMES</i>	67
4.5.2	Methode von <i>RÜCHARDT</i>	68
4.5.3	Bestimmung der Wärmekapazitäten	69
4.6	Diskussion der Ergebnisse	69
4.6.1	Zusammenfassung der Messergebnisse	69
4.6.2	Abweichungen von Literaturwerten	69
4.6.3	Vergleich der verwendeten Methoden	70
4.6.4	Gründe für Messfehler	70
5	O10 Newtonsche Ringe	72
5.1	Aufgabenstellung	72
5.2	Grundlagen zum Versuch	72
5.2.1	Licht als Welle	72
5.2.2	Linse	73
5.2.3	Newtonsche Ringe	74
5.2.4	Bestimmung des Krümmungsradius R einer Linse durch <i>NEWTONSCHE Ringe</i>	74
5.2.5	Bestimmung der Kohärenzlänge Λ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$	77
5.3	Versuchsaufbau	78
5.3.1	Messfehler	78
5.4	Messergebnisse	78
5.4.1	verwendete Verfahren zur Messung der Ringradien	78
5.4.2	aufgenommene Messwerte	79
5.4.3	Bestimmung des Krümmungsradius R der Linse	82
5.4.4	Bestimmung der Wellenlängen ($\lambda_{\text{grün}}, \lambda_{\text{rot}}$) des Filterlichtes	82
5.4.5	Bestimmung der Kohärenzlänge Λ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$ für Filterlicht	82
5.5	Messfehler	84
5.6	Diskussion der Ergebnisse	86
5.6.1	Zusammenfassung der Messergebnisse	86
5.6.2	Errechnete Wellenlängen für Filterlicht	87
5.6.3	Berechnete Werte für R und Δd	87
6	M7 Stoßpendel	88
6.1	Aufgabenstellung	88

6.2	Grundlagen zum Versuch	88
6.2.1	Impuls p	88
6.2.2	Erhaltungssatz	89
6.2.3	Stöße	89
6.2.4	Berechnung der Geschwindigkeit aus der vertikalen Auslenkung h	90
6.3	Versuchsaufbau	92

1 M1 Messabweichungen

1.1 Aufgabenstellung

Die Dichte eines kugelförmigen Probekörpers ist aus seiner geometrischen Abmessung und seiner Masse zu bestimmen. Die Verteilung der gemessenen Durchmesser ist zu analysieren und die Messabweichungen sind anzugeben.

1. Der Durchmesser d des Körpers ist unter Verwendung einer Bügelmessschraube 50-mal zu messen. Die Messwerte sind in sieben Klassen einzuteilen, die relativen Häufigkeiten sind als Histogramm grafisch darzustellen. Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich sind zu berechnen und mit den Fehlergrenzen des Messgerätes zu vergleichen.
2. Der Durchmesser d des Körpers ist mit Hilfe eines Messschiebers einmalig zu ermitteln.
3. Die Masse m des Körpers ist durch einmalige Wägung auf einer mechanischen Feinwaage zu bestimmen.
4. Die Dichte des Probekörpers ist einerseits in aus 1. und 3. und andererseits aus 2. und 3. zu berechnen. Außerdem sind die Meridianabweichung der Dichte zu bestimmen, die sich in beiden Fällen durch lineare Fehlerfortpflanzung aus den Größtabweichungen der gemessenen Größen ergeben. Anhand beider Messergebnisse ist zu überprüfen, ob sich die Ergebnisintervalle überlappen.
5. Die Dichte des Probekörpermaterials ist durch Kombination der Messergebnisse aus 1. und 3. aller Versuchsgruppen an Kugeln gleicher Dichte (gleicher Farbe), aber mit unterschiedlicher Masse durch lineare Regression zu berechnen. Dazu ist die funktionale Abhängigkeit des Kugelvolumens V von der Masse m , $V = V(m)$, sowie die Regressionsgerade grafisch darzustellen, die mittlere Abweichung der Regressionsparameter sind anzugeben.

1.2 Grundlagen zum Versuch

1.2.1 Dichtebestimmung

Durch die Messung der Masse m ($[m] = kg$) und des Volumen V ($[V] = m^3$) eines Körpers kann die Dichte ρ über

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ mit } [\rho] = \frac{kg}{m^3} \quad (1.1)$$

bestimmt werden. Das Volumen der in Unterabschnitt 1.1 beschriebenen Kugel berechnet sich nach

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3. \quad (1.2)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 1.2 in Gleichung 1.1 erhält man

$$\rho = \frac{m}{\frac{1}{6}\pi d^3} = 6m^1\pi^{-1}d^{-3}. \quad (1.3)$$

Jedoch unterliegen die gemessenen Größen gewissen Messfehlern. Es ist also nötig das Ergebnis mit einer *Fehlertoleranz* anzugeben.

1.2.2 Unterscheidung von Messabweichungen

Man unterscheidet grundsätzlich zwei Arten von Messfehlern nach ihrem Entstehen und ihren Eigenschaften.

systematische Messabweichung ² Die Ursache dieser Art von Messabweichungen liegt im Messverfahren selbst. Die Abweichung ist vom Betrag und Richtung gleich. Sie tritt daher auch bei Wiederholungsmessungen unter konstanten Versuchsbedingungen auf und kann durch Wiederholung nicht erkannt werden. Ein Bildung des arithmetischen Mittels (siehe dazu Gleichung 1.5) schafft keine Verbesserung. [9, S. 518]

zufällige Messabweichung Diese Art der Messabweichung ist von Betrag und Richtung nicht konstant und schwankt. Die Ursache liegt oft im fehlerhaften Ablesen von Anzeigen oder anderen zufällig auftretenden Störgrößen. Durch die Wiederholung des Versuches unter konstanten Bedingungen können die Auswirkungen der zufälligen Messabweichung durch Bildung des arithmetischen Mittels der gemessenen Größen abgeschwächt werden. [9, S. 518]

Größtabweichung

Die eigentliche Messabweichung setzt sich somit aus zwei Größen zusammen der systematischen und der zufälligen Messabweichung. Die beiden Größen werden summiert und man erhält die Größtabweichung (Δx).

Das Messergebnis wird mit einem Sicherheitsintervall angegeben um den *wahren* Wert X .

$$X = \bar{x} \pm \Delta x \text{ oder } X = \bar{x}(1 \pm \frac{\Delta x}{\bar{x}}) \quad (1.4)$$

Für Berechnung von \bar{x} siehe Gleichung 1.5.

²Werte werden im Versuch nicht ermittelt, sondern vom Hersteller der Messgeräte übernommen

1.2.3 zufällige Messwertstreuung

Trägt man n gemessene Werte x_1, x_2, \dots, x_n in Gruppen unterteilt in ein Histogramm der Häufigkeitsverteilung ein, so erkennt man, dass diese um einen Erwartungswert μ herum liegen. Die Form des Histogramms nähert sich für $n \rightarrow \infty$ der Gaußschen Normalverteilung an. Ab circa 200 Messwerten kann ohne große Fehler von der Normalverteilung ausgegangen werden.

Bei weniger Messwerten können über die zufällige Abweichung eines Messwertes (Varianz σ^2) und den Erwartungswert nur *Schätzwerte* abgegeben werden.

Erwartungswert

Die beste Abschätzung nach Gauß ist das *arithmetische Mittel* (oder: Mittelwert) für n Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.5)$$

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.6)$$

Streubreite des Mittelwertes

Der Mittelwert \bar{x} ist bei einer geringen Anzahl von Messungen ein sehr ungenauer Schätzwert für den Erwartungswert μ . Für die Abweichung gilt:

$$\Delta\bar{x} = \frac{ts}{\sqrt{n}} \quad (1.7)$$

Dabei ist t der Student-Faktor ³ (aus Tabellen zu entnehmen) und hängt von n und dem Vertrauensniveau ab.

Vertrauensniveau

Das Vertrauensniveau bezeichnet das Intervall links und rechts vom Erwartungswert und ist ein Vielfaches von σ ($\sigma \hat{=} 68,3\%$). Je größer das Vertrauensniveau, desto mehr (auch weniger häufige) Messwerte werden mit einbezogen ($3\sigma \hat{=} 99,73\%$).

³im Versuch $t = 3,157$ [9, S. 522] bei $n = 50$ und $\mu \pm 3\sigma$

Vertrauensbereich

Das folgende Intervall wird als Vertrauensbereich bezeichnet:

$$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = \bar{x} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}} \quad (1.8)$$

Die beiden Enden des Intervalls werden als *obere* und *untere* Vertrauensgrenze bezeichnet.

1.2.4 Fehlerfortpflanzung

Oftmals kann eine Größe nicht direkt bestimmt werden und sie muss aus anderen Größen ermittelt werden (Bestimmung von ρ aus m und V über $\rho = \frac{m}{V}$). Dabei ist zu beachten, dass alle Messgrößen einem Fehler unterliegen. Es ist zu klären, wie sich dieser einzelne Fehler jeweils auf die zu bestimmende Größe auswirkt.

lineare Fehlerfortpflanzung

Sollten die gemessenen Größen (*Eingangsgrößen*) x, y, z mit ihrem Fehler $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ nur einmal gemessen worden sein und ein Zusammenhang folgender Form liegt vor (*linear*)

$$F(x, y, z, \dots) = ax + by + cz + \dots \quad (1.9)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, so ist die absolute Abweichung von F:

$$\Delta F = |a|\Delta x + |b|\Delta y + |c|\Delta z + \dots \quad (1.10)$$

Liegt ein Zusammenhang der Form (*Potenzprodukt*)

$$F(x, y, z, \dots) = ax^\alpha y^\beta z^\gamma \dots \quad (1.11)$$

vor. Mit $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (in Gleichung 1.3: $a = 6, \alpha = 1, \beta = -3$), so ist die relative Abweichung von F:

$$\frac{\Delta F}{F} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} + |\beta| \frac{\Delta y}{y} + |\gamma| \frac{\Delta z}{z} + \dots \quad (1.12)$$

Allgemein gilt:

$$\Delta F = \left| \frac{\delta F}{\delta x} \right| \Delta x + \left| \frac{\delta F}{\delta y} \right| \Delta y + \left| \frac{\delta F}{\delta z} \right| \Delta z + \dots \quad (1.13)$$

1.2.5 lineare Regression

Die lineare Regression ist eine Möglichkeit einen mathematischen Zusammenhang zwischen Messgrößen herzustellen. Dabei werden die Messpunkte in ein entsprechendes Koordinatensystem eingetragen und es wird versucht eine Gerade der Gleichung $y = a + bx$ hindurchzulegen. Dabei soll die Abweichung

$$\Delta y_i = a + bx_i - y_i \quad (1.14)$$

zu allen Messpunkten am geringsten sein. Es gilt dabei für die einzelnen Parameter a und b :

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \text{ und } b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \quad (1.15)$$

Die Fehler der Messwerte wirken sich auf die Parameter a und b aus. Es gilt für die mittlere Abweichung:

$$\bar{s}_a = \bar{s}_b \sqrt{\overline{x^2}}, \text{ und } \bar{s}_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{\overline{(\Delta y)^2}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}} \quad (1.16)$$

Für $\overline{(\Delta y)^2}$ siehe Gleichung 1.14 in Gleichung 1.5.

1.3 Versuchsaufbau

Neben dem Probekörper werden zur Durchführung des Versuches eine Bügelmessschraube und ein Messschieber zur Bestimmung des Durchmessers, sowie eine mechanische Feinwaage zur Wägung des Probekörpers benötigt.

1.4 Messergebnisse

1.4.1 Bestimmung von Messwerten

Bestimmung des Durchmessers mit Bügelmessschraube

Mit der Bügelmessschraube wurde der Durchmesser d der Kugel 50-mal bestimmt ($n = 50$). Die Messergebnisse sind in Tabelle M1.1 zu finden.

Tabelle M1.1: Durchmesser der Kugel mit einer Bügelmessschraube 50-mal gemessen

Nummer	Durchmesser d_B in mm	Nummer	Durchmesser d_B in mm
1	20,074	26	20,304
2	20,349	27	20,230
3	20,220	28	20,319
4	19,781	29	20,359
5	19,669	30	19,958
6	19,673	31	20,076
7	20,131	32	20,191
8	20,200	33	20,092
9	20,325	34	20,063
10	20,240	35	19,830
11	19,672	36	19,869
12	20,087	37	19,979
13	20,062	38	19,760
14	20,324	39	19,993
15	19,738	40	20,029
16	20,370	41	20,121
17	19,883	42	20,060
18	20,198	43	20,031
19	20,350	44	20,309
20	20,306	45	20,338
21	20,227	46	20,248
22	20,071	47	19,961
23	19,849	48	20,106
24	20,000	49	19,909
25	20,052	50	20,186

Bestimmung des Durchmessers mit einem Messschieber

Mit dem Messschieber wurde der Durchmesser

$$d_M = 20,03mm$$

einmalig bestimmt.

Bestimmung der Masse mittels einer Feinwaage

Mit einer Feinwaage wurde die Masse der Kugel

$$m = 10,389g$$

einmal ermittelt.

Bestimmung des arithmetischen Mittels

Der Mittelwert der Messwerte aus Tabelle M1.1 ergibt nach Gleichung 1.5:

$$\bar{d}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} d_i = 20,083mm \quad (1.17)$$

Bestimmung der Dichte

Nach Gleichung 1.3 gilt für die Dichte der Kugel

$$\rho = \frac{m}{\frac{1}{6}\pi d^3} = 6m\pi^{-1}d^{-3}, \quad (1.18)$$

dabei ist zu beachten, dass zwei Werte für den Durchmesser der Kugel zur Verfügung stehen. Einmal der mit der Bügelmessschraube gemessenen Durchmesser d_B und der mit dem Messschieber gemessenen Durchmesser d_M . So können auch zwei Werte für die Dichte ermittelt werden.

$$\rho_B = 6 * 10,389g * \pi^{-1} * (20,083mm)^{-3} \approx 2,450 * 10^{-3} \frac{g}{mm^3} = 2,450 \frac{g}{cm^3} \quad (1.19)$$

$$\rho_M = 6 * 10,389g * \pi^{-1} * (20,3mm)^{-3} \approx 2,37 * 10^{-3} \frac{g}{mm^3} = 2,37 \frac{g}{cm^3} \quad (1.20)$$

1.4.2 Ermittlung von Messunsicherheiten

Darstellung der Messdaten als Histogramm

Durch Unterteilung der Messwerte in sieben äquidistante Klassen ergibt sich folgendes Histogramm der relativen Häufigkeiten (erstellt mit [5]):

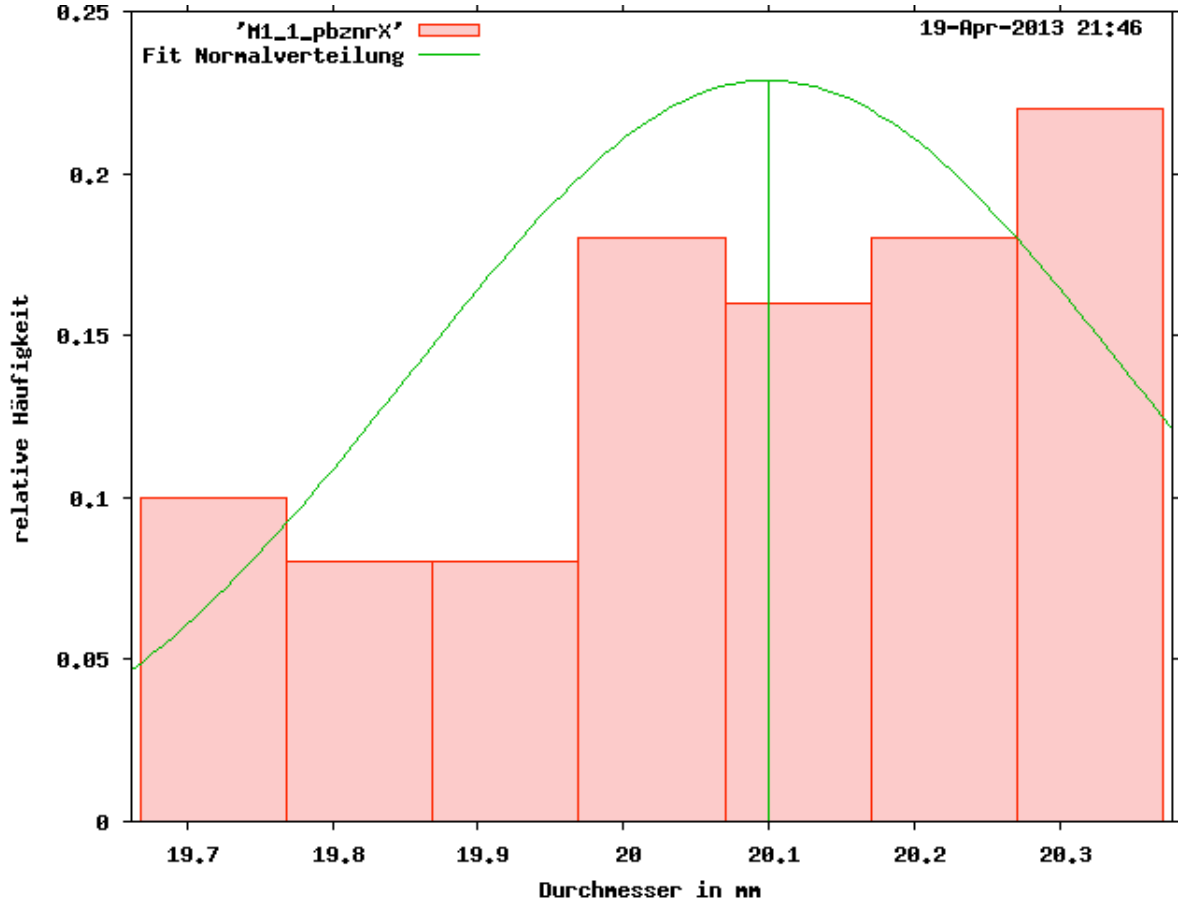


Abbildung M1.1: Histogramm der relativen Häufigkeiten der Messwerte aus Tabelle M1.1 bei einem Vertrauensniveau von $p = 0,9973$

Die Standardabweichung ergibt sich nach Gleichung 1.6

$$s_B = \sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_{Bi} - \bar{d})^2} \approx 0,201mm. \quad (1.21)$$

(Wert übernommen von [5])

Zur Berechnung des Vertrauensbereich ist es nötig die Streubreite des Mittelwertes nach Gleichung 1.7 zu bestimmen. Es gilt:

$$\Delta \bar{d} = \frac{ts}{\sqrt{n}} = \frac{3,157 * 0,201mm}{\sqrt{50}} \approx 0,09mm \quad (1.22)$$

Daraus folgt:

$$d_B = \bar{d}_B \pm \Delta\bar{d} = 20,038mm \pm 0,09mm = 20,038(1 \pm 0,449)mm \quad (1.23)$$

lineare Fehlerfortpflanzung aus den Größtabweichungen

Die Größtabweichung⁴ Δd ist die Summe der systematischen Abweichung G_d und der Streubreite des Mittelwertes $\Delta\bar{d}$. Es wurden

$$\Delta d_B = G_B + \Delta\bar{d} = 0,1mm \quad (1.24)$$

$$\Delta d_M = G_M = 0,1mm \quad (1.25)$$

als jeweilige Größtabweichungen ermittelt. Mit $G_B = 0,01mm$ für die Bügelmessschraube und $G_M = 0,1mm$ für den Messschieber. Für die Präzisionswaage ist folgende Fehlergrenze angegeben:

$$\Delta m = 1mg \quad (1.26)$$

Nach Gleichung 1.12 sind die Größtabweichungen der zwei Messreihen:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_B &= (|\alpha|\frac{\Delta m}{m} + |\beta|\frac{\Delta d_B}{\bar{d}_B})\rho_B \\ &= (|1|\frac{1 * 10^{-3}g}{10,389g} + |-3|\frac{0,1mm}{20,083mm}) * 2,450 * 10^{-3} \frac{g}{mm^3} \\ &= 3,683 * 10^{-5} \frac{g}{mm^3} = 0,036 \frac{g}{cm^3} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta\rho_M &= (|\alpha|\frac{\Delta m}{m} + |\beta|\frac{\Delta d_M}{\bar{d}_M})\rho_M \\ &= (|1|\frac{1 * 10^{-3}g}{10,389g} + |-3|\frac{0,1mm}{20,3mm}) * 2,37 * 10^{-3} \frac{g}{mm^3} \\ &= 3,52 * 10^{-5} \frac{g}{mm^3} = 0,035 \frac{g}{cm^3} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Daraus ergeben sich folgende Ergebnisintervalle:

$$\begin{aligned} 2,414 \frac{g}{cm^3} \leq \rho_B \leq 2,486 \frac{g}{cm^3} &\implies 2,450(1 \pm 0,015) \frac{g}{cm^3} \\ 2,34 \frac{g}{cm^3} \leq \rho_M \leq 2,41 \frac{g}{cm^3} &\implies 2,37(1 \pm 0,014) \frac{g}{cm^3} \end{aligned} \quad (1.29)$$

⁴eine Streubreite für Δd_M entfällt, da der Wert nur einmal bestimmt wurde

lineare Regression von Messwerten

Tabelle M1.2: Messwerte für Durchmesser und Masse aller Versuchsgruppen

Gruppe	Masse m in g	Durchmesser d_M in mm
1	5,8210	16,6
2	4,4810	15,1
3	10,3890	20,3
4	12,2820	21,2
5	10,8643	20,9
6	6,2583	16,9
7	6,3236	16,9
8	4,9670	15,8
9	12,1662	21,0
10	0,1470	5,0

Wie in Unterunterabschnitt 1.2.5 beschrieben sind die Messdaten in ein Koordinatensystem eingetragen worden. Dabei wird die Masse auf der x-Achse abgetragen, da die Masse als Messgröße ohne Fehler angesehen wird.

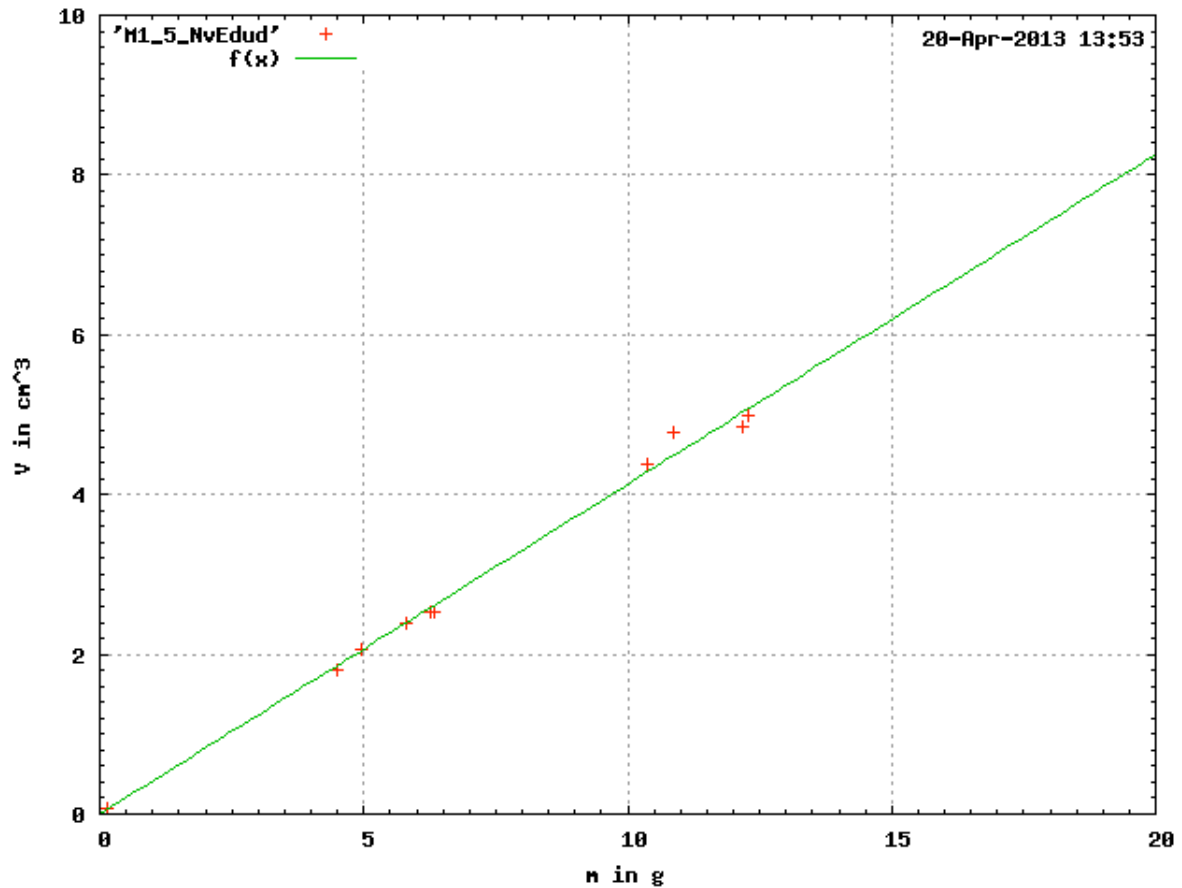


Abbildung M1.2: Lineare Regression der Messwerte aus Tabelle M1.2

(Abbildung M1.2 erstellt mit [3])

Die Gleichung der Ausgleichsgeraden lautet nach Unterunterabschnitt 1.2.5

$$V(m) = 0,41 \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} * m. \quad (1.30)$$

Der Parameter a wird gleich Null gesetzt, da das Volumen eines Probekörper der Masse Null auch Null ist ($V(0) = 0$). Die so ermittelte Dichte beträgt

$$\rho_{lin} = \frac{1}{b} = \frac{1}{0,41} = 2,44 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (1.31)$$

In diesem Fall muss der Kehrwert von b genommen werden, da die Masse auf der Abszisse aufgetragen wurde und die Steigung (b) sich über $\frac{\Delta y}{\Delta x} (= \frac{V}{m})$ berechnet. [7]

Durch den Wegfall eines Regressionsparameters ist die mittlere Abweichung der Dichte auch die mittlere Abweichung des Regressionsparameters und beträgt nach Gleichung 1.16:

$$\overline{s}_\rho = 0,003 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \overline{s}_b \quad (1.32)$$

1.5 Diskussion der Ergebnisse

Es wurden aufgrund der Messdaten folgende Werte für die Dichte ρ des Probekörpers bestimmt:

1. $\rho_B = 2,450(1 \pm 0,015) \frac{g}{cm^3}$
2. $\rho_M = 2,37(1 \pm 0,014) \frac{g}{cm^3}$
3. $\rho_{lin} = 2,44(1 \pm 0,1) \frac{g}{cm^3}$

1.5.1 Vergleich von Vertrauensbereich und Fehlergrenzen des Messgeräts

Für eine möglichst genaue Messung sollten die Fehlergrenzen der Messgeräte kleiner als die ermittelte zufällige Messabweichung sein. Für diesen Fall kann der Probekörper als *perfekte Kugel* betrachtet werden.

Für die Bügelmessschraube gilt dieses mit $\Delta \bar{d} = 0,09mm > 0,01mm = G_M$ nicht. Die Annahme einer perfekten Kugel zur Berechnung des Volumens ist damit nur sehr grob.

1.5.2 Schnittmenge der Ergebnisintervalle (Gleichung 1.29)

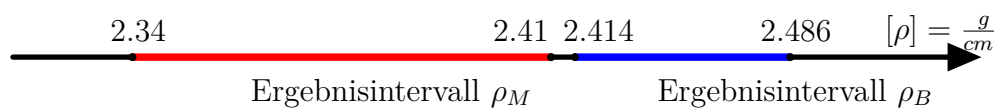


Abbildung M1.3: Darstellung der Ergebnisintervalle aus Aufgabenteil 4 auf einem Zahlenstrahl

Wie in Abbildung M1.3 zu sehen kommt es zu keiner Überschneidung der Ergebnisintervalle ($\forall \rho_i \in \rho_M : \rho_i \notin \rho_B$). Durch eine Überschneidung der zwei Ergebnisintervalle hätte man ein Intervall erhalten, in welchem der eigentliche Wert der Dichte mit großer Wahrscheinlichkeit liegt.

1.5.3 Material des Probekörpers

Alle gemessenen Werte für die Dichte schwanken zwischen circa $2,3 \frac{g}{cm^3}$ und $2,5 \frac{g}{cm^3}$. Während des Versuches lag die Vermutung nahe, dass es sich um einen Probekörper aus

Glas mit weißen Einschlüssen handelt. In Tabellenwerken finden sich für Glas verschiedene Dichtewerte, da diese je nach Herstellung des Glases variiert. Für reines Quarzglas wird eine Dichte von $2,2\frac{g}{cm^3}$ [12] und für Fensterglas eine Dichte von $2,5\frac{g}{cm^3}$ bis $2,6\frac{g}{cm^3}$ [12] [1, S. 99] angegeben. Zwar stimmt keiner der gemessenen Werte mit den angehenden Werten überein, doch handelte es sich beim Probekörper offensichtlich nicht um reines Quarzglas, da weiße Einschlüsse im Material zu sehen waren. Zudem befanden sich erkennbare Einkerbungen auf der Kugeloberfläche. Die Abweichungen können somit durch Messfehler, die Einschlüsse im Glas und die Einkerbungen erklärt werden. Es handelt sich somit beim Material des Probekörpers um Glas.

2 M11 Messabweichungen

2.1 Aufgabenstellung

1. a) Die Winkelauslenkung des Zeigers der Schwingplatte ist in Abhängigkeit vom angreifenden Drehmoment zu messen und graphisch darzustellen. Das Direktionsmoment D der Spiralfeder ist daraus durch lineare Regression zu bestimmen (statische Methode).
- b) Die Schwingungsdauer T der Schwingplatte mit aufgesetztem Vollzylinder ist in Abhängigkeit von dessen Abstand s von der Drehachse zu messen, die funktionale Abhängigkeit $T^2 = f(s^2)$ ist graphisch darzustellen, der Satz von Steiner ist zu bestätigen. Direktionsmoment D der Feder und Trägheitsmoment J der Schwingplatte sind durch lineare Regression zu ermitteln (dynamische Methode der D -Bestimmung).
- c) Eine Koordinate des Massenmittelpunkts und eins der Hauptträgheitsmomente eines unregelmäßig geformten Körpers sind experimentell zu bestimmen.

2.2 Grundlagen zum Versuch

2.2.1 Herleitung der Formeln

Hooksches Gesetz

Jede Feder unterliegt dem Gesetz von *Hook*. Danach gilt:

$$F = -ks \quad (\text{M11.1})$$

Für die in Unterabschnitt 2.1 beschriebene Schwingplatte werden Spiralfedern verwendet. Daher rührt die wirkende Kraft F von einem Moment M her und die Auslenkung wird nicht als Strecke s , sondern als Winkel φ angegeben. Es ergibt sich damit folgender Zusammenhang:

$$M = -D\varphi \quad (\text{M11.2})$$

Dabei ist D das *Direktionsmoment* und entspricht der Federkonstante k .

Berechnung eines Moments

Für ein Moment gilt im Allgemeinen

$$M = Fl, \quad (\text{M11.3})$$

wobei F die wirkende Kraft und l der Abstand vom Angriffspunkt der Kraft zur Drehachse ist.

Das Trägheitsmoment J

Unter dem Trägheitsmoment J versteht man den Widerstand eines sich um eine Drehachse mit dem Radius r bewegten Körper gegenüber einer Veränderung seiner momentanen Winkelgeschwindigkeit ($v = \omega \cdot r$).

Aus der Betrachtung der Energien folgt:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\omega \cdot r)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (mr^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (\text{M11.4})$$

Damit ist

$$J = \int r^2 dm \quad (\text{M11.5})$$

das Massenträgheitsmoment. Für einen Zylinder der Masse m_Z und mit dem Radius r_Z gilt:

$$J_Z = \frac{1}{2} m_Z \cdot r_Z^2 \quad (\text{M11.6})$$

Die Kreisfrequenz einer harmonischen ungedämpften Schwingung

Bei einer harmonischen ungedämpften Schwingung folgt die Auslenkung der *allgemeinen Bewegungsgleichung*:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0 \quad (\text{M11.7})$$

Für eine Spiralfeder mit der Auslenkung φ , dem Direktionsmoment D und dem Massenträgheitsmoment J gilt:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \varphi = 0 \quad (\text{M11.8})$$

$$J \ddot{\varphi} = -D \varphi \quad (\text{M11.9})$$

Eine Lösung der Differentialgleichung (Gleichung M11.9) ist:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{M11.10})$$

Durch Einsetzen von Gleichung M11.10 in Gleichung M11.9 erhält man die Kreisfrequenz der Schwingung ω_0 :

$$\begin{aligned} J(\varphi_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0))'' &= -D \cdot \varphi_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \\ J \cos(\omega_0 t - \varphi_0)'' &= -D \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \\ J(-\omega_0)^2 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) &= -D \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \\ J(-\omega_0)^2 &= -D \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{J}} \end{aligned} \quad (\text{M11.11})$$

Die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{M11.12})$$

in Gleichung M11.11 eingesetzt ergibt:

$$\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{M11.13})$$

Satz von STEINER

Der Satz von STEINER findet bei nicht um ihren Schwerpunkt rotierenden Körpern Anwendung. Ein Körper K rotiert um eine zur Schwerpunktachse (S) parallelen Drehachse (A) mit dem Abstand s . Der Schwerpunkt des Körpers führt damit eine gleichförmige Bewegung ($a = 0$, $v(t) = \text{const.}$) auf einer Kreisbahn ⁵ um die Rotationsachse A aus, dabei soll die Masse m des Körpers als Punktmasse am Schwerpunkt vereinigt sein. Die gleiche Bewegung führt der Körper um die Achse S aus. Daher ergibt sich die Gesamtenergie aus der Summe der beiden Energien.

$$E_{\text{trans}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mw^2s^2}{2} \quad (\text{M11.14})$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{J_S w^2}{2} \quad (\text{M11.15})$$

Mit $v = ws$ und $J = ms^2$ für Gleichung M11.15 folgt daraus, dass:

$$\begin{aligned} E &= \frac{mw^2s^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(m\omega^2s^2 + J_S\omega^2) \\ &= \frac{1}{2}\omega^2(ms^2 + J_S) \\ &= \frac{1}{2}\omega^2 J_A \end{aligned} \quad (\text{M11.16})$$

Das Trägheitsmoment des Körpers K

$$J_A(s) = J_S + ms^2 \quad (\text{M11.17})$$

setzt sich damit aus der Summe der Trägheitsmomente J_S bezüglich der Schwerpunktachse S und ms^2 dem Trägheitsmoment der gedachten Punktmasse im Schwerpunkt zusammen.

⁵gleichförmige Translation

Bestimmung einer Schwerpunktkoordinate eines unregelmäßig geformten Körpers

Nach dem Satz von STEINER gilt für einen Körper, der nicht um seine Schwerpunktachse rotiert Gleichung M11.17.

Im Falle eines unregelmäßig geformten Körpers ist der Abstand zur Schwerpunktachse s nicht bekannt. Jedoch kann der Abstand zu einem beliebigen Punkt des Körpers durchaus als bekannt vorausgesetzt werden. Der Abstand x_0 von diesem Punkt zum Schwerpunkt kann über den Satz von STEINER ermittelt werden:

$$J_A(x_0) = J_S + m(s \pm x_0)^2 \quad (\text{M11.18})$$

Dabei muss jedoch der Abstand x_0 auf einer der Symmetrieachsen des Körpers und auf einer Schnittgeraden mit dem Drehpunkt liegen.

2.2.2 Statische Bestimmung des Direktionsmoments D

Das auf die Spiralfeder wirkende Moment M greift an der Welle des Drehtisches an. Die Summe der Radien r_W der Welle und r_S des verwendeten Seils ergeben damit den Abstand des Angriffspunktes zur Drehachse. [6] Damit gilt für das Moment:

$$M = F(r_W + r_S) = Fr_G \quad (\text{M11.19})$$

Das Drehmoment ist im Versuch gleich der Gewichtskraft F_G der am Faden hängenden Massenstücke. Daher gilt für Gleichung M11.19 auch

$$M = Fr_G = F_G r_G = mgr_G \quad (\text{M11.20})$$

mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Durch Einsetzen in Gleichung M11.2 erhält man

$$\begin{aligned} M = -D\varphi &\implies D = -\frac{M}{\varphi} \\ D &= \frac{mgr_G}{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{M11.21})$$

zur Berechnung des Direktionsmoments. Die Funktion $M(\varphi)$ kann durch lineare Regression der Messwerte ermittelt werden. Die Steigung der Geraden entspricht dem Direktionsmoment.

2.2.3 Dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D

Auf die Schwingplatte wird ein Vollzylinder mit Abstand s aufgebracht. Die Periodendauer wird ermittelt.

Beweis des Satzes von **STEINER**

Durch auftragen von Messwerten in einem $T^2 - s^2$ -Diagramm ergibt sich eine Kennlinie. Sollt ein linearer Zusammenhang erkennbar sein (Kennlinie der Form $f(x) = ax + b$), so ist der Satz von STEINER bewiesen.

Für T^2 ergibt sich nach Gleichung M11.17 in Gleichung M11.13 folgendes:

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \frac{J}{D} \\ &= 4\pi^2 \frac{J_0 + J_A(s)}{D} \\ &= 4\pi^2 \frac{J_0 + J_S + ms^2}{D} \\ &= 4\pi^2 \frac{J_0 + J_S}{D} + \frac{4\pi^2 m}{D} s^2 \end{aligned} \tag{M11.22}$$

Nach Gleichung M11.22 ist s^2 :

$$\begin{aligned} T^2 - \frac{4\pi^2(J_0 + J_S)}{D} &= \frac{4\pi^2}{D} s^2 \\ T^2 D - 4\pi^2(J_0 + J_S) &= 4\pi^2 m s^2 \\ s^2 &= \frac{D}{4\pi^2 m} T^2 - \frac{J_0 + J_S}{m} \end{aligned} \tag{M11.23}$$

Für die Steigung a gilt somit nach $f(x) = ax + b$:

$$a = \frac{D}{4\pi^2 m} \tag{M11.24}$$

Sollte der Graph der Messwerte im $T^2 - s^2$ -Diagramm einen linearen Zusammenhang zeigen und die Steigung $a = \frac{D}{4\pi^2 m}$ besitzen, so ist der Beweis erbracht.

Bestimmung von D und J

Aus dem Anstieg a aus Gleichung M11.24 lässt sich bei bekannter Masse m das Direktionsmoment der Feder berechnen:

$$D = 4\pi^2 m \cdot a \tag{M11.25}$$

Es gilt die Trägheitsmomente des Tisches J_0 und des Zylinders J_Z zu bestimmen. Dazu muss eine Messung der Periodendauer ohne aufgesetzten Zylinder (T_{ohne}) und eine mit aufgesetzten Zylinder aber im Abstand Null zur Drehachse ($T_{s^2=0}$).

Für den Fall $s = 0$ gilt nach Gleichung M11.23:

$$s^2 = \frac{D}{4\pi^2 m} T^2 - \frac{J_0 + J_S}{m} = 0$$

Durch Umstellen erhält man:

$$0 = \frac{D}{4\pi^2 m} T^2 - \frac{J_0 + J_S}{m} \quad (\text{M11.26})$$

$$J_0 + J_S = \frac{D}{4\pi^2} T_{s^2=0} \quad (\text{M11.27})$$

Es kann so die Summe der beiden Trägheitsmomente ermittelt werden. Durch die Messung von T_{ohne} kann J_0 über

$$J_0 = \frac{DT^2}{4\pi^2} \quad (\text{M11.28})$$

aus Gleichung M11.13 berechnet werden.

J_Z kann nun über Subtraktion errechnet werden.

2.2.4 Bestimmung des Massenmittelpunkts und eines Hauptträgheitsmoments eines unregelmäßig geformten Körpers

Nach Gleichung M11.18 kann der Schwerpunkt eines unregelmäßigen Körpers experimentell bestimmt werden.

Der im Versuch gegebene Körper mit Masse m_k und Symmetrieachse S_k wird in immer gleicher Lage zum Mittelpunkt auf einer Geraden $x = S_k$ weiter nach außen verschoben. Dabei verändert sich s , jedoch nicht x_0 .

Das gesamte Trägheitsmoment setzt sich aus der Addition von J_0 dem Massenträgheitsmoment der Schwingplatte (bekannt aus Unterunterabschnitt 2.2.2 oder Unterunterabschnitt 2.2.3) und Gleichung M11.18 zusammen:

$$J_G(x_0) = J_0 + J_K + m(s - x_0)^2 \quad (\text{M11.29})$$

Mit $J_S = J_K$ und J_K als das Massenträgheitsmoment des Körpers.

Betrachtet man nun den aus quadratischer Regression der Messwerte J und s entstandenen Graphen $J = f(s)$ so erkennt man einen quadratischen Zusammenhang ($f(x) = ax^2 + bx + c$). Das Minimum des Graphen ($J'(s) = 0$, mit $a > 0$) kennzeichnet die Stelle an der $s = x_0$ gilt. Der Abstand vom Rand des Körpers parallel zur Geraden x ist damit $s_{min} = x_0$.

Zudem gilt am Minimum des Graphen $(s - x_0) = 0$ und damit ist:

$$\begin{aligned} J_G(s_{min}) &= J_0 + J_K \\ J_K &= J_G(s_{min}) - J_0 \end{aligned} \quad (\text{M11.30})$$

Bei bekannten J_0 und $J_G(s_{min})$ kann das Massenträgheitsmoment J_K des Körpers bestimmt werden.

2.3 Versuchsaufbau

Für die Durchführung werden eine Schwingplatte, Massenstücke zur Auslenkung der Schwingplatte, eine Lichtschranke zur Messung der Periodendauer und eine Waage zur Wägung der Massenstücke und des unregelmäßig geformten Körpers benötigt.

Messgenauigkeit der verwendeten Geräte

Der Messschieber besitzt eine Messgenauigkeit von $\Delta d = 0,1\text{mm}$.

Die verwendete Feinwaage der Firma *Sartorius* weist eine Messgenauigkeit von $\Delta m = 0,1\text{g}$ auf.

Das elektronische Zeitmessgerät der Firma *Phywe* hat eine Messgenauigkeit von $\Delta t = 0,0015\text{s}$.

Der beim Ablesen der Winkel entstehende Größtfehler beträgt $\Delta\varphi = 1^\circ$.

2.4 Messergebnisse

2.4.1 gemessene Größen

Der Durchmesser des Fadens und der Welle wurden mittels eines Messschieber jeweils dreimal bestimmt:

$$\bar{d}_S = 0,5mm \quad (\text{M11.31})$$

$$\bar{d}_W = 31,1mm \quad (\text{M11.32})$$

$$\Rightarrow r_G = \frac{1}{2}(\bar{d}_S + \bar{d}_W) = \frac{1}{2}(0,5 + 31,1)mm = 15,8mm = 1,58 \cdot 10^{-3}m \quad (\text{M11.33})$$

Weiterhin wurde mit dem Messschieber der Durchmesser des Zylinders zweimal bestimmt:

$$\bar{d}_Z = 30,3mm \quad (\text{M11.34})$$

$$\Rightarrow r_Z = 15,2mm = 1,52 \cdot 10^{-2}m \quad (\text{M11.35})$$

Mit einer Waage wurden die Masse des Zylinders und des unregelmäßig geformten Körpers bestimmt:

$$m_Z = 179,9g \quad (\text{M11.36})$$

$$m_K = 276,0g \quad (\text{M11.37})$$

2.4.2 Statische Bestimmung des Direktionsmoments D

Nach Gleichung M11.20 kann bei gemessenen r_G und bekanntem

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{M11.38})$$

das Moment M ermittelt werden. Wie in Unterunterabschnitt 2.2.2 beschrieben kann nun durch lineare Regression der Messdaten die Funktion $M(\varphi)$ ermittelt werden (erstellt mit [6]).

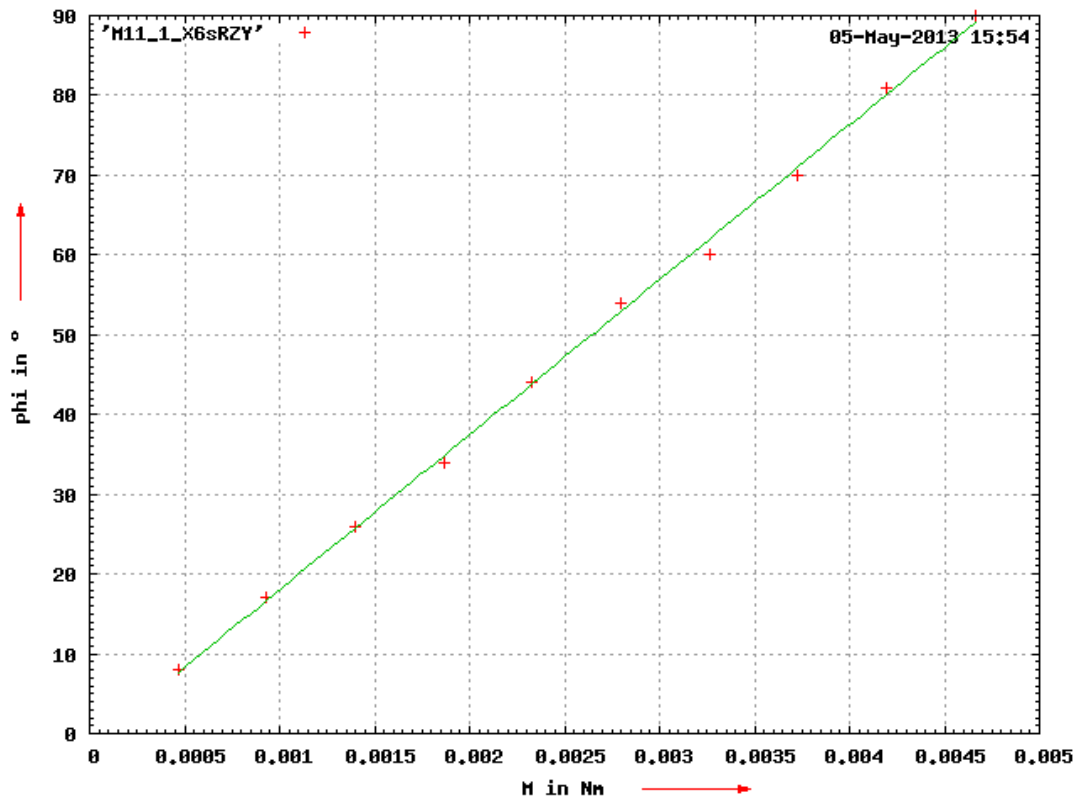


Abbildung M11.1: Lineare Regression der Messwerte in einem $\varphi - M$ -Diagramm

Die Gerade ($y = ax + b$) besitzt einen Anstieg von $a = 50,81$ ($[a] = \frac{\text{rad}}{\text{Nm}}$). Nach Gleichung M11.21 ist a das Reziproke des Direktionsmoments.

$$D_S = -\frac{M}{\varphi} = \frac{1}{a} = 0,01968 \text{ Nm} = 1,97 \cdot 10^{-2} \text{ Nm} \quad (\text{M11.39})$$

2.4.3 Dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D

Beweis des Satzes von *STEINER*

Die aufgenommenen Messwerte der Periodendauer T und des Abstandes s des Metallzylinders werden in ein $T^2 - s^2$ -Diagramm eingetragen (erstellt mit [4]).

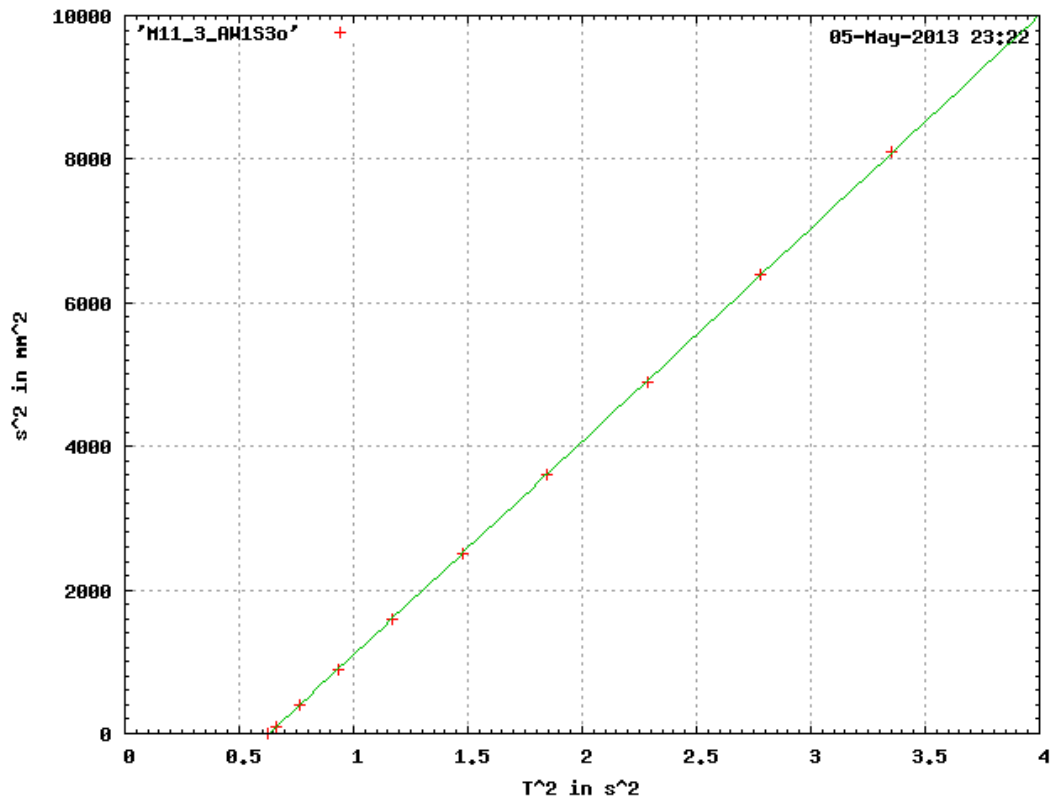


Abbildung M11.2: Lineare Regression der Messwerte in einem $T^2 - s^2$ -Diagramm

Das Diagramm zeigt klar einen linearen Zusammenhang der Messgrößen. Der Korrelationskoeffizient beträgt $R^2 = 0,9971$, damit liegt den Messwerten eindeutig ein linearer Zusammenhang zu Grunde. Der Satz von STEINER ist bewiesen.

Bestimmung von D und J

Der Anstieg der Geraden ($y = ax + b$) beträgt $a = 2,976 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s^2}$. Nach Gleichung M11.25 kann nun D des Zylinder der Masse m_Z bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 D_D &= 4\pi^2 m_Z a \\
 &= 4\pi^2 \cdot 1,797 \cdot 10^{-1} kg \cdot 3,095 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s^2} \\
 &= 2,111 \cdot 10^{-2} Nm
 \end{aligned} \tag{M11.40}$$

Durch die Messung einer Schwingungsdauer $\overline{T_{s^2=0}} = 0,792s$ und Gleichung M11.27 kann die Summe aus J_0 und J_Z ermittelt werden:

$$J_0 + J_Z = \frac{D_D}{4\pi^2} \cdot \overline{T_{ohne}}^2 \quad (\text{M11.41})$$

$$= \frac{2,111 \cdot 10^{-2} Nm}{4\pi^2} \cdot 0,792^2 s^2 \quad (\text{M11.42})$$

$$= 3,376 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad (\text{M11.43})$$

Das Trägheitsmoment J_0 der Platte lässt sich über die Messung der Periodendauer $\overline{T_{ohne}} = 0,767s$ nach Gleichung M11.28 berechnen:

$$J_0 = \frac{D_D \overline{T_{ohne}}^2}{4\pi^2} = \frac{2,111 \cdot 10^{-2} Nm \cdot 0,767^2 s^2}{4\pi^2} = 3,145 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad (\text{M11.44})$$

Nun kann J_Z bestimmt werden:

$$J_Z = (J_0 + J_Z) - J_0 = 2,30 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (\text{M11.45})$$

2.4.4 Bestimmung des Massenmittelpunkts und eines Hauptträgheitsmoments eines unregelmäßig geformten Körpers

Bestimmung eines Massenmittelpunktes

Die Schwingungsdauer T wird jeweils dreimal bei verschiedenen Abständen s des unregelmäßig geformten Körpers (siehe Abbildung M11.4) vom Mittelpunkt des Drehtellers gemessen und \overline{T} gebildet. Trägt man nun J (Gleichung M11.13) über s ab, so erhält man den folgenden Graphen (erstellt mit [8]):

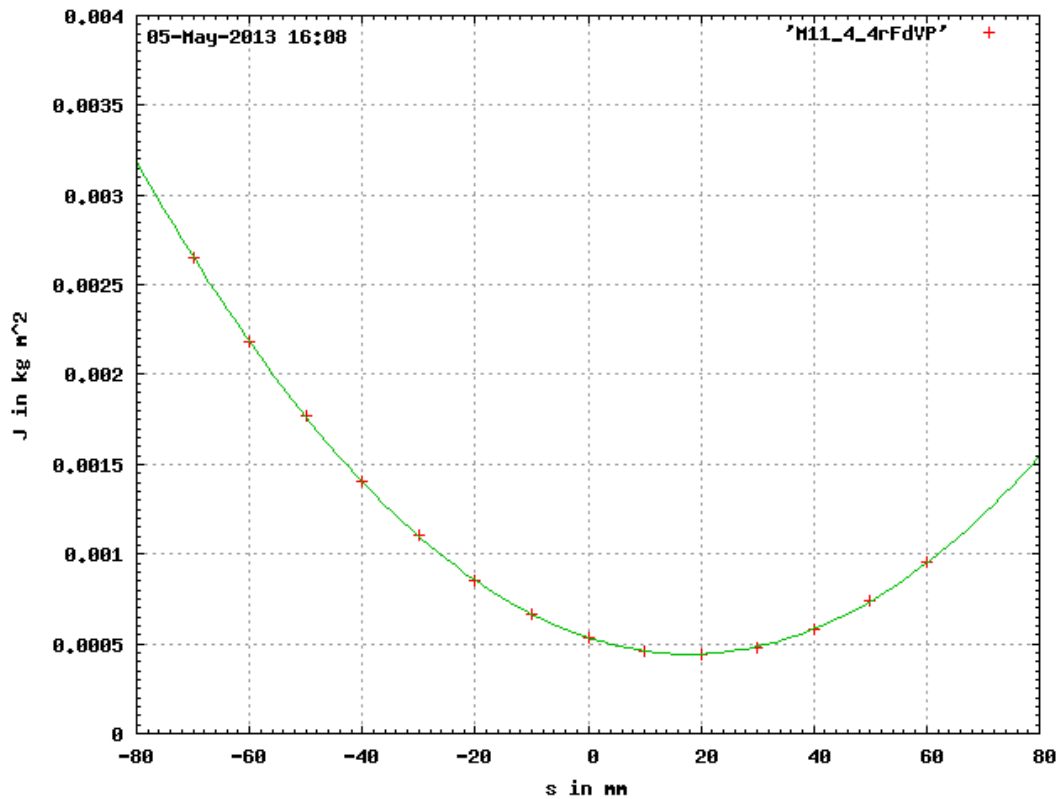


Abbildung M11.3: quadratische Regression der Messwerte in einem $J - s$ -Diagramm

Das Minimum der Funktion $f(s)$ liegt bei $s_{min} = 0,01793m = 17,93mm$.

Bestimmung eines Hauptträgheitsmoments

Nach Gleichung M11.30 kann nun ein Hauptträgheitsmoment berechnet werden. Dabei ist J_0 das unter Abschnitt 2.4.3 bestimmte Massenträgheitsmoment des Tisches und $J_G(s_{min})$ kann aus Abbildung 2.4.4 bestimmt werden ($J_G(s_{min}) = 4,247 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$).

$$\begin{aligned} J_K &= J_G(s_{min}) - J_0 \\ &= 4,247 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 - 3,145 \cdot 10^{-4} \\ &= 1,102 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \end{aligned} \quad (M11.46)$$

2.5 Messfehler

Messunsicherheiten bei der statischen Bestimmung von D

Nach der lineare Fehlerfortpflanzung ergibt sich eine Messunsicherheit für D von (nach [6]):

$$\Delta D_S = 2,5 \cdot 10^{-4} Nm \quad (M11.47)$$

Messunsicherheiten bei der dynamischen Bestimmung von D und J

Nach dem Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung unterliegt D_D folgendem Messfehler (nach [4]):

$$\Delta D_D = 3,0 \cdot 10^{-5} Nm \quad (M11.48)$$

Für das Trägheitsmoment J_0 gilt nach dem linearen Fehlerfortpflanzungssesetz:

$$\Delta J_0 = \left(2 \frac{\Delta T}{T_{ohne}} + \frac{\Delta D_D}{D_D} \right) \cdot J_0 = \left(2 \frac{0,0015s}{0,767s} + \frac{3,0 \cdot 10^{-5} Nm}{2,111 \cdot 10^{-2} Nm} \right) \cdot 3,145 \cdot 10^{-4} \quad (M11.49)$$

$$= 1,677 \cdot 10^{-6} \cdot kg \cdot m^2 \quad (M11.50)$$

Wert für ΔD_D aus [4]. Daraus folgt für ΔJ_S :

$$\Delta J_S = 3,393 \cdot 10^{-4} \cdot kg \cdot m^2 \quad (M11.51)$$

2.6 Diskussion der Ergebnisse

2.6.1 Zusammenfassung der Messungen

Es wurden folgende Größen mit ihren jeweiligen Messunsicherheiten bestimmt:

$$D_S = (1,97 \cdot 10^{-2} \pm 2,5 \cdot 10^{-4}) Nm \quad (M11.52)$$

$$D_D = (2,111 \cdot 10^{-2} \pm 3,0 \cdot 10^{-5}) Nm \quad (M11.53)$$

$$J_0 = (3,145 \cdot 10^{-4} \pm 1,677 \cdot 10^{-6}) kg \cdot m^2 \quad (M11.54)$$

$$J_Z = (2,30 \cdot 10^{-5} \pm 3,393 \cdot 10^{-4}) kg \cdot m^2 \quad (M11.55)$$

$$J_K = 1,102 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad (M11.56)$$

$$s_{min} = 17,93 mm \quad (M11.57)$$

2.6.2 Statische und dynamische Bestimmung des Direktionsmoments D

Es kamen im Versuch zwei verschiedene Verfahren zur Messung des Direktionsmoments D zum Einsatz. Dabei lässt sich feststellen, dass die dynamische Bestimmung des Direktionsmoments eindeutig ($\frac{\Delta D_S}{\Delta D_D} = 8,33$) genauere Ergebnisse liefert.

mögliche Ursachen Die genauere Messung ist vor allem durch das nur sehr grobe Ablesen des Winkelausschlags bei der statischen Messung und die sehr genaue Zeitmessung bei der dynamischen Messmethode zu erklären. Eine weitere Quelle für Messungenauigkeiten ist die Bestimmung des Durchmessers des Fadens. Zum einen ist eine genaue Messung mit einem Messschieber nur sehr schwer möglich, da der Faden sehr dünn und elastisch ist, zum anderen unterliegt der Faden einer Dehnung während der Belastung mit Massenstücken. Diese Dehnung wird nicht berücksichtigt.

Verbesserungen Durch die Verwendung eines Fadens aus einem Material, welches sich nicht so stark unter Zug verformt, könnte diese Fehlerquelle minimiert werden. Zudem könnte durch eine digitale Winkelmessung oder eine dünnere und spitzere und damit genauere *Ableseadel* der Fehler weiter minimiert werden.

2.6.3 Bestimmung von Trägheitsmomenten

Satz von *STEINER*

Der Versuch ist ein möglicher experimenteller Nachweis des Satzes von STEINER. Der durchgeführte Versuch konnte den Satz von STEINER beweisen.

2.6.4 Bestimmung einer Schwerpunktkoordinate

Der zuvor experimentell bewiesene Satz von STEINER kann verwendet werden um das Trägheitsmoment des Körper zu berechnen, aber auch um die Schwerpunktachse zu bestimmen. Das folgende Bild zeigt eine Skizze des Körpers mit eingezeichnetem Schwerpunkt.

Skizze des unregelmäßig geformten Körpers Der Probekörper wurde mit dem Messschieber vermessen und die Maße in die folgende Skizze eingetragen.

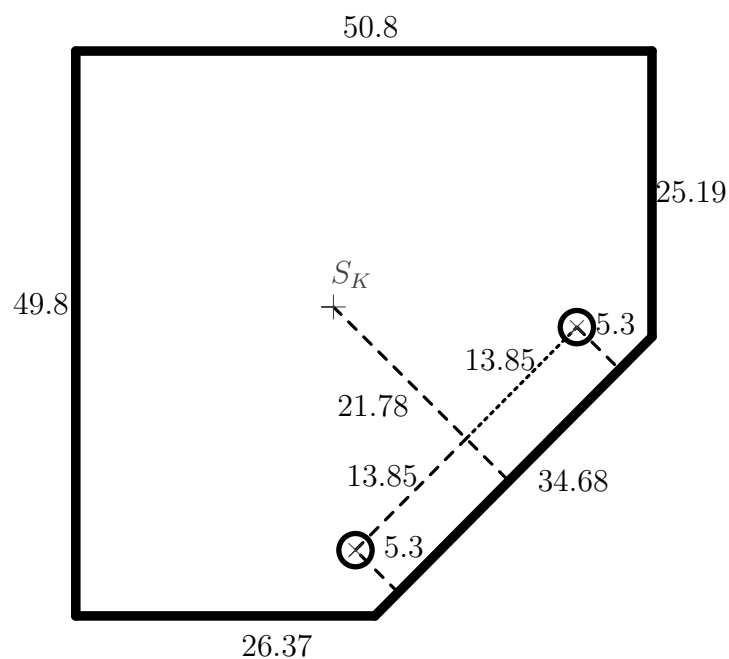


Abbildung M11.4: Skizze des Probekörpers (alle Angaben in mm)

Die flache Seite des Probekörpers weist zur Pfeilspitze.

3 E5 Gleichstromquellen

3.1 Aufgabenstellung

1. a) Die Leerlaufspannungen (Quellenspannungen) einer elektrochemischen Spannungsquelle und eines Solarmoduls (bei fester Bestrahlungsstärke) sind mit Hilfe der Kompensationsmethode nach POGGENDORF zu bestimmen.
- b) Die Strom-Spannungs-Charakteristik der elektrochemischen Spannungsquelle ist aufzunehmen und graphisch darzustellen. Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und Innenwiderstand R_i sind durch lineare Regression zu bestimmen.
- c) Die Strom-Spannungs-Charakteristik eines Solarmoduls ist bei zwei unterschiedlichen Bestrahlungsstärken aufzunehmen und graphisch darzustellen. Die Leerlaufspannungen, Kurzschlussströme und die Innenwiderstände R_i bei Anpassung, bei geringer und bei hoher Belastung sind zu bestimmen.
- d) Die abgegebene Leistung ist als Funktion des äußeren Widerstands R_a für beide Spannungsquellen graphisch darzustellen. Die maximale Leistung und der dieser entsprechende Widerstand R_a sind zu ermitteln und mit den Werten von R_i aus 1.b und 1.c zu vergleichen.

3.2 Grundlagen zum Versuch

3.2.1 Arten von Spannungsquellen

elektrochemische Spannungsquelle

Eine elektrochemische Spannungsquelle wandelt chemische in elektrische Energie. Man unterscheidet bei galvanischen Elementen zwischen Batterien (Primärzellen) und Akkumulatoren (Sekundärzellen) als Energiequelle. Akkumulatoren können im Gegensatz zu Batterien wieder aufgeladen werden, diese Eigenschaft ist jedoch für den Einsatz als Spannungsquelle unerheblich, da nur der Entladevorgang von Betracht ist.

In einer elektrochemischen Spannungsquelle findet meist eine räumlich getrennte Redoxreaktion statt. Dabei läuft an der Anode (Minuspol) eine Oxidation ab und es werden Elektronen frei, an der Kathode (Pluspol) findet eine Reduktion statt. Man kann eine Spannung zwischen den beiden Elektroden feststellen. Werden die beiden Pole elektrisch leitend verbunden, so fließt ein Strom. Dieser Vorgang läuft so lange bis sich ein Gleichgewicht zwischen Anode und Kathode eingestellt hat.

Solarzelle oder Solarmodul

Die Solarzelle oder das Solarmodul beruht auf der Halbleitertechnologie. Als Halbleiter werden Stoffe bezeichnet, die sowohl als Leiter als auch als Isolator dienen können.

Anders als Metalle haben reine Halbleiter bei hohen Temperaturen einen geringen Widerstand und bei tiefen Temperaturen einen hohen Widerstand. Diese Eigenschaft der Halbleiter ist durch die Lage des Valenz- und Leitungsbandes zu erklären. Die Bänder liegen in einem Abstand der von Elektronen mit genügend Energie überwunden werden kann (hohe Temperaturen).

Bei Solarzellen kommt meist dotiertes Silicium zum Einsatz. Unter dem Vorgang des *Dotierens* versteht man das Einbringen von Fremdatomen mit mehr oder weniger Elektronen auf der äußeren Schale (*p/n-Dotierung*).

Die Solarzelle besteht aus einer dünnen n-dotierten auf einer p-dotierten Schicht Silicium. Es entsteht an der Auflagefläche der beiden Schichten eine von Ladungsträgern verarmte Schicht (Raumladungszone/ Sperrschicht), da Elektronen der n-dotierten Schicht in die p-dotierte Schicht diffundieren.

Treffen Photonen auf die Raumladungszone so kommt es zu einer erneuten Trennung von Elektronen und "Löchern". Die Elektronen und Löcher werden dabei jeweils durch die Raumladung beschleunigt in die n-Schicht bzw. p-Schicht gezogen. Es kommt zu einer messbaren Ladungsdifferenz zwischen den Schichten und damit zu einer Spannung. Verbindet man die p- und n-Schicht elektrisch leitend, so entsteht ein Stromfluss.

3.2.2 Das Ohmsche Gesetz

Der lineare Zusammenhang zwischen der über einem Widerstand R ($[R] = \Omega$) abfallenden Spannung U ($[U] = V$) und der Stromstärke I ($[I] = A$) ist:

$$U = R \cdot I \quad (\text{E5.1})$$

Dabei muss $R = \text{const.}$ sein.

3.2.3 Leistung P im Gleichstromkreis

Die Spannung

$$U = \frac{dW}{dQ} \Rightarrow dW = U \cdot dQ \quad (\text{E5.2})$$

ist die für Ladungsträger benötigte Arbeit um von einem niedrigeren Potenzial auf ein höheres Potenzial zu gelangen, oder die abgegebene Arbeit für den umgekehrten Fall.

Der Strom

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I \cdot dt \quad (\text{E5.3})$$

ist die zeitliche Änderung der Ladung. Durch Einsetzen von Gleichung E5.3 in Gleichung E5.2 erhält man:

$$dW = U \cdot I dt \Rightarrow W = E = \int_0^t U I dt = U I \int_0^t dt \quad (\text{E5.4})$$

Das Differential der Energie E ($[E] = Ws = J$) nach der Zeit ist die Leistung P ($[P] = W$) und damit gilt:

$$P = UI \quad (\text{E5.5})$$

Die Leistung ist das Produkt aus Strom und Spannung in einem Gleichstromkreis.

3.2.4 aktiver und passiver Zweipol

Ein einfacher Grundstromkreis aus einer Gleichstromquelle mit Innenwiderstand R_i und Lastwiderstand R_L kann in zwei Zweipole unterteilt werden:

aktiver Zweipol Teil der Schaltung mit Quelle und dazugehörigem Innenwiderstand, dazu im Gegensatz der

passiver Zweipol mit einem Verbraucher (z. B. Lastwiderstand).

Beide Zweipole sind über Klemmen verbunden und werden vom gleichen Strom durchflossen.

3.2.5 Bestimmung der Leerlaufspannung

Eine ideale Spannungsquelle besitzt keinen Innenwiderstand R_i , über den Spannung abfällt. Somit entspricht die mit einem idealen hochohmigen Voltmeter ($\Omega \rightarrow \infty$) gemessene Spannung U an den Klemmen auch der Quellenspannung (Leerlaufspannung) E_X .

Jede reale Spannungsquelle besitzt jedoch einen Innenwiderstand, somit muss die Messung ohne Stromfluss erfolgen ($I = 0$), da nur so keine Spannung am Innenwiderstand abfällt. Damit ist bei unbekanntem Innenwiderstand eine direkte Messung nur mit sehr hochohmigen Spannungsmessgeräten oder einem Kompensationsverfahren möglich. Dabei bietet das Kompensationsverfahren eine höhere Genauigkeit. Für elektrochemische Spannungsquellen eignet sich das Kompensationsverfahren nach POGGENDORF zur Bestimmung von E_X .

Kompensationsverfahren nach *POGGENDORF*

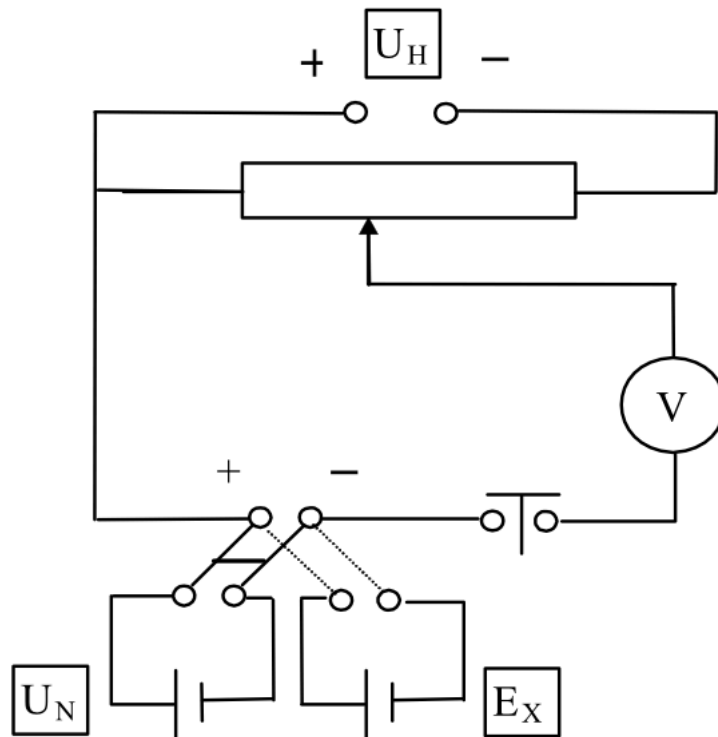


Abbildung E5.1: Kompensationsmethode nach *POGGENDORF*

Nach *POGGENDORF* wird die zu bestimmende Spannung E_X durch eine Hilfsspannung U_H kompensiert, so dass kein Strom mehr fließt ($I = 0$).

Am variablen Widerstand ⁶ können nun zwei Spannung (U_1 und U_2) an den zwei *erzeugten* Teilwiderständen (R_1 und R_2 mit $R_G = R_1 + R_2$) bei konstantem Strom I abfallen. Für die Hilfsspannung gilt mit den beiden Spannungsabfällen an R_1 und R_2 :

$$U_H = I(R_1 + R_2) = I \cdot R_G \quad (\text{E5.6})$$

In diesem Fall kompensiert die Spannung U_1 die Quellenspannung E_X

$$E_X = U_1 = I \cdot R_1 \quad (\text{E5.7})$$

⁶Im Versuch erzeugt durch ein Wendelpotentiometer

so, dass kein Strom mehr fließt ($I = 0$). Durch Einsetzen von Gleichung E5.6 in Gleichung E5.7 erhält man:

$$U_H = I \cdot R_G \Rightarrow I = \frac{U_H}{R_G} \quad (\text{E5.8})$$

$$\begin{aligned} E_X = I \cdot R_1 &= \frac{U_H}{R_G} \cdot R_1 \\ &= U_H \cdot \frac{R_1}{R_G} \end{aligned} \quad (\text{E5.9})$$

Die nur ungenaue Hilfsspannung lässt sich durch Vergleich mit einem sehr viel genaueren Spannungsnormals U_N ermitteln. Es wird wieder eine Kompensation durchgeführt, dieses mal jedoch kompensiert U'_1 die Spannung U_N . So ergibt sich

$$U_N = U'_1 = I \cdot R'_1 \quad (\text{E5.10})$$

und es folgt daraus analog zu Gleichung E5.8

$$U_N = U'_1 = I \cdot R'_1 = \frac{U_H}{R_G} \cdot R'_1 \quad (\text{E5.11})$$

$$= U_H \cdot \frac{R'_1}{R_G} \quad (\text{E5.12})$$

Durch Einsetzen von Gleichung E5.11 in Gleichung E5.8 erkennt man, dass die Leerlaufspannung unabhängig von U_H gemessen werden kann:

$$U_N = U_H \cdot \frac{R'_1}{R_G} \Rightarrow U_H = U_N \frac{R_G}{R'_1} \quad (\text{E5.13})$$

$$\begin{aligned} E_X = U_H \cdot \frac{R_1}{R_G} &= U_N \frac{R_G}{R'_1} \cdot \frac{R_1}{R_G} \\ &= U_N \cdot \frac{R_1}{R'_1} \end{aligned} \quad (\text{E5.14})$$

Die Leerlaufspannung kann somit ohne große Messfehler durch hochohmige Voltmeter bestimmt werden.

3.2.6 Strom-Spannungs-Charakteristik einer Gleichstromquelle

Zur Aufnahme der Strom-Spannungs-Charakteristik oder auch Kennlinie einer Spannungsquelle (aktiver Zweipol) wird der Spannungsabfall U_{gem} an einem Lastwiderstand R_L betrachtet. Im Versuch kommt zusätzlich zum Spannungsabfall am Lastwiderstand noch der Spannungsabfall am Innenwiderstand des Amperemeters hinzu $U_{gem} = U_L + U_{DM}$.

Die Funktion $U_{gem}(I)$ wird in ein entsprechendes Koordinatensystem eingetragen. Unabhängig vom Verlauf des Graphen lassen sich einige charakteristische Punkte der Spannungsquelle finden.

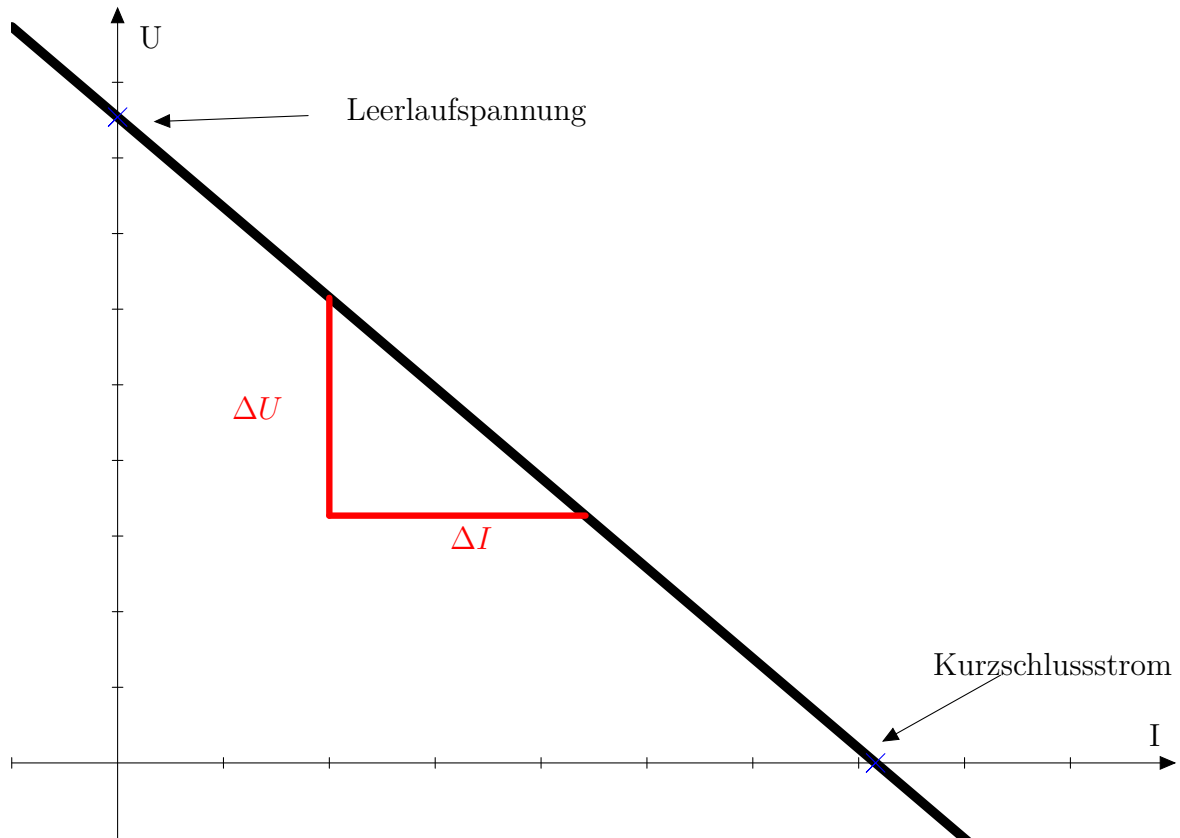


Abbildung E5.2: Verlauf der Kennlinie für den Fall eines linearen Zusammenhangs ($y = ax + b$) zwischen U und I

Kurzschlussstrom (I_K) Der Kurzschlussstrom ist der maximale Stromfluss der bei einer kurzgeschlossenen Quelle entstehen kann.

Leerlaufspannung (U_Q) Die Spannung, die die Stromquelle ohne Last liefert. Es fließt kein Strom und somit kann auch keine Spannung an einem Innenwiderstand abfallen. Die gesamte Spannung liegt an den Klemmen an.

Steigung des Graphens bei einem linearen Zusammenhang

Die Steigung a des Graphens ist

$$a = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (\text{E5.15})$$

Es gilt für den einfachen Stromkreis aus einer Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand und einem Lastwiderstand nach dem KIRCHHOFFSCHEN-Maschensatz folgende Gleichung:

$$E_X = U_i + U_{gem} = 0 \quad (\text{E5.16})$$

Durch Umformen erhält man:

$$U_{gem} = E_X - U_i \quad (\text{E5.17})$$

$$= E_X - R_i \cdot I \quad (\text{E5.18})$$

$$= -R_i \cdot I + U_Q \quad (\text{E5.19})$$

Gleichung E5.19 zeigt einen linearen Zusammenhang der Form $y = ax + b$. Damit ist der Anstieg der Geraden a der Innenwiderstandes der Spannungsquelle.

$$R_i = |a| \quad (\text{E5.20})$$

Sollten die Achsen vertauscht sein, so ist der Anstieg das Reziproke des Innenwiderstandes.

3.2.7 Bestimmung des Arbeitspunkts bei linearem Innenwiderstand

Zusätzlich zur Aufnahme der Kennlinie des aktiven Zweipols kann noch eine Kennlinie des passiven Zweipols aufgenommen werden. Die Funktion $U(I)$ zeigt im Falle eines einzelnen linearen Lastwiderstandes R_L eine Gerade der Form $y = ax$, wobei $a = R_L$ gilt. Die Graphen der Kennlinien des aktiven Zweipols (siehe Abbildung O10.2) und des passiven Zweipols weisen einen Schnittpunkt auf. Diesen Punkt nennt man *Arbeitspunkt*.

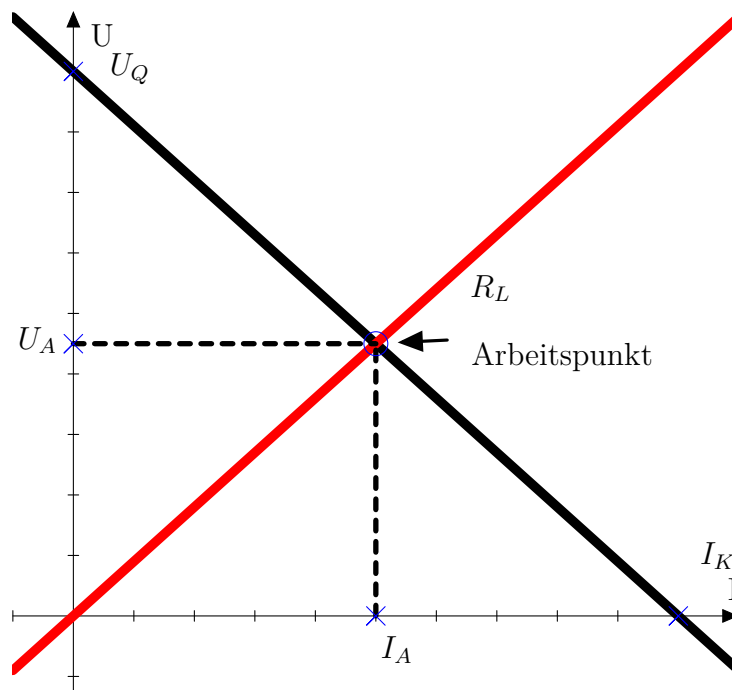


Abbildung E5.3: eingezeichneter Arbeitspunkt bei einem linearen Lastwiderstand R_L (rote Gerade) und einer Gleichstromquelle mit Innenwiderstand (schwarze Gerade)

maximale Leistungsabgabe

Nach Gleichung E5.16 und Gleichung E5.5 mit :

$$I_K = \frac{E_X}{R_i + R_a} \quad (\text{E5.21})$$

gilt für die Leistung:

$$P_a = U_{gem} \cdot I = I^2 \cdot R_a = \frac{E_X^2}{(R_i + R_a)^2} \cdot R_a \quad (\text{E5.22})$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung kann der Punkt der maximalen Leistung ermittelt werden:

$$\frac{d}{dR_a} P_a = \frac{E_X^2}{(R_i + R_a)^2} \cdot R_a = 0 \quad (\text{E5.23})$$

$$0 = -\frac{(R_a - R_i) \cdot E_X^2}{(R_a + R_i)^3} \quad (\text{E5.24})$$

Für $R_a = R_i$ ist die Leistung maximal. Der Arbeitspunkt einer Spannungsquelle wird damit immer dann erreicht, wenn der Lastwiderstand (Außenwiderstand) gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist.

Für die maximale Leistung gilt mit $R_a = R_i$:

$$P_{max} = \frac{E_X^2}{4 \cdot R_a^2} \cdot R_a = \frac{E_X^2}{4R_a} \quad (\text{E5.25})$$

3.2.8 Der Arbeitspunkts bei nicht linearem Innenwiderstand

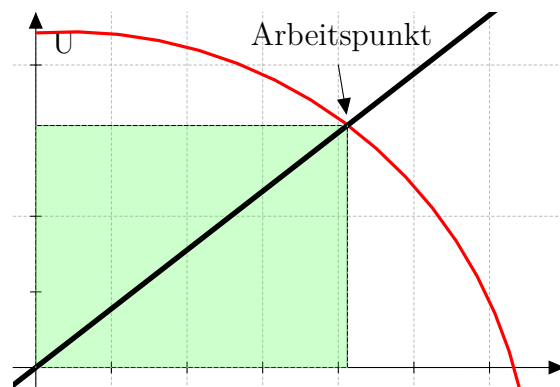


Abbildung E5.4: nicht linearer Innenwiderstand einer Spannungsquelle (roter Graph) und linearer Lastwiderstand (schwarzer Graph)

Die grün markierte Fläche $F_{Leistung}$ in ist die abgegebene Leistung. Am Arbeitspunkt ist diese Fläche maximal.

3.3 Versuchsaufbau

Für die Durchführung des Versuches werden eine elektrochemischen Spannungsquelle und eine Solarzelle benötigt. Zudem benötigt man für die Durchführung des Kompensationsverfahrens noch ein Wendepotentiometer und zur Aufnahme der Strom-Spannungscharakteristik Lastwiderstände und ein digitales Multimeter.

3.3.1 Schaltpläne zur Aufnahme der Messwerte für die Strom-Spannungs-Charakteristik

elektrochemische Spannungsquelle

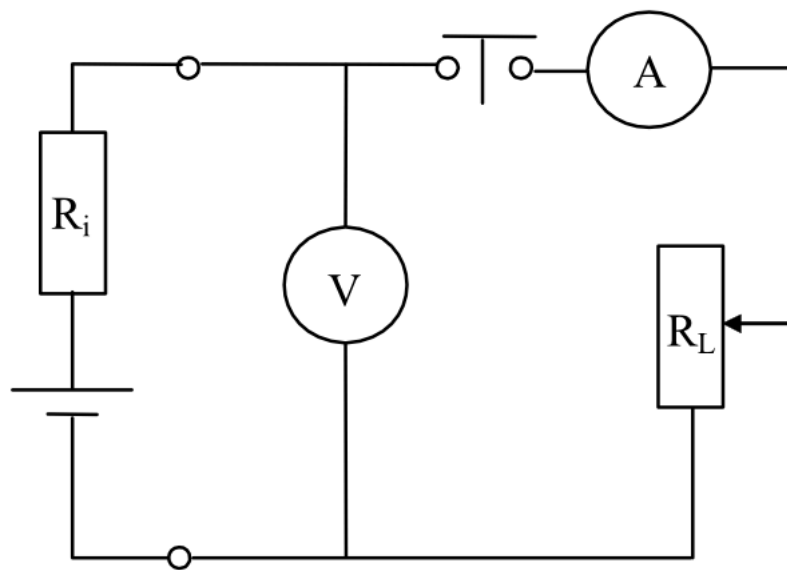


Abbildung E5.5: Schaltplan zur Aufnahme der Kennlinie einer elektrochemischen Spannungsquelle

Solarzelle

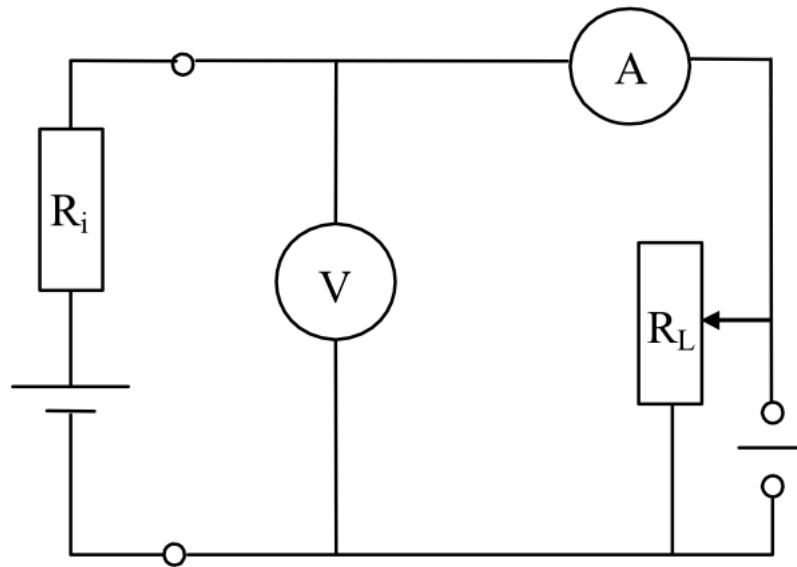


Abbildung E5.6: Schaltplan zur Aufnahme der Kennlinie einer Solarzelle

3.3.2 Messfehler

Kompensationsverfahren nach *POGGENDORF*

Für die mit dem Wendepotentiometer eingestellten Widerstände gilt eine Messunsicherheit von:

$$\Delta R = 0,005\Omega \quad (\text{E5.26})$$

Das Spannungsnormale weist eine Messunsicherheit von

$$\Delta U_N = 1 \cdot 10^4 V \quad (\text{E5.27})$$

auf.

Das digitale Multimeter *G-1002.500* besitzt eine Messunsicherheit von:

$$\Delta U_{0,2:2} = \pm 0,1\% + 2 \quad (\text{E5.28})$$

$$\Delta U_{20:200:2000} = \pm 0,2\% + 2 \quad (\text{E5.29})$$

$$\Delta I = \pm 0,4\% + 3 \quad (\text{E5.30})$$

3.4 Messergebnisse

3.4.1 Bestimmung der Leerlaufspannung nach *POGGENDORF*

Nach Gleichung E5.14 kann die Leerlaufspannung E_X unabhängig von der Hilfsspannung U_H berechnet werden. Zudem ist nur der Quotient aus den beiden Widerständen relevant,

so dass eine Betrachtung der Einheit von R_1 und R'_1 entfällt. Es ergeben sich folgende Spannungen für die elektrochemische Spannungsquelle E_{XC} und die Solarzelle E_{XS} bei $U_N = 1V$:

$$E_{XC_{Poggendorf}} = 1V \cdot \frac{2,41}{2,0} = 1,205V \quad (E5.31)$$

$$E_{XS} = 1V \cdot \frac{7,7}{2,0} = 3,850V \quad (E5.32)$$

3.4.2 Strom-Spannungs-Charakteristik elektrochemische Spannungsquelle

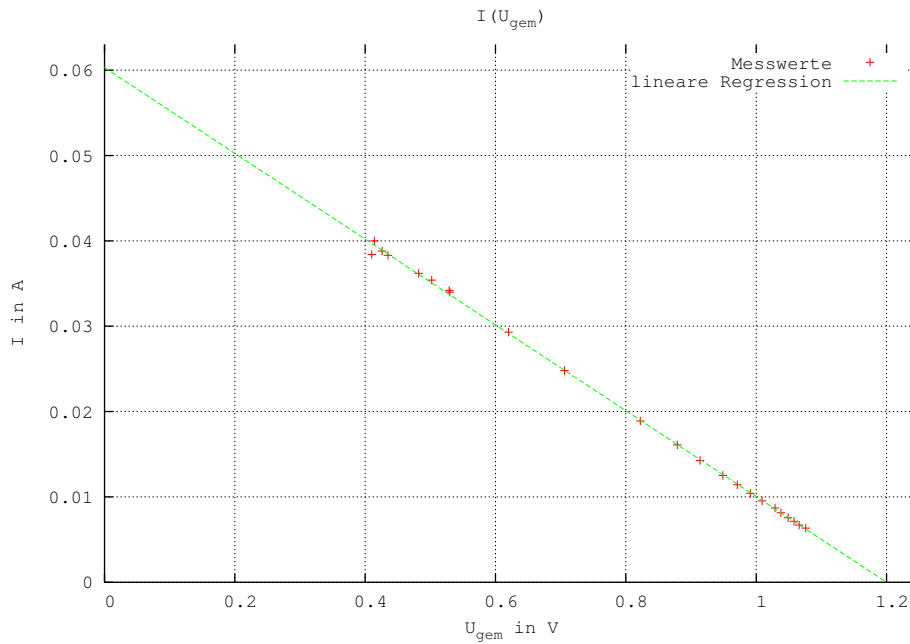


Abbildung E5.7: Strom-Spannungs-Charakteristik einer elektrochemischen Spannungsquelle

Die Grafik zeigt einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke. Der Korrelationskoeffizient r^2 der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ bestätigt mit einem Wert von $r^2 = 0,9996 \approx 1$ die Linearität.

Zudem kann durch die ermittelte Geradengleichung

$$I(U) = -0,0502571 \cdot U + 0,0603058 \quad (E5.33)$$

nach Gleichung E5.20 der Innenwiderstand der Spannungsquelle ermittelt werden:

$$R_{iC} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{0,0502571 \frac{V}{A}} = 19,90\Omega \quad (E5.34)$$

Der Kurzschlussstrom ist der y-Achsenabschnitt b der Geraden und damit:

$$I_{KC} = b = 0,06031A = 60,31mA \quad (E5.35)$$

Die Leerlaufspannung kann durch Nullsetzen von Gleichung E5.33 berechnet werden.

$$0 = -0,0502571 \cdot U + 0,0603058 \quad (E5.36)$$

$$\Rightarrow E_{XClin.Regresion} = \frac{0,0603058}{0,0502571} = 1,200V \quad (E5.37)$$

Der ermittelte Werte liegt nahe an dem sehr genau durch *POGGENDORF* ermittelten Leerlaufspannung.

Solarzelle

Die abfallende Spannung am Außenwiderstand und der den Lastwiderstand durchfließenden Strom wurden bei zwei Bestrahlungsstärken $H_v = 1$ und $H_v = 0,5$ gemessen. Eine Solarzelle besitzt bei $\frac{H_v}{2}$ auch den halben Kurzschlussstrom, wie Abbildung E5.8 zeigt.

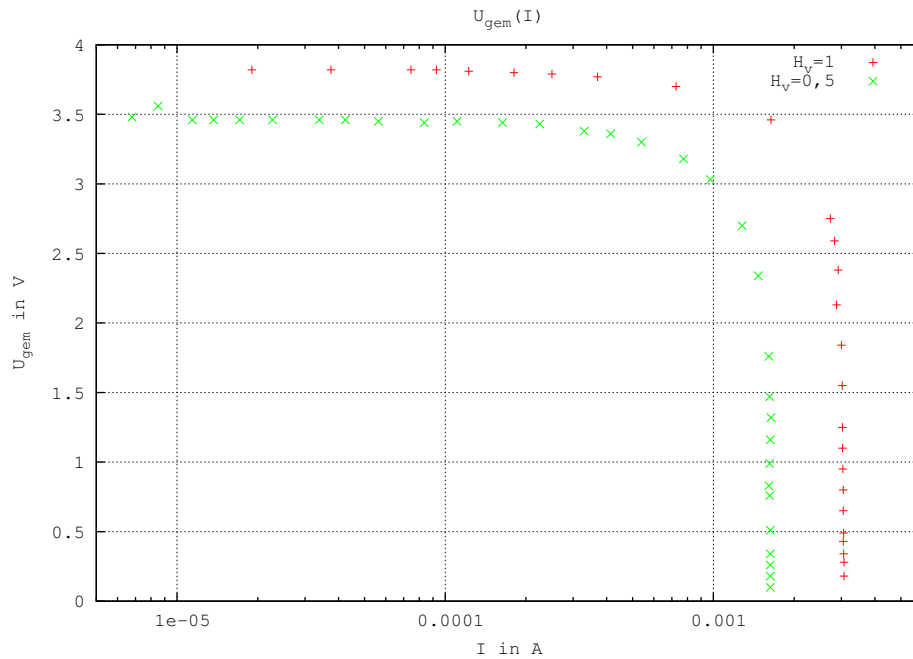


Abbildung E5.8: Strom-Spannungs-Charakteristik einer Solarzelle

Es können folgende Kurzschlussströme und Leerlaufspannungen bestimmt werden:

$$I_{KS1} = 3,5 \cdot 10^{-3}A \quad (E5.38)$$

$$E_{XS\frac{1}{2}} \approx 3,5V \quad (E5.39)$$

$$I_{KS\frac{1}{2}} = 1,55 \cdot 10^{-3}A \quad (E5.40)$$

Die Werte für I_K wurden mit dem digitalen Multimeter aufgenommen und können zusätzlich am Graphen abgelesen werden. $E_{X\frac{1}{2}}$ muss am Graphen abgelesen werden.

3.4.3 Differentielle Widerstände

Die Solarzelle zeigt bei keiner Bestrahlungsstärke einen linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Außenwiderstand. Somit kann auch nicht *der eine* Innenwiderstand durch Regression bestimmt werden.

Stattdessen werden *differentielle Widerstände* bestimmt. Durch Umstellen von Gleichung E5.16 erhält man eine Formel zur Berechnung von R_i :

$$U_i = E_X - U_{gem} \quad (\text{E5.41})$$

$$R_i \cdot I = E_X - U_{gem} \quad (\text{E5.42})$$

$$R_i = \frac{E_X - U_{gem}}{I} \quad (\text{E5.43})$$

Damit können drei Widerstandswerte für eine hohe Belastung, eine niedrige Belastung und bei Leistungsanpassung ⁷ ermittelt werden.

Bei voller Bestrahlungsstärke ergeben sich folgende Werte:

$$R_{i_{R_L=30k\Omega}} = 327\Omega \quad (\text{E5.44})$$

$$R_{i_{R_L=1k\Omega}} = 403\Omega \quad (\text{E5.45})$$

$$R_{i_{R_L=80\Omega}} = 1,195k\Omega \quad (\text{E5.46})$$

Bei $H_v = 0,5$:

$$R_{i_{R_L=80k\Omega}} = 943\Omega \quad (\text{E5.47})$$

$$R_{i_{R_L=2k\Omega}} = 625\Omega \quad (\text{E5.48})$$

$$R_{i_{R_L=150\Omega}} = 2,037k\Omega \quad (\text{E5.49})$$

3.4.4 elektrische Leistung

Die abgegebene Leistung nach Gleichung E5.5 kann als Funktion des äußeren Widerstandes R_a aufgetragen werden.

⁷man spricht auch vom Arbeitspunkt

elektrochemische Spannungsquelle

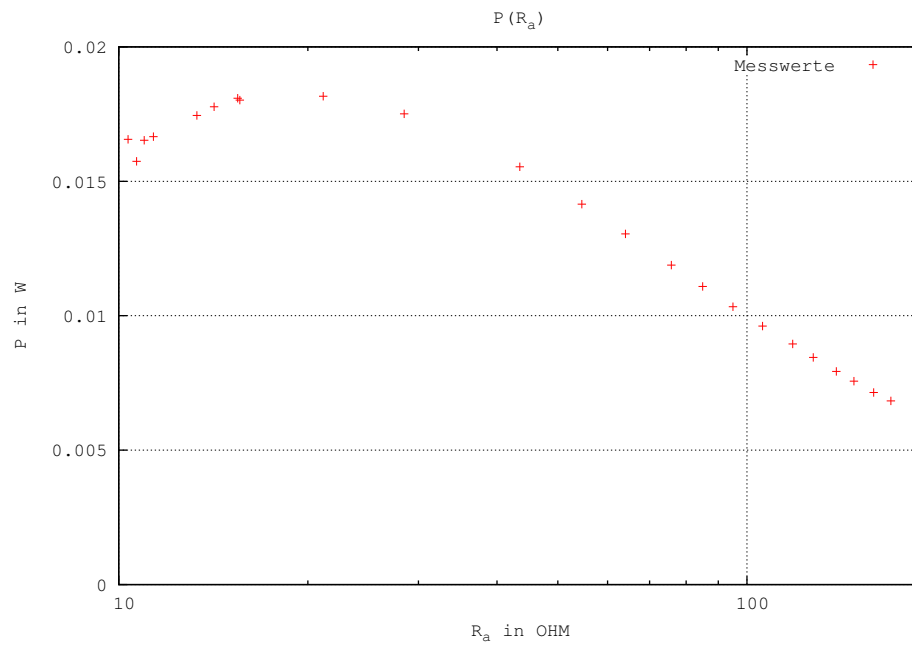


Abbildung E5.9: Leistung als Funktion des äußeren Widerstandes R_a bei einer elektrochemischen Spannungsquelle

Nach Gleichung E5.25 gilt:

$$P_{max_C} = \frac{E_X^2}{4 \cdot R_i} = \frac{(1,200 \cdot V)^2}{4 \cdot 19,90\Omega} = 1,809 \cdot 10^{-2} W \quad (E5.50)$$

Der Außenwiderstand beträgt $R_{P_{max_C}} \approx 21,2\Omega$.

Solarzelle

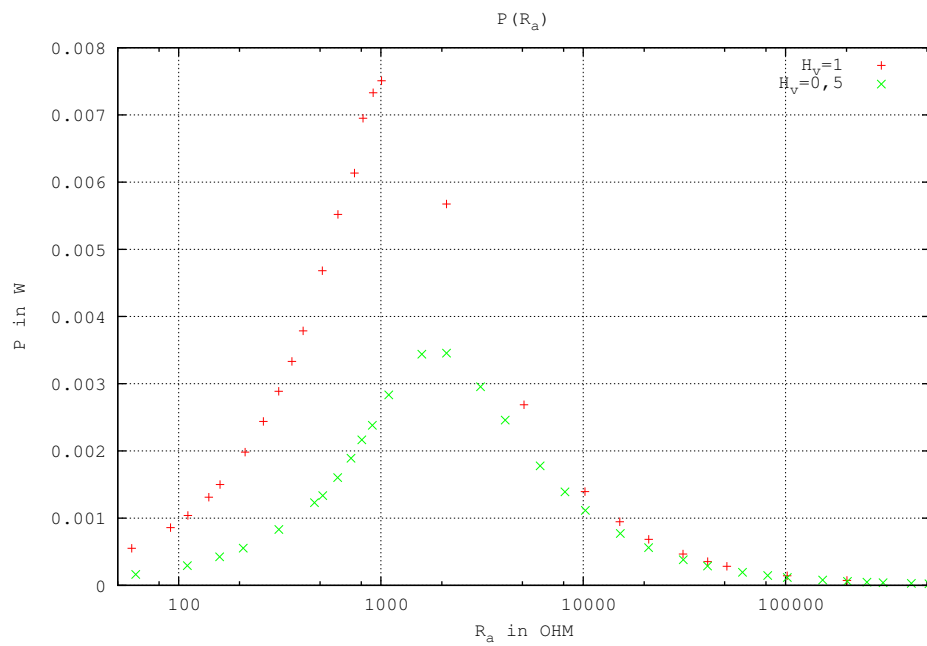


Abbildung E5.10: Leistung als Funktion des äußeren Widerstandes R_a bei einer Solarzelle

Der Innenwiderstand der Solarzelle ist nicht linear daher kann die maximale Leistung und der zugehörige Wert für R_a nur am Graphen abgelesen werden:

$$P_{max_{S1}} \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \quad (\text{E5.51})$$

$$R_{P_{max_{S1}}} \approx 1007\Omega \quad (\text{E5.52})$$

$$P_{max_{S\frac{1}{2}}} \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \quad (\text{E5.53})$$

$$R_{P_{max_{S\frac{1}{2}}}} \approx 2109\Omega \quad (\text{E5.54})$$

3.5 Messfehler

3.5.1 elektrochemische Spannungsquelle

$$\Delta E_{XC_{Poggendorf}} = \left(\frac{1 \cdot 10^{-4} V}{1 V} + \frac{0,005 \Omega}{2,41 \Omega} + \frac{0,005 \Omega}{2,0 \Omega} \right) \cdot 1,205 V = 5,6 \cdot 10^{-3} V \quad (E5.55)$$

$$\Delta E_{XC_{lin. Regression}} = \left(\frac{0,0002854 \frac{1}{\Omega}}{0,0502571 \frac{1}{\Omega}} + \frac{0,0002336 A}{0,0603058 A} \right) \cdot 1,200 V = 0,011 V \quad (E5.56)$$

$$\Delta P_{max} = \left(2 \cdot \frac{5,6 \cdot 10^{-3} V}{1,250 V} + 2 \cdot \frac{2,85 \cdot 10^{-4} \Omega}{19,9 \Omega} \right) \cdot 18,09 mW = 0,16 mW \quad (E5.57)$$

$$\Delta R_{iC} = 0,285 m\Omega \quad (E5.58)$$

$$\Delta I_{KC} = 0,234 mA \quad (E5.59)$$

3.5.2 Solarzelle

$$\Delta E_{XS} = \left(\frac{1 \cdot 10^4 V}{1 V} + \frac{0,005 \Omega}{7,7 \Omega} + \frac{0,005 \Omega}{2,0 \Omega} \right) \cdot 3,85 V = 0,013 V \quad (E5.60)$$

$$\Delta I_{KS1} = (3,5 \cdot 10^{-3} A) \cdot 0,004 + 0,0003 = 0,3 \cdot 10^{-3} A \quad (E5.61)$$

$$\Delta I_{KS\frac{1}{2}} = (1,55 \cdot 10^{-3} A) \cdot 0,004 + 0,0003 = 0,3 \cdot 10^{-3} A \quad (E5.62)$$

$$(E5.63)$$

3.6 Diskussion der Ergebnisse

3.6.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Kenngößen: elektrochemische Spannungsquelle

$$E_{XC_{Poggendorf}} = 1,250 \pm 5,6 \cdot 10^{-3} V \quad (E5.64)$$

$$E_{XC_{lin. Regression}} = 1,200 \pm 0,011 V \quad (E5.65)$$

$$R_{iC} = 19,90 \pm 2,85 \cdot 10^{-4} \Omega \quad (E5.66)$$

$$I_{KC} = 60,31 \pm 0,234 mA \quad (E5.67)$$

Kenngößen: Solarzelle

$$E_{XS} = 3,850 \pm 0,013 V \quad (E5.68)$$

$$I_{KS1} = 3,5 \cdot 10^{-3} \pm 0,3 \cdot 10^{-3} A \quad (E5.69)$$

$$E_{XS\frac{1}{2}} \approx 3,5 V \quad (E5.70)$$

$$I_{KS\frac{1}{2}} = 1,55 \cdot 10^{-3} \pm 0,3 \cdot 10^{-3} A \quad (E5.71)$$

bei voller Bestrahlung ($H_v = 1$)

$$R_{i_{R_L=30k\Omega}} = 327 \pm 219\Omega \quad (\text{E5.72})$$

$$R_{i_{R_L=1k\Omega}} = 403 \pm 9,5\Omega \quad (\text{E5.73})$$

$$R_{i_{R_L=80\Omega}} = 1,195 \pm 0,008k\Omega \quad (\text{E5.74})$$

$$(\text{E5.75})$$

und bei halber Bestrahlung ($H_v = 0,5$):

$$R_{i_{R_L=80k\Omega}} = 943 \pm 626\Omega \quad (\text{E5.76})$$

$$R_{i_{R_L=2k\Omega}} = 625 \pm 162\Omega \quad (\text{E5.77})$$

$$R_{i_{R_L=150\Omega}} = 2,037 \pm 0,015k\Omega \quad (\text{E5.78})$$

$$(\text{E5.79})$$

Leistungsanpassung: elektrochemische Spannungsquelle

$$P_{max_C} = 18,09 \pm 0,16mW \quad (\text{E5.80})$$

$$R_{P_{max_C}} \approx 21,2\Omega \quad (\text{E5.81})$$

Leistungsanpassung: Solarzelle

$$P_{max_{S1}} \approx 7,5 \cdot 10^{-3}W \quad (\text{E5.82})$$

$$R_{P_{max_S}} \approx 1007\Omega \quad (\text{E5.83})$$

$$P_{max_{S\frac{1}{2}}} \approx 3,5 \cdot 10^{-3}W \quad (\text{E5.84})$$

$$R_{P_{max_{S\frac{1}{2}}}} \approx 2109\Omega \quad (\text{E5.85})$$

$$P_{max_{S\frac{1}{2}}} \approx 3,5 \cdot 10^{-3}W \quad (\text{E5.86})$$

3.6.2 Vergleich von $R_{P_{max}}$ und R_i

elektrochemische Spannungsquelle

Die elektrochemische Spannungsquelle gibt wie in Abschnitt 3.2.7 beschrieben ihre maximale Leistung ab, wenn:

$$R_a = R_i$$

gilt. Im Falle der untersuchten Spannungsquelle:

$$21,2\Omega = R_{P_{max_C}} \approx R_{i_C} = 19,90\Omega$$

Die Differenz der beiden Werte lässt sich auf Messfehler bei der Ermittlung von $R_{P_{max_C}}$ zurückführen. Der Wert wurde aus der Tabelle der Messwerte entnommen oder kann in Abbildung 3.4.4 abgelesen werden. Der Wert für R_{i_C} mit einem Messfehler von $1,4 \cdot 10^{-5}$ als sehr genaue erachtet werden.

Solarzelle

Für die Solarzelle gilt am Arbeitspunkt nicht, dass $R_a = R_i$ ist. Der Zusammenhang gilt nur für lineare (*ohmsche*) Widerstände.

3.6.3 Innenwiderstand einer Solarzelle

Wie in Abbildung 3.6.3 zu sehen, ist der Innenwiderstand einer Solarzelle nicht konstant, sondern ändert sich.

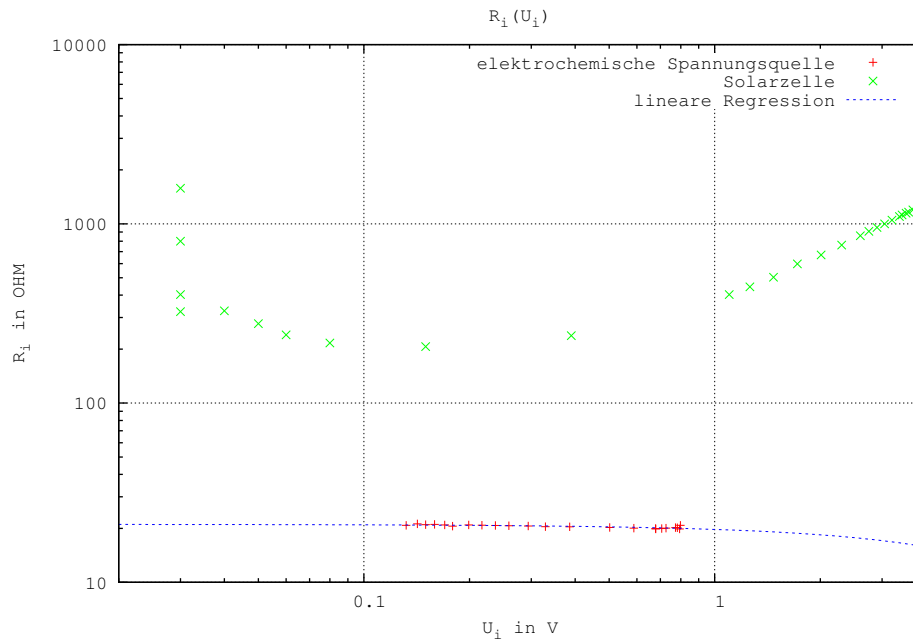


Abbildung E5.11: graphischer Vergleich des Innenwiderstandes einer Solarzelle und einer elektrochemischen Spannungsquelle

Dieses Verhalten der Solarzelle ist auf die Verwendung von Halbleitern zurückzuführen.

Der fließende Strom steigt in einer Halbleiterdiode erst sprunghaft an, nachdem die Schleusenspannung ⁸ überwunden ist. Dieser nicht lineare Zusammenhang hat Auswirkungen auf den Innenwiderstand.

3.6.4 Kompensationsverfahren nach *POGGENDORF*

Nach Verfahren nach *POGGENDORF* ist sehr gut zur genauen Messung von Leerlaufspannungen geeignet.

⁸Spannung, die überwunden werden muss, damit viele Ladungsträger das Gegenfeld der Sperrschicht überwinden können

Die Auswertung der Messfehler ergab bei der Solarzelle einen nur etwa halb so großen Messfehler für den mit *POGGENDORF* ermittelten Wert als für den Wert aus der linearen Regression. Die Ergebnisintervalle überschneiden sich nicht nur, sondern das *POGGENDORF*'sche Intervall ($F_{Poggendorf} = [1, 1994, 1, 2106]$) liegt in dem der linearen Regression:

$$[1, 1994; 1, 2106] \subset [1, 189; 1, 211] \quad (\text{E5.87})$$

Dies zeigt, dass der *wahre* Wert wahrscheinlich nahe an $E_{XC_{Poggendorf}} = 1,250V$ liegt.

3.6.5 mögliche Gründe für Messfehler

Es kann durch eine nicht (zeitlich-) konstante Bestrahlung der Solarzelle zu Schwankungen der Messwerte kommen.

Zudem kann es sowohl bei der Solarzelle als auch bei der elektrochemischen Spannungsquelle zu einer Veränderung des Innenwiderstandes durch Wärme kommen. Eine zügige Messung ist zu empfehlen.

Vor allem sind aber die nur am Graphen abgelesenen Werte mit großen Messfehlern behaftet. Dieses kann nur -vor allem beim Ablesen der maximalen Leistung- durch die Aufnahme von mehr Messwerten an den markanten Punkten verhindert werden. Leider sind die Punkte nicht im Voraus zu berechnen, was eine erste grobe Auswertung der Messdaten (*an Ort und Stelle*) sinnvoll erscheinen lässt. So können dann an den markanten Punkten entsprechend viele Messdaten aufgenommen werden.

4 W8 Adiabatexponen

4.1 Aufgabenstellung

Die Adiabatexponenten κ von Luft und CO_2 sind nach der Methode von Clement und Desormes und nach der Methode von Rüchardt zu bestimmen.

1. a) Die zeitliche Änderung des Luftdrucks im Behälter während des Temperaturausgleichs nach Druckerhöhung und nach der Entspannung ist zu registrieren und graphisch darzustellen, die in den Aufgaben 1.b und 1.c erforderliche Wartezeit bis zur Druckablesung ist zu ermitteln.
- b) Zur Bestimmung des Adiabatexponenten κ von Luft nach Clement und Desormes sind mindestens 10 Messungen mit unterschiedlichen Anfangsdrücken p_1 durchzuführen, Standardabweichung, Mittelwert von κ und dessen Vertrauensbereich sind zu berechnen.
- c) Der Adiabatexponent κ von CO_2 ist nach Clement und Desormes aus mindestens 10 Messungen analog 1.b zu bestimmen.
- d) Der Adiabatexponent κ von Luft ist nach der Methode von Rüchardt durch mehrfache Messung der Periodendauer T der Schwingung einer Stahlkugel auf einem Luftpolster zu bestimmen und mit dem Ergebnis von 1.b zu vergleichen.
- e) Aus den experimentell bestimmten Werten von κ sind die molaren und die spezifischen Wärmekapazitäten der untersuchten Gase zu berechnen.

4.2 Grundlagen zum Versuch

4.2.1 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik sagt, dass die innere Energie dU ($[dU] = J$) eines isolierten Systems die Summe aus der Volumenarbeit dW ($[dW] = J$) und der abgegebenen Wärme dQ ($[dQ] = J$) ist.

$$dU = dW + dQ \quad (\text{W8.1})$$

4.2.2 ideales Gas

Für die Erklärung von physikalischen und chemischen Phänomenen wird eine Modellvorstellung von realen Gasen genutzt.

Bei einem idealen Gas werden nur Stöße von Molekülen untereinander und mit den Wänden als Erklärung für Phänomene herangezogen. Dieses Modell ist zwar sehr grob, doch lassen sich damit viele Phänomene erklären.

4.2.3 ideale Gasgleichung

Die ideale Gasgleichung setzt die Zustandsgrößen eines idealen Gases in einen Zusammenhang:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (\text{W8.2})$$

p Druck des idealen Gases $[p] = \text{bar}$

V Volumen des idealen Gases $[V] = \text{m}^3$

R universelle Gaskonstante $R = 8,3144621 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

T absolute Temperatur des idealen Gases $[T] = \text{K}$

4.2.4 Zustandsänderung von Gasen

Ein Gas besitzt wie in Unterabschnitt 4.2.3 beschrieben verschiedene Zustandsgrößen. Bei einer Änderung des Zustandes eines Gases bleiben einige Zustandsgrößen gleich.

adiabatisch es findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt ($dQ = 0$)

isotherm die Temperatur des idealen Gases ist konstant ($\Delta T = 0$)

isochor die Volumenänderung ist Null ($\Delta V = 0$)

isobar der Druck des idealen Gases ist konstant ($\Delta p = 0$)

4.2.5 Adiabatenexponent

Der Adiabatenexponent κ gibt das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p und konstantem Volumen c_V wieder.

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} \quad (\text{W8.3})$$

4.2.6 spezifische Wärmekapazität

Die Wärmekapazität C eines Stoffes ist ein Maß für die Eigenschaft der Speicherung von Wärme als Energie.

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (\text{W8.4})$$

C gibt dabei die Wärmemenge an, die aufgenommen werden muss, damit sich der Stoff um ein Kelvin erwärmt.

Die spezifische Wärmekapazität c bezieht sich auf eine Stoffeinheit und besitzt damit eine Einheit $[c] = \frac{J}{kg \cdot K} = \frac{J}{mol \cdot K}$. Für Gase gilt weiterhin:

$$R = c_V + c_p \quad (W8.5)$$

$$R_{spez} = c_{Vm} + c_{pm} \quad (W8.6)$$

Dabei ist R_{spez} die spezifische oder individuelle Gaskonstante. Für die Gaskonstanten gilt:

$$R = M \cdot R_{spez} \quad (W8.7)$$

wobei M die molare Masse des Gases ist.

Berechnung aus κ

Aus Gleichung W8.6, Gleichung W8.5 und der Beziehung Gleichung W8.7 geht hervor, dass:

$$c_{pm} = c_p \cdot M \quad (W8.8)$$

$$c_{Vm} = c_V \cdot M \quad (W8.9)$$

Daraus folgt für die spezifischen und molaren Wärmekapazitäten:

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{M(\kappa - 1)} \quad (W8.10)$$

$$c_V = \frac{R}{M(\kappa - 1)} \quad (W8.11)$$

$$c_{pm} = \frac{\kappa \cdot R}{(\kappa - 1)} \quad (W8.12)$$

$$c_{Vm} = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (W8.13)$$

4.2.7 Herleitung der Gleichung nach *POISSON*

Die *POISSON*-Gleichung gibt die Beziehung zwischen dem Druck, dem Volumen und dem Adiabatenexponenten wieder.

Für eine isochore Zustandsänderung gilt:

$$v = const. \quad (W8.14)$$

$$\Delta W = 0 \quad (W8.15)$$

Nach Gleichung W8.4 und Gleichung W8.1 ist damit:

$$dU = dQ \quad (W8.16)$$

$$c_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} \quad (W8.17)$$

$$\implies c_V \cdot dT = dU \quad (W8.18)$$

Bei einer adiabatischen Zustandsänderung:

$$dQ = 0 \quad (\text{W8.19})$$

$$(\text{W8.20})$$

gilt für Gleichung W8.1:

$$dU = dW = -pdV \quad (\text{W8.21})$$

In einem isolierten System ändert sich die innere Energie dU nicht, so dass:

$$-p \cdot dV = dU = c_v \cdot dT \quad (\text{W8.22})$$

Der Druck p kann über Gleichung W8.2 mit $n = 1$ (bezogen auf 1 *mol*) ausgedrückt werden als:

$$-\frac{RT}{V} \cdot dV = c_v \cdot dT \quad (\text{W8.23})$$

Durch Trennung der Veränderlichen erhält man:

$$-R \cdot T \frac{dV}{V} = c_v \cdot dT \quad (\text{W8.24})$$

$$-R \frac{dV}{V} = c_v \cdot \frac{dT}{T} \quad (\text{W8.25})$$

Integration auf beiden Seiten ergibt:

$$c_v \cdot \ln(T) = -R \cdot \ln(V) + a, \text{ mit } a = \text{const.} \quad (\text{W8.26})$$

$$a = c_v \cdot \ln(T) + R \cdot \ln(V) \quad (\text{W8.27})$$

$$= \ln(T^{c_v}) + \ln(V^R) \quad (\text{W8.28})$$

$$= \ln(T^{c_v} \cdot V^R) \quad (\text{W8.29})$$

$$\implies T^{c_v} \cdot V^R = \text{const.} \quad (\text{W8.30})$$

Durch Einsetzen von Gleichung W8.5 und Einsetzen von Gleichung W8.3 bzw. des Reziproken erhält man eine *POISSON*-Gleichung.

$$T^{c_v} \cdot V^R = T^{c_v} \cdot V^{c_p - c_v} = \text{const.} \quad (\text{W8.31})$$

$$= TV^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} \quad (\text{W8.32})$$

$$= TV^{\frac{c_p}{c_v} (1 - \frac{c_v}{c_p})} \quad (\text{W8.33})$$

$$= TV^{\kappa(1 - \frac{1}{\kappa})} \quad (\text{W8.34})$$

$$= TV^{\kappa - 1} = \text{const.} \quad (\text{W8.35})$$

Wird dies in Gleichung W8.2 eingesetzt so ergibt sich eine weitere *POISSON*-Gleichung:

$$const = \frac{pV}{R} \cdot V^{\kappa-1} \quad (\text{W8.36})$$

$$= \frac{pV \cdot V^{\kappa-1}}{R} \quad (\text{W8.37})$$

$$= \frac{p \cdot V^{\kappa}}{R} \quad (\text{W8.38})$$

$$\Longleftrightarrow p \cdot V^{\kappa} = const. \quad (\text{W8.39})$$

Zusammenfassung

$$p \cdot V^{\kappa} = const. \quad (\text{W8.40})$$

$$TV^{\kappa-1} = const. \quad (\text{W8.41})$$

$$T^{\kappa} \cdot p^{1-\kappa} = const. \quad (\text{W8.42})$$

4.2.8 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach *CLEMENT und DESORMES*

Ein mit einem Gas gefüllter Körper (Druckgefäß) ist mit einem Druckball und einem Manometer verbunden.

Der Gasdruck im Körper wird durch den Druckball erhöht [Zustand 1]. Nach Anpassung der Temperatur mit der Umgebung, wird ein Druckausgleich mit der Umgebung durchgeführt [Zustand 2].

Es folgt eine isochore Erwärmung [Zustand 3].

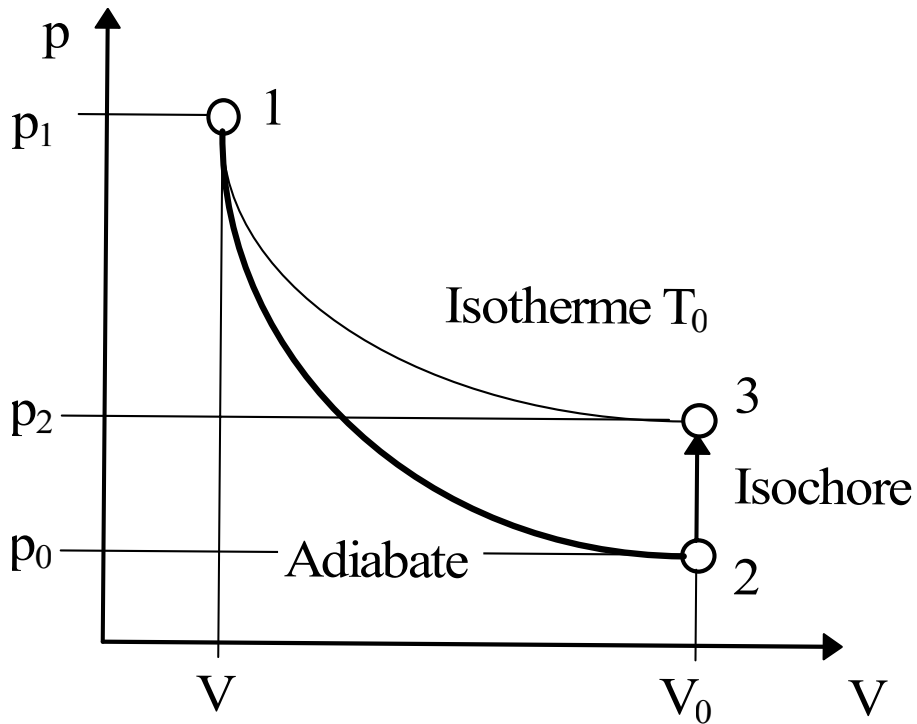


Abbildung W8.1: Darstellung der Zustände des Gases in einem $p - v$ -Diagramm [2]

Die Zustandsänderung von Zustand 1 zu Zustand 2 ist adiabatisch. Die Luft leistet gegen den äußeren Luftdruck Volumenarbeit dW , dabei sinkt die innere Energie dU und damit auch die Temperatur. Tabelle W8.1 gibt Aufschluss über die Zustandsgrößen an den einzelnen Zuständen:

Tabelle W8.1: Zustandsgrößen während des Versuches

Zustand	Druck	Temperatur	Volumen
1	p_1	T_0	V
2	$p_1 - \Delta p_A = p_0$	T_1	V_0
3	$p_0 + \Delta p_I = p_2$	T_0	V_0

Dabei ist T_0 die Umgebungstemperatur und p_0 der Atmosphärendruck. Für die adiabatische Zustandsänderung gilt nach dem Gesetz von *POISSON* Gleichung W8.42

$$T_0 \cdot p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T \cdot p_0^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \quad (\text{W8.43})$$

Für die isochore Zustandsänderung gilt hingegen ein konstantes Volumen und nach Gleichung W8.43

chung W8.2 bezogen auf 1 mol $n = 1$:

$$\frac{p_0}{T} = \frac{p_2}{T_0} \quad (\text{W8.44})$$

Durch Umstellen von Gleichung W8.43 und Einsetzen von Gleichung W8.44 erhält man:

$$p_2 = p_0 + \Delta p_I \quad (\text{W8.45})$$

$$p_1 = p_0 + \Delta p_A \quad (\text{W8.46})$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\Delta p_A}{p_0}\right)^\kappa = \left(1 + \frac{\Delta p_I}{p_0}\right)^{\kappa-1} \quad (\text{W8.47})$$

Reihenentwicklung ergibt:

$$\kappa = \frac{\Delta p_A}{\Delta p_A - \Delta p_I} \quad (\text{W8.48})$$

Δp_A ist dabei die Druckveränderung der adiabtischen und Δp_I der isochoren Zustandsänderung.

Herleitung nach [2]

4.2.9 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach RÜCHARDT

In ein Gefäß mit einem Ventil des Volumens V wird ein Gas mit dem Druck p gelassen. Ein Präzisionsglasrohr mit dem Durchmessers d , der Querschnittsfläche A und der Höhe h mündet am unteren Ende in dem Gefäß. Im Glasrohr befindet sich eine Metallkugel der Masse m , die sich reibungsfrei im Glasrohr rauf und runter bewegen kann, aber sie kann die Glasröhre nicht verlassen. Dem Gas ist es nicht möglich zwischen Kugel und Glaswand hindurch zuströmen. Die Glasröhre hat oberhalb der höchst möglichen Auslenkung der Kugel ein Loch, so dass die Luft oberhalb der Kugel ohne Probleme entweichen kann.

Durchführung

Das Ventil wird geöffnet und die Kugel maximal ausgelenkt. Nach dem Schließen des Ventils wird die Kugel fallengelassen und führt nun eine Schwingung aus. Die Periodendauer T der Schwingung wird gemessen.

Bestimmung von κ

Auf die Kugel wirken zwei entgegengesetzte Kräfte. Die Gewichtskraft g und der Umgebungsdruck p_U von oben und der Druck des Gases von unten.

$$mg + p_U \cdot A = p \cdot A \quad (\text{W8.49})$$

Schwingt die Kugel um Δx aus der Ruhelage aus, so verändert sich der Druck um $\Delta p = dp$. Nach Gleichung W8.39 und mit $dV = A \cdot \Delta x$ kann dp bestimmt werden:

$$d(pV^\kappa) = dp \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa V^{\kappa-1} \cdot dV = 0 \quad (\text{W8.50})$$

$$V^\kappa dp = -\kappa V^{\kappa-1} \cdot dV \cdot p \quad (\text{W8.51})$$

$$dp = -\kappa p \frac{dV}{V} = -\kappa p \frac{A \cdot \Delta x}{V} \quad (\text{W8.52})$$

Die wirkende Kraft F auf die Kugel ist:

$$F = A \cdot \Delta p = -A \cdot \kappa p \frac{A \cdot \Delta x}{V} = -\frac{\kappa \cdot p \cdot A^2}{V} \cdot x = -ks \quad (\text{W8.53})$$

Der Zusammenhang entspricht Gleichung M11.1 dem Gesetz von *Hook*. Damit gilt nach der allgemeinen Schwingungsgleichung Gleichung M11.7 für T :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{W8.54})$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa \cdot p \cdot A^2}{m \cdot V} x = 0 \quad (\text{W8.55})$$

Für DGL der Form $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x$ gilt:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\kappa \cdot p \cdot A^2}{m \cdot V} \quad (\text{W8.56})$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m \cdot V}{p} = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot V}{T^2 \cdot A^2 \cdot p} \quad (\text{W8.57})$$

4.2.10 erwartete Messergebnisse

Die Literaturwerte für die Adiabatenexponenten und Wärmekapazitäten lauten [1, S. 102]:

$$\kappa_{Luft} = 1,402 \quad (\text{W8.58})$$

$$\kappa_{CO_2} = 1,29 \quad (\text{W8.59})$$

$$c_{pLuft} = 1010 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (\text{W8.60})$$

$$c_{VLuft} = 720 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (\text{W8.61})$$

$$c_{pCO_2} = 850 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (\text{W8.62})$$

$$c_{VCO_2} = 650 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (\text{W8.63})$$

$$(\text{W8.64})$$

4.3 Versuchsaufbau

4.3.1 Messmethode nach *CLEMENT und DESORMES*

Das Druckgefäß wird wie in Unterunterabschnitt 4.2.8 mit Gas gefüllt und dieses wieder expandiert. Dabei ist darauf zu achten, dass sich keine Wärmequelle in der Nähe des Druckgefäßes befindet.

4.3.2 Messmethode nach *RÜCHARDT*

Die Metallkugel wird mittels eines Magneten ausgelenkt und die Dauer einer Periode gestoppt. Dabei sollt immer die Periode vom ersten Minimum zum zweiten Minimum gemessen werden, wie Abschnitt 4.4.3 zeigt.

Der Außendruck ist während der Messung mehrmals zu kontrollieren und eventuelle Abweichungen sind zu notieren.

4.3.3 Messfehler

Die verwendeten Messgeräte sind mit Messfehlern behaftet.

Das Digital-Taschenbarometer *GPB1300* unterliegt einem Messfehler von:

$$\Delta p = 4 \text{ mbar} \quad (\text{W8.65})$$

Das Volumen der Körpers zur Bestimmung des Adiabatenexponenten nach *CLEMENT und DESORMES* ist mit einem Messfehler von

$$\Delta V = 0,02 L \quad (\text{W8.66})$$

behaftet. Das Massestück und der Durchmesser des Präzisionsglasrohres haben folgenden Messfehler:

$$\Delta d = 0,01 \text{ mm} \quad (\text{W8.67})$$

$$\Delta m = 0,001 \text{ g} \quad (\text{W8.68})$$

4.4 Messergebnisse

4.4.1 Bestimmung der Dauer des Druckausgleichs

Für die nachfolgende Bestimmung des Adiabatenexponenten κ nach *CLEMENT und DESORMES* wurde die Dauer des Temperatúrausgleichs zwischen der Gastemperatur und der Umgebungstemperatur bestimmt. Dazu wurde die Druckänderung des Gases gemessen. Ist keine oder nur eine sehr geringe Änderung messbar, so ist die Temperatur nach Gleichung W8.2 ebenfalls konstant.

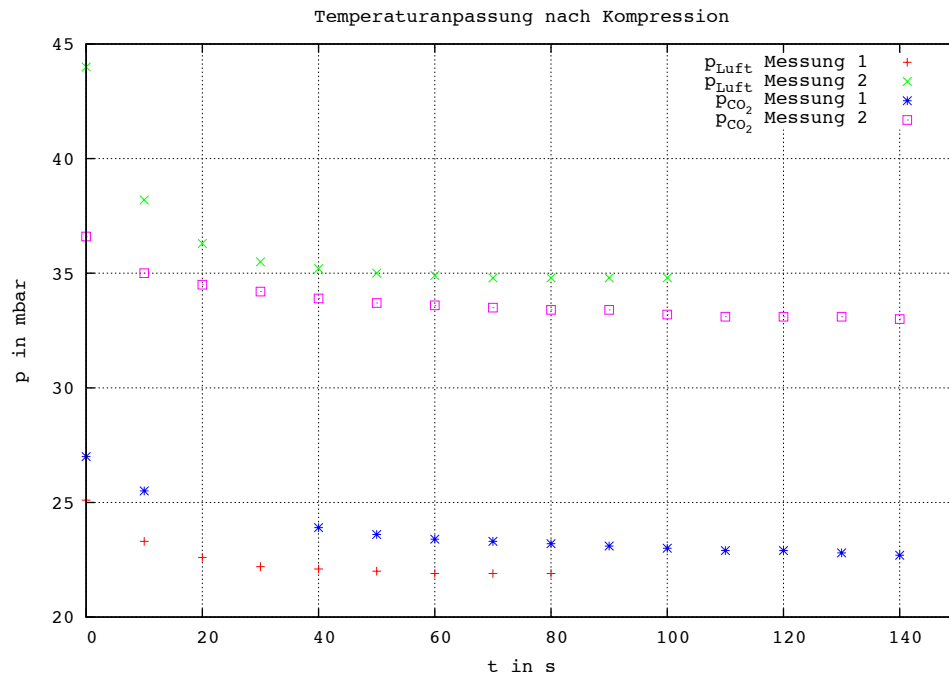


Abbildung W8.2: Darstellung der Änderung des Gasdruckes nach der Kompression

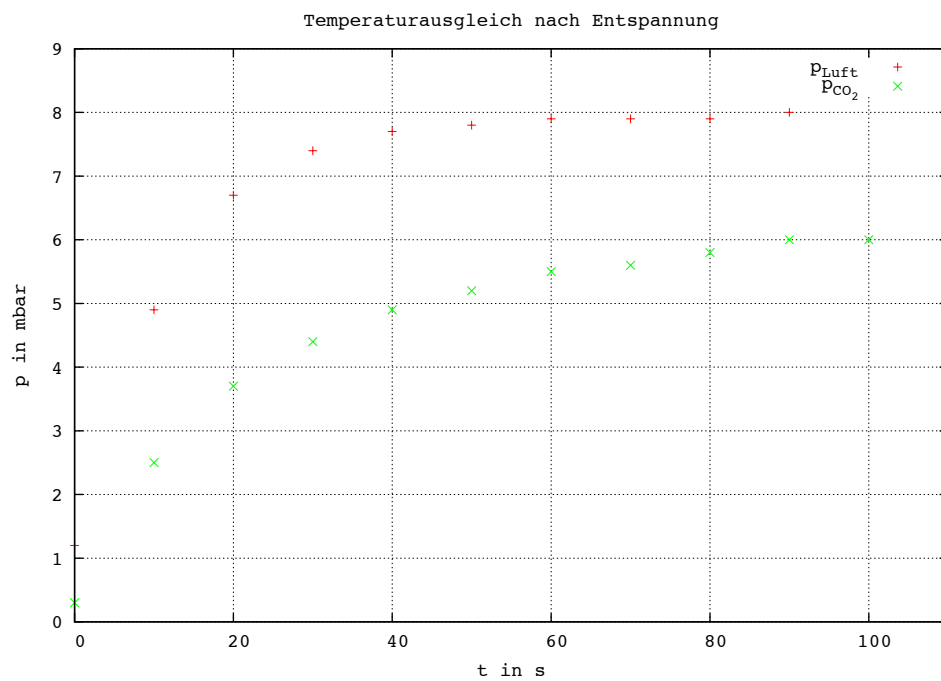


Abbildung W8.3: Darstellung der Änderung des Gasdruckes nach der Expansion

Es wurden folgende Wartezeiten für den Temperatúrausgleich ermittelt:

Tabelle W8.2: Wartezeiten für Temperatúrausgleich

Gas	Kompression	Expansion
CO_2	100	100
Luft	90	80

Alle Angaben in Tabelle W8.2 in s.

4.4.2 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach *CLEMENT und DESORMES*

Es wurden folgende Messwerte im Versuch ermittelt:

Tabelle W8.3: Messung von Δp_A und Δp_2 bei Luft

Δp_A in mbar	Δp_2 in mbar	κ
22,1	5,3	1,32
18,0	4,3	1,31
14,7	3,5	1,31
12,5	3,0	1,32
12,8	3,1	1,32
14,2	3,3	1,30
18,1	4,4	1,32
25,3	5,9	1,30
21,1	5,0	1,31
24,8	5,8	1,31

Tabelle W8.4: Messung von Δp_A und Δp_2 bei CO_2

Δp_A in mbar	Δp_2 in mbar	κ
33,0	6,2	1,23
26,7	5,2	1,24
20,6	3,9	1,23
22,8	4,4	1,24
21,9	4,5	1,26
22,3	4,3	1,24
19,4	3,8	1,24
19,3	3,8	1,25
14,7	2,8	1,24
30,7	5,9	1,24

4.4.3 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach RÜCHARDT

Vorbemerkung zur Messung der Periodendauer T

Vor Beginn der Messung ist zu klären, wie die Periodendauer der Schwingung gemessen wird. Dabei gibt es drei unterschiedliche Methode:

1. Messung einer einzelnen Schwingung, wobei als Startpunkt der Zeitmessung die höchste Auslenkung am Anfang dient (START-Kugel fällt runter-Kugel schwingt hoch-STOP-Kugel fällt)
2. Messung einer einzelnen Schwingung, wobei als Startpunkt das erste Minimum dient. (Kugel fällt runter-START-Kugel schwingt hoch-Kugel fällt wieder herunter-STOP)
3. es werden $n = 3$ Perioden gemessen und die Periodendauer ermittelt

Auch ohne eine Zeitmessung ist erkennbar, dass es sich trotz einer anderen Annahme in Abschnitt 4.2.9 nicht um eine harmonische Schwingung handelt. Die Schwingung scheint großen Reibungskräften zu unterliegen, so dass sich die Amplitude der Schwingung nach einer Periode schon stark verringert hat.

Damit scheint Punkt 3 keine geeignete Methode zur Bestimmung eines möglichst exakten Wertes für T zu sein.

Es muss also geklärt werden, ob Punkt 1 oder Punkt 2 ein genaueres κ liefert. Bei der Durchführung des Vorversuches wird klar, dass eine Messung nach Punkt 2 einfacher mit einer Handstoppuhr realisiert werden kann, da Anfangs- und Endpunkt genauer bestimmt werden können. Dies liegt vor allem daran, dass die Kugel nicht immer am gleichen Ort *die Kraft des Magneten überwindet*.

Tabelle W8.5: Bestimmung von T zur Bestimmung der bestmöglichen Messmethode

Methode Nr.	T in s	\bar{T}	κ
1	0,51	0,50	3,8
	0,50		
	0,48		
2	0,81	0,76	1,6
	0,79		
	0,65		
	0,78		
3	1,6	0,54	3,2
	1,58		
	1,70		

Der Wert für κ nach Methode 2 liegt am nächsten am erwarteten Wert. Die Vermutung ist damit bestätigt und zur Messung der Periodendauer wird Punkt 2 verwendet.

Aufnahme der Messwerte

Für die Messungen gelten folgende Werte:

$$p_A = 9,95 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \quad (\text{W8.69})$$

$$V_{Körper} = 5,58 m^3 \quad (\text{W8.70})$$

$$r_{Glasrohr} = 8,00 \cdot 10^{-3} m \quad (\text{W8.71})$$

$$m_{Kugel} = 1,6504 \cdot 10^{-2} kg \quad (\text{W8.72})$$

$$A_{Glasrohr} = 2,011 \cdot 10^{-4} m^2 \quad (\text{W8.73})$$

Es konnten folgende Wert aufgenommen werden:

Tabelle W8.6: Messung von κ nach *RÜCHARDT*

Nr.	T in s	κ
1	0,81	1,38
2	0,85	1,25
3	0,81	1,38
4	0,82	1,34
5	0,76	1,56
6	0,77	1,52
7	0,88	1,17
8	0,77	1,52
9	0,83	1,31
10	0,9	1,12
11	0,88	1,17
12	0,67	2,01
13	0,85	1,25

Messwert 12 der Tabelle W8.6 wird in der weiteren Auswertung nicht beachtet, da es sich durch die große Abweichung zu den anderen Messwerten wahrscheinlich um einen groben Messfehler handelt.

4.4.4 Bestimmung der molaren und spezifischen Wärmekapazitäten

Die molaren Massen M für Kohlenstoffdioxid und Luft betragen:

$$M_{CO_2} = 44,01 \frac{g}{mol}$$

$$M_{Luft} = 28,96 \frac{g}{mol}$$

Durch Gleichung W8.10, Gleichung W8.11, Gleichung W8.12, Gleichung W8.13 und die berechneten Mittelwerte für κ ergeben sich folgende Werte:

$$c_{pLuftCD} = 794,2 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.74)$$

$$c_{VLuftCD} = 605,3 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.75)$$

$$c_{pmLuftCD} = 35,0 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.76)$$

$$c_{VMLuftCD} = 26,6 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.77)$$

$$c_{pCO_2CD} = 974,4 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.78)$$

$$c_{VCO_2CD} = 785,4 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.79)$$

$$c_{pmCO_2CD} = 42,9 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.80)$$

$$c_{VmCO_2CD} = 34,6 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.81)$$

$$c_{pLuftR} = 758,9 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.82)$$

$$c_{VLuftR} = 570,0 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (W8.83)$$

$$c_{pmLuftR} = 33,4 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.84)$$

$$c_{VmLuftR} = 25,1 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (W8.85)$$

4.5 Messfehler

4.5.1 Methode von *CLEMENT und DESORMES*

Für die Fehlerrechnung gilt:

$$n = 10 \quad (W8.86)$$

$$t = 3,957 \quad (W8.87)$$

$$P = 99,73\% \hat{=} 3\sigma \quad (W8.88)$$

Messung von Luft

Nach Gleichung 1.5 ist das arithmetische Mittel:

$$\bar{\kappa}_{LuftCD} = 1,31 \quad (W8.89)$$

Die Standardabweichung beträgt nach Gleichung 1.6:

$$\sigma_{LuftCD} = 6,05 \cdot 10^{-3} \quad (W8.90)$$

Die Streubreite des Mittelwertes ist nach Gleichung 1.7:

$$\Delta \bar{\kappa}_{Luft_{CD}} = 7,58 \cdot 10^{-3} \quad (\text{W8.91})$$

Messung von CO_2

Nach Gleichung 1.5 ist:

$$\bar{\kappa}_{CO_2} = 1,24 \quad (\text{W8.92})$$

Die Standardabweichung beträgt nach Gleichung 1.6:

$$\sigma_{CO_2} = 7,30 \cdot 10^{-3} \quad (\text{W8.93})$$

Die Streubreite des Mittelwertes ist nach Gleichung 1.7:

$$\Delta \bar{\kappa}_{CO_2} = 9,13 \cdot 10^{-3} \quad (\text{W8.94})$$

4.5.2 Methode von RÜCHHARDT

Messung der Periodendauer

Für die Fehlerrechnung gilt:

$$n = 12 \quad (\text{W8.95})$$

$$t = 3,957 \quad (\text{W8.96})$$

$$P = 99,73\% \cong 3\sigma \quad (\text{W8.97})$$

Nach Gleichung 1.5 ist:

$$\bar{T} = 0,83s \quad (\text{W8.98})$$

Die Standardabweichung beträgt nach Gleichung 1.6:

$$\sigma_T = 0,04s \quad (\text{W8.99})$$

Die Streubreite des Mittelwertes ist nach Gleichung 1.7:

$$\Delta \bar{T} = 0,05s \quad (\text{W8.100})$$

Fläche des Präzisionsglasrohres

Der Messfehler der Fläche des Präzisionsglasrohres beträgt:

$$\Delta A = \left(2 \cdot \frac{\Delta d}{d} \right) \cdot A \quad (\text{W8.101})$$

$$= \left(2 \cdot \frac{0,01mm}{16mm} \right) \cdot 201,1mm^2 \quad (\text{W8.102})$$

$$= 0,251mm^2 \quad (\text{W8.103})$$

Messfehler für κ

Der Messfehler für die Bestimmung von κ berechnet sich nach der linearen Fehlerfortpflanzung wie folgt:

$$\Delta\kappa_R = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} + 2 \cdot \frac{\Delta \bar{T}}{\bar{T}} + 2 \cdot \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta p}{p} \right) \cdot \kappa \quad (\text{W8.104})$$

$$= \left(\frac{0,001g}{16,504g} + \frac{0,2L}{5,58L} + 2 \cdot \frac{0,05s}{0,83s} + 2 \cdot \frac{0,251mm^2}{201,1mm^2} + \frac{4mbar}{995mbar} \right) \cdot 1,33 \quad (\text{W8.105})$$

$$= 0,22 \quad (\text{W8.106})$$

4.5.3 Bestimmung der Wärmekapazitäten

Aus Gleichung W8.10 bis Gleichung W8.13 und der Annahme von einem nicht fehlerbehafteten M und R geht hervor, dass:

$$\Delta c_i = \frac{\sigma \kappa_i}{\kappa_i} \cdot c_i \quad (\text{W8.107})$$

gelten muss.

Für $c_{pLuftCD}$ ergibt sich damit:

$$\Delta c_{pLuftCD} = \frac{\sigma_{LuftCD}}{\kappa_{LuftCD}} \cdot c_{pLuftCD} \quad (\text{W8.108})$$

$$= \frac{6,05 \cdot 10^{-3}}{1,31} \cdot 794,2 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (\text{W8.109})$$

$$= 4,62 \cdot 10^{-3} \cdot 794,2 \frac{J}{K \cdot kg} = 3,7 \frac{J}{K \cdot kg} \quad (\text{W8.110})$$

Die Berechnung der Messabweichungen der weiteren Wärmekapazitäten erfolgt analog und wird im Protokoll nicht explizit berechnet, sondern nur in Tabelle W8.7 angegeben.

4.6 Diskussion der Ergebnisse

4.6.1 Zusammenfassung der Messergebnisse

4.6.2 Abweichungen von Literaturwerten

Die folgende Tabelle gibt die pozentualen Abweichungen der ermittelten Größen von den Literaturwerten aus [1, S. 102] an.

Tabelle W8.7: prozentuale Abweichung von ermittelten Wert und Literaturwert

Größe	ermittelter Wert	Literaturwert	Abweichung in %
κ_{LuftCD}	$1,31 \pm 0,01$	1,402	9,1
κ_{CO_2CD}	$1,24 \pm 0,01$	1,29	4,0
κ_{LuftR}	$1,33 \pm 0,22$	1,402	5,4
$c_{pLuftCD}$	$794,2 \pm 3,7 \frac{J}{K \cdot kg}$	$1010 \frac{J}{K \cdot kg}$	27,2
$c_{VLuftCD}$	$605,3 \pm 2,8 \frac{J}{K \cdot kg}$	$720 \frac{J}{K \cdot kg}$	18,9
$c_{pmLuftCD}$	$35,0 \pm 0,2 \frac{J}{K \cdot mol}$	$29,3 \frac{J}{K \cdot mol}$	19,5
$c_{VMLuftCD}$	$26,6 \pm 0,1 \frac{J}{K \cdot mol}$	$20,9 \frac{J}{K \cdot mol}$	27,3
c_{pCO_2CD}	$974,4 \pm 6,0 \frac{J}{K \cdot kg}$	$850 \frac{J}{K \cdot kg}$	12,8
c_{VCO_2CD}	$785,4 \pm 4,8 \frac{J}{K \cdot kg}$	$650 \frac{J}{K \cdot kg}$	20,8
c_{pmCO_2CD}	$42,9 \pm 0,3 \frac{J}{K \cdot mol}$	$37,4 \frac{J}{K \cdot mol}$	14,7
c_{VMCO_2CD}	$34,6 \pm 0,2 \frac{J}{K \cdot mol}$	$28,6 \frac{J}{K \cdot mol}$	20,1
c_{pLuftR}	$758,9 \pm 125,5 \frac{J}{K \cdot kg}$	$1010 \frac{J}{K \cdot kg}$	33,1
c_{VLuftR}	$570,0 \pm 94,3 \frac{J}{K \cdot kg}$	$720 \frac{J}{K \cdot kg}$	26,3
$c_{pmLuftR}$	$33,4 \pm 5,5 \frac{J}{K \cdot mol}$	$29,3 \frac{J}{K \cdot mol}$	14,0
$c_{VMLuftR}$	$25,1 \pm 4,2 \frac{J}{K \cdot mol}$	$20,9 \frac{J}{K \cdot mol}$	16,7

4.6.3 Vergleich der verwendeten Methoden

Die beiden ermittelten Werte für den Adiabatenexponenten von Luft liegen mit $\kappa_{LuftCD} = 1,31 \pm 0,01$ und $\kappa_{LuftR} = 1,33 \pm 0,22$ in der gleichen Größenordnung. Jedoch ist die Abweichung beim Messverfahren von *CLEMENT* und *DESORMES* genauer. Für eine möglichst genaue Bestimmung sollte dieses Verfahren verwendet werden.

4.6.4 Gründe für Messfehler

Für die teilweise großen Abweichungen (orange Zeilen in Tabelle W8.7) zu Literaturwerten von bis zu $\frac{1}{3}$ gibt es verschiedene Gründe. Es scheint trotzdem zu keinen groben Messabweichungen gekommen zu sein, da die Größenordnung aller Messwerte stimmt.

ungewollte Erwärmung des Druckgefäßes

Zwar wurde darauf geachtet, dass sich keine Wärmequelle in der Nähe des Druckgefäßes insbesondere weder Hände noch Arme befindet, doch kann auch dieser Fehler nicht komplett ausgeschlossen werden, da in der Nähe des Druckgefäßes gearbeitet wurde und damit auch ein *versehentliches Annähern* an das Druckgefäß nicht ausgeschlossen werden kann.

Dichtigkeit der verwendeten Apparaturen

Vor allem Abbildung 4.4.1 lässt vermuten, dass die für die Messung des Adiabatenexponenten von CO_2 verwendeten Dichtungen und Schläuche nicht vollkommen dicht waren. Trotz langen Warten, stellt sich kein konstanter Druck ein. Der auftretende Druckabfall ist jedoch so gering, dass die dadurch entstehenden Messfehler als vernachlässigbar gelten können.

Messung der Periodendauer

Wie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben ist es sehr schwer einen genauen Wert für die Periodendauer zu bestimmen. Zwar wurde eine Versuchsreihe aufgenommen, um die optimale Messmethode zu bestimmen, doch zeigt die Durchführung des Versuches, dass auch so grobe Messfehler nicht auszuschließen sind (vgl. Tabelle W8.6).

Während der Durchführung des Versuches und der Messung von T ist aufgefallen, dass durch die Reaktionszeit bedingt eine genaue Messung nicht möglich ist. Dies ist eine mögliche Erklärung für die aufgetretenen Messfehler. Zudem geht die Periodendauer nach Gleichung W8.57 quadratisch ein, so wirken sich auch kleine Messfehler stark aus. Der Einsatz einer Lichtschranke zur genauen Bestimmung der Periodendauer könnte genauere Messwerte liefern.

Annahme einer harmonischen Schwingung

In der Herleitung der Formel zur Bestimmung von κ über T wird durch die Verwendung der allgemeinen Schwingungsgleichung Gleichung M11.7 und dem Gesetz von *Hook* Gleichung M11.1 angenommen, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt.

Für eine harmonische Schwingung gilt im besonderen eine konstante Periodendauer und Amplitude. Beide Bedingungen sind während des Versuches eindeutig nicht erfüllt. Die Periodendauer ist nicht konstant, da in diesem Fall gelten müsste:

$$\frac{n \cdot T}{n} = T, n \in \mathbb{N} \quad (\text{W8.111})$$

Nach Tabelle W8.6 Methode 3 im Vergleich zu Methode 2 ist dies nicht der Fall.

Außerdem war während der Durchführung zu erkennen, dass die Amplitude immer kleiner wurde und die Kugel nach circa 5 Schwingungen eine deutlich kleinere Amplitude besaß, als am Anfang.

Die Annahme einer harmonischen Schwingung ist zwar legitim, doch gibt sie im Versuch nur eine gute Näherung für den Adiabatenexponenten ab. Die hauptsächlich durch Reibung verursachten Verluste können auch sehr schlecht minimiert werden, somit kann eine genauere Messung durch die Methode von *RÜCHHARDT* nicht mit den zur Verfügung gestellten Mitteln erreicht werden.

5 O10 Newtonsche Ringe

5.1 Aufgabenstellung

1. a) Durch Interferenz des Lichtes einer Natriumdampflampe ($\lambda = 589nm$) an der Luftschicht zwischen einer sphärischen Linsenfläche und einer Planglasplatte werden Newtonsche Ringe erzeugt. Die Durchmesser von mindestens 10 dunklen Ringen der Ordnung $k \geq 2$ sind zu messen.
- b) Das Quadrat des Ringradius r_k^2 ist als Funktion der Interferenzordnung k graphisch darzustellen. Der Krümmungsradius R der Linsenfläche ist durch lineare Regression zu bestimmen.
- c) Auf gleichem Wege sind unter Benutzung des Krümmungsradius R aus 1.b für 2 Farbfilter die Wellenlängen des hindurch tretenden Lichtes zu ermitteln. Die beiden Funktionen $r_k^2 = f(k)$ sind in das Diagramm für Na-Licht nach 1.b einzuzeichnen.
- d) Für Filterlicht sind die höchste nachweisbare Interferenzordnung k_{max} sowie die Dicke der Luftschicht und der Gangunterschied am Orte des Ringes der Ordnung k_{max} zu bestimmen. Daraus sind die Kohärenzlänge Λ und die spektrale Bandbreite $\Delta\lambda$ des Filterlichts abzuschätzen.

5.2 Grundlagen zum Versuch

5.2.1 Licht als Welle

Im gesamten Versuch wird Licht als eine elektromagnetische Welle aufgefasst. Dabei beschreibt das Wort *Licht* nur einen kleinen Teil des gesamten Spektrums der elektromagnetischen Wellen.

Das für den Menschen sichtbare Licht umfasst einen Wellenlängenbereich (Spektrum) von circa $400nm$ bis $700nm$. Durch seine Auffassung als Welle weist das Licht einige Charakteristika auf.

Wellenlänge λ

Als Wellenlänge ($[\lambda] = m$) wird der kürzeste Abstand von zwei Punkten einer Welle mit gleicher Phase verstanden. Die Wellenlänge ist das räumliche Analogon zur Periodendauer.

Phase

Periodische Vorgänge lassen sich häufig gut mit dem sogenannten Zeigermodell darstellen. Dabei rotiert ein Zeiger mit einer gewissen Länge um den Koordinatenursprung. Der

zwischen dem Zeiger und der Abszisse eingeschlossene Winkel wird als Phase bezeichnet. Sind zwei oder mehr Wellen *in Phase* so schließen sie alle den gleichen Winkel ein.

Interferenz

Unter der Interferenz von zwei oder mehr Wellen ist deren Überlagerung zu verstehen. Dabei werden die Amplituden der Wellen aber nicht deren Intensitäten addiert. Es kann nur zur Ausbildung von Interferenzphänomenen kommen, wenn die Wellen kohärent zueinander sind und monochromatisch⁹.

Man unterscheidet hauptsächlich zwei Arten der Interferenz:

konstruktive Interferenz Die Summe der Amplituden der sich überlagernder Wellen wird größer. Man spricht von einer vollständigen konstruktiven Interferenz, wenn sich die Wellen in Phase befinden.

destruktive Interferenz Die Amplituden der sich überlagernden Wellen werden kleiner. Eine vollständige destruktive Interferenz liegt vor, wenn sich die Wellen gegenseitig auslöschen.

Kohärenz

Die Kohärenz bezeichnet die Eigenschaft von Wellen in einer konstanten Phasenbeziehung zueinander zu stehen. Licht wird von einer Quelle ausgesandt. Im Modell wird angenommen, dass die Lichtstrahlen keine endliche Länge besitzen. Im Versuch gilt diese Annahme nicht mehr.

Die Kohärenzzeit τ ($[\tau] = s$) ist die Zeit, die Wellen mit konstanter Phasenbeziehung zurücklegen können. Der in dieser Zeit zurückgelegte Weg wird als Kohärenzlänge Λ ($[\Lambda] = m$) bezeichnet. Licht bewegt sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c , so dass der folgende Zusammenhang nach $s = v \cdot t$ besteht:

$$\Lambda = c \cdot \tau \quad (\text{O10.1})$$

5.2.2 Linsen

Linsen sind optische Bauelemente mit zwei lichtbrechenden Flächen. Dabei ist mindestens eine Fläche konvex¹⁰ oder konkav¹¹ geformt.

Die meisten verwendeten Linsen sind sogenannte sphärische Linsen. Dabei ist mindestens eine der lichtbrechenden Flächen ein Kreisausschnitt.

Krümmungsradius

Durch die sphärische Form der Linsen besitzt diese einen Krümmungsradius R . Vervollständigt man den Kreisausschnitt der Linse und erhält einen vollständigen Kreis so weißt dieser den Krümmungsradius R auf.

⁹Licht bestehend aus nur einer Wellenlänge und keinem Spektrum

¹⁰nach Außen gewölbt

¹¹nach Innen gewölbt

5.2.3 Newtonsche Ringe

Wird eine auf einer Planglasplatte liegende sphärische Linse mit monochromatischem Licht bestrahlt, so sind helle und dunkle Ringe zu erkennen.

Diese als *NEWTONSCHE Ringe* bezeichneten Hell-Dunkel-Zonen lassen sich auf die Interferenz der Lichtwellen zurückführen. Durch den Radius r_k der Ringe lässt sich der Krümmungsradius R der Linse bestimmen.

5.2.4 Bestimmung des Krümmungsradius R einer Linse durch *NEWTONSCHE Ringe*

Im Versuch liegt die Linse auf einer Planglasplatte. Zwar ist der Abstand zwischen Auflagefläche und Linse damit sehr klein, kann jedoch aufgrund der noch deutlich kleineren Wellenlänge des verwendeten sichtbaren Lichtes nicht vernachlässigt werden. Der Abstand zwischen Linse und Planglasplatte wird als Δd bezeichnet.

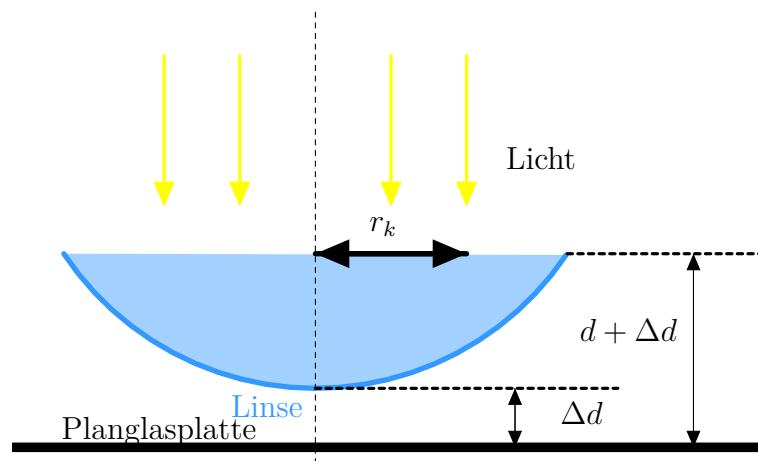


Abbildung O10.1: graphische Darstellung der der Linse auf der Planglasplatte mit einfallendem Licht

Gangunterschiede

An der Stelle des Rings der Ordnung k weist die Linse einen Abstand d_G auf dieser setzt sich aus dem Abstand zum Linsenboden d und dem Abstand von Linse zur Planglasplatte zusammen:

$$d_G = \Delta d + d \quad (\text{O10.2})$$

Das Licht legt an dieser Stelle die Strecke

$$s = \Delta x = 2 \cdot (\Delta d + d) + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{O10.3})$$

zurück.

Die Addition der halben Wellenlänge λ resultiert aus der Reflexion des Lichts an der Planglasplatte.¹²

Aus Gleichung O10.3 resultiert eine Phasenverschiebung von:

$$\sigma = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (\text{O10.4})$$

Je nachdem, ob es sich um einen hellen oder dunklen Ring handelt muss es zu konstruktiven Interferenz oder einer Auslöschung der Wellen kommen.

Für einen schwarzen Ring muss es zu einer *Auslöschung* der Wellen und damit zu einer destruktiven Interferenz kommen. Das Licht muss dafür eine Phasenverschiebung von

$$\sigma = \quad (\text{O10.5})$$

$$\lambda \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{O10.6})$$

besitzen.

Durch Gleichsetzen und Umformen nach d von Gleichung O10.4 und Gleichung O10.6 erhält man:

$$\pi(2k - 1) = \frac{4\pi}{\lambda}(\Delta d + d) + \pi \quad (\text{O10.7})$$

$$\lambda \cdot \pi(2k - 1) = 4\pi(\Delta d + d) + \lambda\pi \quad (\text{O10.8})$$

$$\frac{\lambda \cdot \pi(2k - 1) - \lambda\pi}{4\pi} = \Delta d + d \quad (\text{O10.9})$$

$$d = \frac{\lambda \cdot \pi(2k - 1) - \lambda\pi}{4\pi} - \Delta d \quad (\text{O10.10})$$

Anwendung des Höhensatzes

Die Linse kann zu einem Kreis mit dem Radius R vervollständigt werden. Es lassen sich zwei Dreiecke im Kreis konstruieren.

¹²die Reflexion findet am optische dichteren Medium statt

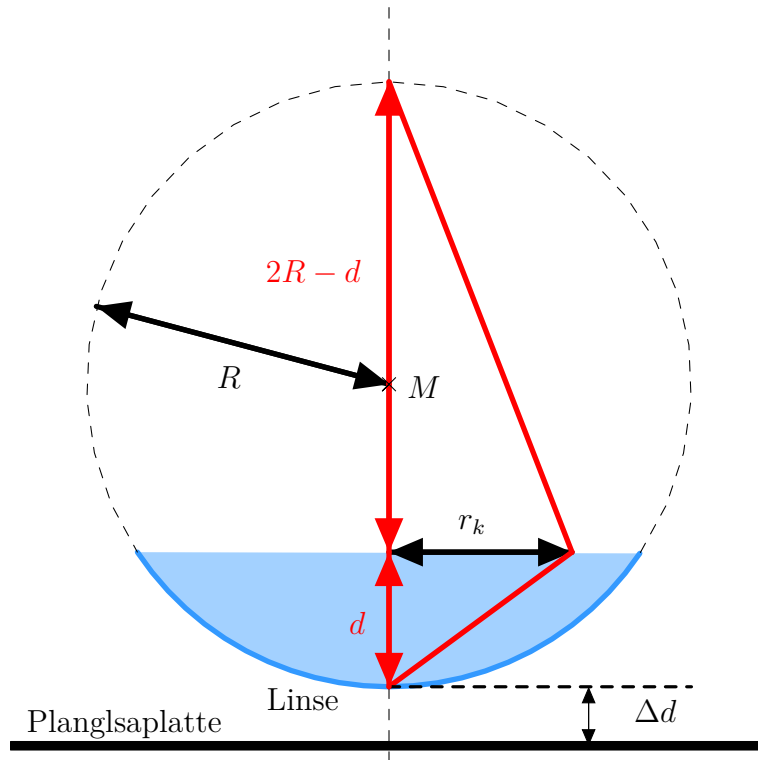


Abbildung O10.2: graphische Darstellung der beiden Dreiecke und des Krümmungsradius R einer Linse

Nach dem Höhensatz gilt:

$$h^2 = p \cdot q \quad (\text{O10.11})$$

$$r_k^2 = d \cdot (2 \cdot R - d) \quad (\text{O10.12})$$

$$r_k^2 = 2Rd - d^2 \quad (\text{O10.13})$$

$$r_k^2 = 2Rd \quad (\text{O10.14})$$

Dabei kann der Anteil d^2 aufgrund der Voraussetzung $d \ll R$ vernachlässigt werden. Setzt man nun Gleichung O10.24 in die durch den Höhensatz hergeleitete Beziehung

zwischen dem Ringradius und dem Krümmungsradius ein, so ergibt sich:

$$r_k^2 = 2R \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \pi(2k-1) - \lambda\pi}{4\pi} - \Delta d \right) \quad (\text{O10.15})$$

$$= 2R \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \pi \cdot [(2k-1) - 1]}{4\pi} - \Delta d \right) \quad (\text{O10.16})$$

$$= \frac{R \cdot \lambda \cdot \pi \cdot [(2k-1) - 1]}{2} - 2\Delta d \cdot R \quad (\text{O10.17})$$

$$= R \cdot \lambda \cdot (k-1) - 2\Delta d \cdot R \quad (\text{O10.18})$$

$$= R\lambda \cdot k - R \cdot \lambda - 2\Delta d \cdot R \quad (\text{O10.19})$$

$$= R\lambda \cdot k - R \cdot (\lambda - 2\Delta d) \quad (\text{O10.20})$$

Stellt man nun in einem $r_k^2 - k$ -Diagramm Messwerte dar und führt eine lineare Regression durch, so ergibt sich ein linearer Zusammenhang der Form $y = ax + b$. Bei bekannter Wellenlänge ist aus der Steigung a der Krümmungsradius der Linse zu berechnen.

$$a = R\lambda \implies R = \frac{a}{2\lambda} \quad (\text{O10.21})$$

Über den y-Achsenabschnitt b kann nun über ein berechnetes R der sehr kleine Abstand von Linse zu Spanglasplatte berechnet werden:

$$b = R \cdot (\lambda - 2\Delta d) \implies \Delta d = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{b}{R} \right) \quad (\text{O10.22})$$

Im Umkehrschluss kann nun bei bekannten R auch die Wellenlänge des bestrahlenden Lichtes über

$$a = 2R\lambda \implies \lambda = \frac{a}{2R} \quad (\text{O10.23})$$

bestimmt werden.

5.2.5 Bestimmung der der Kohärenzlänge Λ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$

Bestimmung der Luftschichtdicke d

Bei bekannter Wellenlänge λ und Interferenzordnung k kann über Gleichung O10.24 die Dicke der Luftschicht d an der Stelle des *schwarzen* Ringes der Ordnung k_{max} bestimmt werden.

$$d_{max} = \frac{\lambda \cdot \pi(2k_{max} - 2)}{4\pi} - \Delta d \quad (\text{O10.24})$$

Bestimmung des Gangunterschieds

Durch die Bestimmung von d_{max} kann mittels Gleichung O10.4 auch der Gangunterschied ermittelt werden.

$$\sigma_{max} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (\text{O10.25})$$

Bestimmung der Kohärenzlänge

Wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, kann es nur zur Ausbildung von Interferenz kommen, wenn Wellen kohärent zueinander sind. Die Kohärenzlänge ist damit die vom Licht zurückgelegte Strecke an der Stelle des Ringes der höchsten Interferenzordnung k_{max} .

$$\Lambda = (2k_{max} + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (\text{O10.26})$$

Bestimmung der Kohärenzzeit τ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$

Nach Gleichung O10.1 gilt für τ :

$$\tau = \frac{(2k_{max} + 1) \frac{\lambda}{2}}{c} = (2k_{max} + 1) \frac{\lambda}{2c} \quad (\text{O10.27})$$

Die Spektrale Bandbreite berechnet sich durch:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} \quad (\text{O10.28})$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \cdot \Delta f \quad (\text{O10.29})$$

5.3 Versuchsaufbau

Die zu vermessende Linse wurde auf dem Tisch zentriert und es wurden die Durchmesser der *NEWTONSCHEN* Ringe gemessen.

5.3.1 Messfehler

Der Messfehler beim Ablesen der Durchmesser beträgt:

$$\Delta d_k = \Delta r_k = 0.05 \text{ mm} \quad (\text{O10.30})$$

Der Messfehler des Längenmesser ist zwar kleiner, jedoch konnten die teils unscharfen Ringe nicht eindeutig vermessen werden.

5.4 Messergebnisse

5.4.1 verwendete Verfahren zur Messung der Ringradien

Zur Bestimmung der Ringradien ist es empfehlenswert den Durchmesser der einzelnen Ringe zu bestimmen. Durch die Messung einer größeren Strecke wird der Messfehler minimiert. Zudem sollte immer von einem Außenrand zu einem Innenrand gemessen werden.

Dabei können zwei verschiedenen Methoden der Bestimmung Anwendung finden:

- Jeder Ring wird einzeln vermessen, das heißt es wird der Abstand von einem Außenrand zum gegenüberliegenden Innenrand gemessen. Diese Methode wurde bei der Aufnahme der Messwerte für das Licht der Na-Dampf-Lampe genutzt (Tabelle O10.1).
- Es werden zur Bestimmung der Ringdurchmesser jeweils erst die Außendurchmesser auf einer Seite bestimmt und danach die Innendurchmesser auf der anderen Seite. Diese Messmethode wurde bei der Aufnahme der Messwerte für Filterlicht genutzt (Tabelle O10.2, Tabelle O10.3).

5.4.2 aufgenommene Messwerte

Die folgenden Daten wurden bei den Messungen aufgenommen.

Messung der Ringradien bei Beleuchtung mit einer Na-Dampf-Lampe:

Tabelle O10.1: Messung der Ringradien für Licht der Na-Dampf-Lampe

k	r in m	r^2 in m^2
2	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$1,06 \cdot 10^{-7}$
3	$4,05 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-7}$
4	$4,85 \cdot 10^{-4}$	$2,35 \cdot 10^{-7}$
5	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$2,92 \cdot 10^{-7}$
6	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$3,54 \cdot 10^{-7}$
7	$6,50 \cdot 10^{-4}$	$4,23 \cdot 10^{-7}$
8	$6,95 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^{-7}$
9	$7,45 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-7}$
10	$7,85 \cdot 10^{-4}$	$6,16 \cdot 10^{-7}$
11	$8,30 \cdot 10^{-4}$	$6,89 \cdot 10^{-7}$
12	$8,65 \cdot 10^{-4}$	$7,48 \cdot 10^{-7}$
13	$9,00 \cdot 10^{-4}$	$8,10 \cdot 10^{-7}$

Messung der Ringradien bei Beleuchtung durch einen grünen Filter:

Tabelle O10.2: Messung der Ringradien für grünen Filter

k	r in m	r^2 in m^2
1	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$2,72 \cdot 10^{-8}$
2	$3,05 \cdot 10^{-4}$	$9,30 \cdot 10^{-8}$
3	$3,85 \cdot 10^{-4}$	$1,48 \cdot 10^{-7}$
4	$4,65 \cdot 10^{-4}$	$2,16 \cdot 10^{-7}$
5	$5,20 \cdot 10^{-4}$	$2,70 \cdot 10^{-7}$
6	$5,75 \cdot 10^{-4}$	$3,31 \cdot 10^{-7}$
7	$6,20 \cdot 10^{-4}$	$3,84 \cdot 10^{-7}$
8	$6,65 \cdot 10^{-4}$	$4,42 \cdot 10^{-7}$

Messung der Ringradien bei Beleuchtung durch einen roten Filter:

Tabelle O10.3: Messung der Ringradien für roten Filter

k	r in m	r^2 in m^2
1	$2,10 \cdot 10^{-4}$	$4,41 \cdot 10^{-8}$
2	$3,40 \cdot 10^{-4}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$
3	$4,40 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-7}$
4	$5,10 \cdot 10^{-4}$	$2,60 \cdot 10^{-7}$
5	$5,80 \cdot 10^{-4}$	$3,36 \cdot 10^{-7}$
6	$6,40 \cdot 10^{-4}$	$4,10 \cdot 10^{-7}$
7	$7,00 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-7}$
8	$7,50 \cdot 10^{-4}$	$5,63 \cdot 10^{-7}$
9	$8,05 \cdot 10^{-4}$	$6,48 \cdot 10^{-7}$
10	$8,45 \cdot 10^{-4}$	$7,14 \cdot 10^{-7}$
11	$8,85 \cdot 10^{-4}$	$7,83 \cdot 10^{-7}$
12	$9,30 \cdot 10^{-4}$	$8,65 \cdot 10^{-7}$

graphische Darstellung der Messwerte

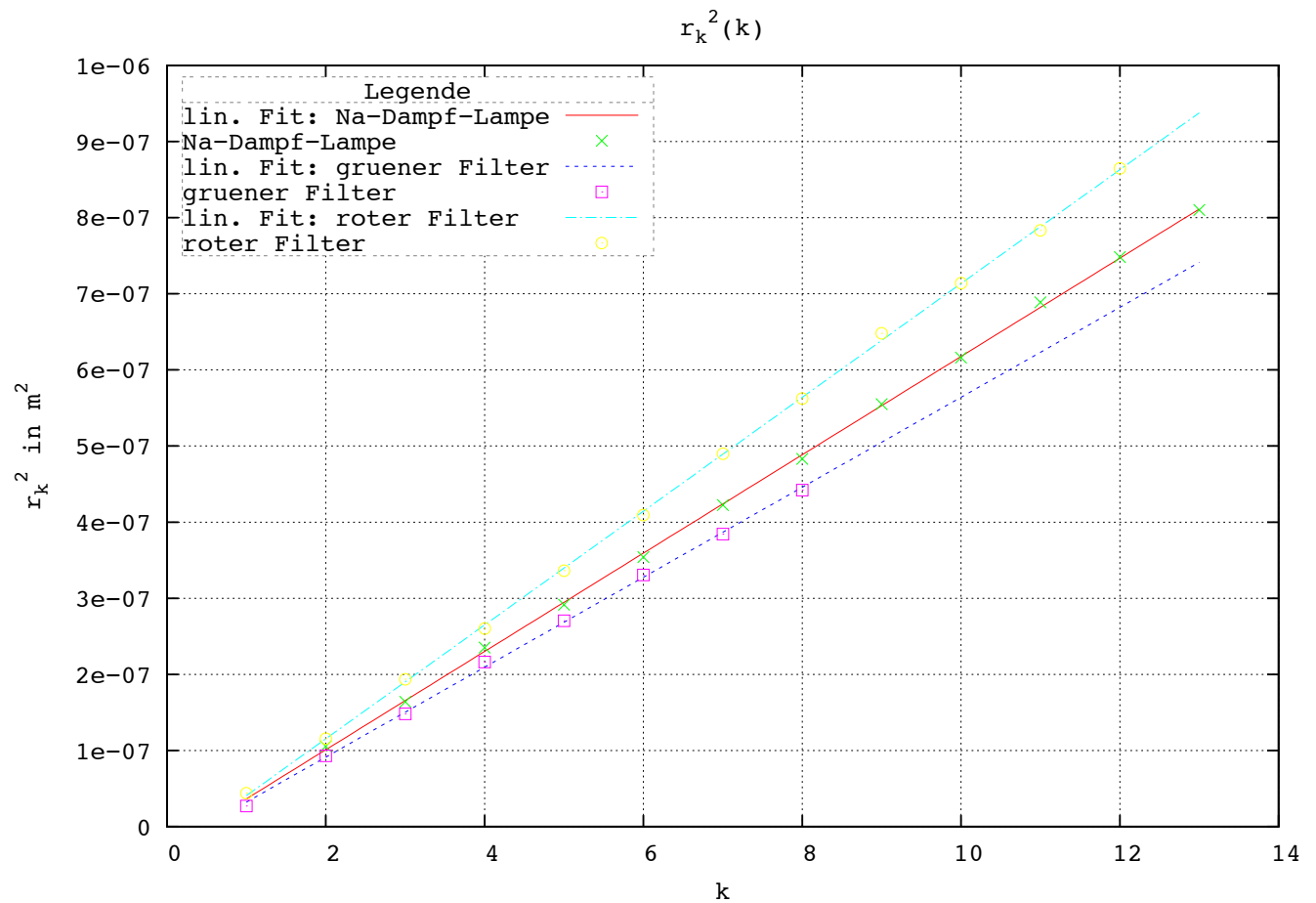


Abbildung O10.3: r_k^2 in Abhängigkeit von k mit linearer Regression ($y = ax + b$) der Messwerte

Lineare Regression

Für alle drei Messreihen wurde eine lineare Regression durchgeführt.

$$y_{Na-Dampf-Lampe} = a_1x + b_1 \quad (O10.31)$$

$$y_{grün} = a_2x + b_2 \quad (O10.32)$$

$$y_{rot} = a_3x + b_3 \quad (O10.33)$$

Es wurden folgende Daten durch die Lineare Regression ermittelt:

$$a_1 = 6,46 \cdot 10^{-8} \pm 3,48 \cdot 10^{-10} \quad (O10.34)$$

$$b_1 = -2,81 \cdot 10^{-8} \pm 2,88 \cdot 10^{-9} \quad (O10.35)$$

$$a_2 = 5,91 \cdot 10^{-8} \pm 6,57 \cdot 10^{-10} \quad (\text{O10.36})$$

$$b_2 = -2,69 \cdot 10^{-8} \pm 3,32 \cdot 10^{-9} \quad (\text{O10.37})$$

$$a_3 = 7,47 \cdot 10^{-8} \pm 3,73 \cdot 10^{-10} \quad (\text{O10.38})$$

$$b_3 = -3,40 \cdot 10^{-8} \pm 2,75 \cdot 10^{-9} \quad (\text{O10.39})$$

Die Korrelationskoeffizienten liegen in allen Fällen sehr nahe bei 1 ($r_{Na-Dampf-Lampe} = r_{grün} = r_{rot} \approx 1$)

5.4.3 Bestimmung des Krümmungsradius R der Linse

Nach Gleichung O10.21 ist der Krümmungsradius R der Linse:

$$R = \frac{a_1}{\lambda} \quad (\text{O10.40})$$

$$= \frac{6,46 \cdot 10^{-8} m^2}{5,89 \cdot 10^{-8} m} = 0,1096 m \quad (\text{O10.41})$$

5.4.4 Bestimmung der Wellenlängen ($\lambda_{grün}, \lambda_{rot}$) des Filterlichtes

Bei bekannten R aus Unterunterabschnitt 5.4.3 kann nach Gleichung O10.23 die Wellenlänge bestimmt werden:

$$\lambda = \frac{a_i}{R} \text{ mit } i \in \{2, 3\} \quad (\text{O10.42})$$

$$\lambda_2 = \lambda_{grün} = \frac{6,46 \cdot 10^{-8} m^2}{2 \cdot 0,1096 m} = 5,36 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.43})$$

$$\lambda_3 = \lambda_{rot} = \frac{7,47 \cdot 10^{-8} m^2}{2 \cdot 0,1096 m} = 6,79 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.44})$$

5.4.5 Bestimmung der Kohärenzlänge Λ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$ für Filterlicht

Für die Bestimmung der Kohärenzlänge und der spektralen Bandbreite sind zuerst die Dicke der Luftschicht und der Gangunterschied am Ort des Ringes der maximalen Interferenzordnung k_{max} zu bestimmen.

Bestimmung von Δd

Bei bekannten y-Achsenabschnitt b und Wellenlänge λ kann mittels Gleichung O10.22 Δd bestimmt werden:

$$\Delta d_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_i + \frac{b_i}{R} \right) \text{ mit } i \in 1, 2, 3 \quad (\text{O10.45})$$

$$\Delta d_1 = \Delta d_{Na-Dampf-Lampe} = 5,37 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.46})$$

$$\Delta d_2 = \Delta d_{grün} = 5,37 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.47})$$

$$\Delta d_3 = \Delta d_{rot} = 5,37 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.48})$$

$$\Delta d = 5,37 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.49})$$

Das Ergebnis $\Delta d_1 = \Delta d_2 = \Delta d_3$ war zu erwarten, da sich Δd während des Versuches auch nicht ändern sollte, weil die Linse nicht bewegt werden darf.

Bestimmung der Luftschichtdicke d_{max}

Nach Gleichung O10.24 kann bei bekannter Wellenlänge und Δd die Luftschichtdicke bestimmt werden. Die maximal sichtbare Interferenzordnung für grün ist $k_{max_{grün}} = 8$ und für rot $k_{max_{rot}} = 36$

$$d_{max} = \frac{\lambda \cdot \pi (2k_{max} - 2)}{4\pi} - \Delta d \quad (\text{O10.50})$$

$$d_{max_{grün}} = \frac{\lambda \cdot \pi (2k_{max} - 2)}{4\pi} - \Delta d \quad (\text{O10.51})$$

$$= 1,34 \cdot 10^{-6} m \quad (\text{O10.52})$$

$$d_{max_{rot}} = \frac{\lambda \cdot \pi (2k_{max} - 2)}{4\pi} - \Delta d \quad (\text{O10.53})$$

$$= 1,13 \cdot 10^{-5} m \quad (\text{O10.54})$$

Bestimmung des Gangunterschiedes

Bei bekannten Δd und d_{max} kann der Gangunterschied nach Gleichung O10.25 berechnet werden:

$$\sigma_{max_i} = \left(k_i + \frac{1}{2} \right) \lambda_i \quad (\text{O10.55})$$

$$\sigma_{max_{grün}} = \left(k_{max} + \frac{1}{2} \right) \lambda_{grün} \quad (\text{O10.56})$$

$$= 4,56 \cdot 10^{-6} m \quad (\text{O10.57})$$

$$\sigma_{max_{rot}} = \left(k_{max} + \frac{1}{2} \right) \lambda_{rot} \quad (\text{O10.58})$$

$$= 2,49 \cdot 10^{-5} m \quad (\text{O10.59})$$

Bestimmung der Kohärenzlänge Λ , der Kohärenzzeit τ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$

Nach Gleichung O10.26 kann die Kohärenzlänge und darüber die Kohärenzzeit bestimmt werden.

$$\Lambda_{grün} = (2k_{max} + 1) \frac{\lambda_{grün}}{2} \quad (O10.60)$$

$$= (2 \cdot 8 + 1) \frac{5,36 \cdot 10^{-7} m}{2} = 4,56 \cdot 10^{-6} m \quad (O10.61)$$

$$\Lambda_{rot} = (2k_{max} + 1) \frac{\lambda_{rot}}{2} \quad (O10.62)$$

$$= (2 \cdot 38 + 1) \frac{6,79 \cdot 10^{-7} m}{2} = 2,61 \cdot 10^{-5} m \quad (O10.63)$$

Die Kohärenzzeit ergibt sich nach Gleichung O10.27 wie folgt:

$$\tau = (2k_{max} + 1) \frac{\lambda}{2c} \quad (O10.64)$$

$$\tau_{grün} = (2k_{max_{grün}} + 1) \frac{\lambda_{grün}}{2c} = (2 \cdot 8 + 1) \frac{5,36 \cdot 10^{-7} m}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 8,71 \cdot 10^{-14} s \quad (O10.65)$$

$$\tau_{rot} = (2k_{max_{rot}} + 1) \frac{\lambda_{rot}}{2c} = (2 \cdot 38 + 1) \frac{6,79 \cdot 10^{-7} m}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 1,52 \cdot 10^{-14} s \quad (O10.66)$$

Über Gleichung O10.22 kann $\Delta\lambda$ ermittelt werden:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \tau} \quad (O10.67)$$

$$\Delta\lambda_{grün} = \frac{\lambda_{grün}^2}{c} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \tau_{grün}} = 1,75 \cdot 10^{-9} m \quad (O10.68)$$

$$\Delta\lambda_{rot} = \frac{\lambda_{rot}^2}{c} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \tau_{rot}} = 1,61 \cdot 10^{-8} m \quad (O10.69)$$

5.5 Messfehler

Messfehler des Krümmungsradius

Nach dem Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung gilt:

$$\Delta R = \frac{\Delta a_1}{a_1} \cdot R \quad (O10.70)$$

$$= \frac{3,48 \cdot 10^{-10} m^2}{6,46 \cdot 10^{-8} m^2} \cdot 0,1096 m = 5,82 \cdot 10^{-4} m \quad (O10.71)$$

Messfehler der errechneten Wellenlängen für Filterlicht

Es gilt allgemein:

$$\Delta\lambda_i = \left(\frac{\Delta a_i}{a_i} + \frac{\Delta R}{R} \right) \cdot \lambda_i \quad (\text{O10.72})$$

$$\Delta\lambda_{\text{grün}} = 8,80 \cdot 10^{-9} m \quad (\text{O10.73})$$

$$\Delta\lambda_{\text{rot}} = 7,00 \cdot 10^{-9} m \quad (\text{O10.74})$$

Messfehler für Δd

Es wird der größte anzunehmende Fehler abgeschätzt, daher:

$$\Delta(\Delta d) = \Delta(\Delta d_2) = \Delta\lambda + \left[\left(\frac{\Delta b_2}{b_2} + \frac{\Delta R}{R} \right) \cdot \left(\frac{b_2}{R} \right) \right] = 4,04 \cdot 10^{-8} m \quad (\text{O10.75})$$

Messfehler für d_{max}

$$\begin{aligned} \Delta d_{\text{max}} &= \Delta\lambda + \Delta(\Delta d) \\ \Delta d_{\text{max gr\u00fcn}} &= 4,92 \cdot 10^{-8} m \\ \Delta d_{\text{max rot}} &= 4,07 \cdot 10^{-8} m \end{aligned}$$

Messfehler für σ_{max}

Die Messunsicherheit von σ_{max} wird lediglich von dem Messfehler für λ beeinflusst, da k als fehlerlos angesehen werden kann.

Es folgt daraus

$$\Delta\sigma_{\text{max}_i} = \sigma_{\text{max}_i} \cdot \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \quad (\text{O10.76})$$

$$\Delta\sigma_{\text{max gr\u00fcn}} = 7,49 \cdot 10^{-8} m \quad (\text{O10.77})$$

$$\Delta\sigma_{\text{max rot}} = 2,57 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.78})$$

Messfehler für Λ , τ und $\Delta\lambda$

Die Angaben der Interferenzordnung k und die Lichtgeschwindigkeit c werden als fehlerlos betrachtet, daher ergibt sich für $\Delta\Lambda$,

$$\Delta\Lambda_i = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \Lambda_i \quad (\text{O10.79})$$

$$\Delta\Lambda_{\text{gr\u00fcn}} = 7,49 \cdot 10^{-8} m \quad (\text{O10.80})$$

$$\Delta\Lambda_{\text{rot}} = 2,69 \cdot 10^{-7} m \quad (\text{O10.81})$$

für $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau_i = \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \cdot \tau \quad (\text{O10.82})$$

$$\Delta\tau_{\text{grün}} = 1,43 \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (\text{O10.83})$$

$$\Delta\tau_{\text{rot}} = 1,57 \cdot 10^{-16} \text{ s} \quad (\text{O10.84})$$

und für $\Delta(\Delta\lambda)$:

$$\Delta(\Delta\lambda_i) = \left(2 \cdot \frac{\delta\lambda_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta\tau_i}{\tau_i} \right) \cdot \Delta\lambda_i \quad (\text{O10.85})$$

$$\Delta(\Delta\lambda_{\text{grün}}) = 8,62 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (\text{O10.86})$$

$$\Delta(\Delta\lambda_{\text{rot}}) = 6,04 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{O10.87})$$

Aufgrund der nicht eindeutigen Bezeichnung für den Fehler der Wellenlänge für Filterlicht $\Delta\lambda$ und der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$, entspricht in Gleichung O10.85 $\delta\lambda$ dem Fehler der Wellenlänge für Filterlicht.

5.6 Diskussion der Ergebnisse

5.6.1 Zusammenfassung der Messergebnisse

$$R = 0,1096 \pm 5,82 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{O10.88})$$

$$\lambda_{\text{grün}} = 5,36 \cdot 10^{-7} \pm 8,80 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{O10.89})$$

$$\lambda_{\text{rot}} = 6,79 \cdot 10^{-7} \pm 7,00 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{O10.90})$$

$$\Delta d = 5,37 \cdot 10^{-7} \pm 4,04 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{O10.91})$$

$$d_{\text{maxgrün}} = 1,34 \cdot 10^{-6} \pm 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{O10.92})$$

$$d_{\text{maxrot}} = 1,13 \cdot 10^{-5} \pm 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{O10.93})$$

$$\sigma_{\text{maxgrün}} = 4,56 \cdot 10^{-6} \pm 7,49 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{O10.94})$$

$$\sigma_{\text{maxrot}} = 2,49 \cdot 10^{-5} \pm 2,57 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (\text{O10.95})$$

$$\Lambda_{\text{grün}} = 4,56 \cdot 10^{-6} \pm 7,49 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{O10.96})$$

$$\Lambda_{\text{rot}} = 2,61 \cdot 10^{-5} \pm 2,69 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (\text{O10.97})$$

$$\tau_{\text{grün}} = 8,71 \cdot 10^{-14} \pm 1,43 \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (\text{O10.98})$$

$$\tau_{\text{rot}} = 1,52 \cdot 10^{-14} \pm 1,57 \cdot 10^{-16} \text{ s} \quad (\text{O10.99})$$

$$\Delta\lambda_{\text{grün}} = 1,75 \cdot 10^{-9} \pm 8,62 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (\text{O10.100})$$

$$\Delta\lambda_{\text{rot}} = 1,61 \cdot 10^{-8} \pm 6,04 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{O10.101})$$

5.6.2 Errechnete Wellenlängen für Filterlicht

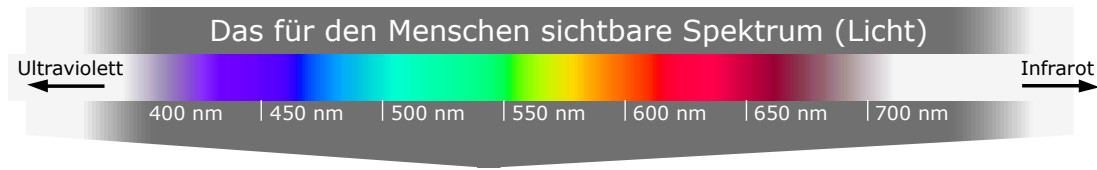


Abbildung O10.4: Für das menschliche Auge wahrnehmbare Wellenlängen (nach [10])

Die gemessenen Werte für die Wellenlängen von grünem und rotem Filterlicht liegen mit

$$\lambda_{\text{grün}} = 5,36 \cdot 10^{-7} \pm 8,80 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{O10.102})$$

$$\lambda_{\text{rot}} = 6,79 \cdot 10^{-7} \pm 7,00 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{O10.103})$$

in den in Abbildung O10.4 zu erkennenden Intervallen. In der Literatur wird für grünes Licht das Intervall $I_{\text{grün}} = \{4,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}, 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}\}$ und für rotes Licht das Intervall $I_{\text{rot}} = \{6,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}, 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}\}$ angegeben [10]. Für die ermittelten Werte gilt:

$$\lambda_{\text{grün}} \in I_{\text{grün}} \quad (\text{O10.104})$$

$$\lambda_{\text{rot}} \in I_{\text{rot}} \quad (\text{O10.105})$$

5.6.3 Berechnete Werte für R und Δd

Die für den Versuch verwendete Linse schien recht klein, so dass ein kleiner Krümmungsradius zu erwarten war. Ein Wert für R im Bereich von 10 cm scheint plausibel zu sein. Die Ergebnisse unterstützen und legitimieren die in Gleichung O10.14 getroffene Vereinfachung auf der Grundlage des Ansatzes: $d \ll R$. Der Ansatz gilt und die Vereinfachung kann verwendet werden.

Der berechnete Wert für Δd liegt in der Größenordnung von $\frac{1}{10000} \text{ mm}$. Dieser Wert erscheint sehr klein, ist jedoch aber nur der minimale Luftspalt zwischen Planglasplatte und Linse und muss daher so klein sein. Auch dieser Wert kann als stichhaltig angenommen werden.

6 M7 Stoßpendel

6.1 Aufgabenstellung

1. a) Die Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel ist mit Hilfe des Stoßpendels zu bestimmen.
- b) Die horizontale Auslenkung des Stoßpendels nach Eindringen der Luftgewehrkugel ist bei 2 unterschiedlichen Pendellängen jeweils mehrfach zu bestimmen.
- c) Der Einfluss des Luftstoßes auf die Pendelauslenkung ist zu untersuchen.
- d) Aus der auf Luftstoß korrigierten Pendelauslenkung ist die Geschossgeschwindigkeit zu berechnen.

6.2 Grundlagen zum Versuch

6.2.1 Impuls p

Der Impuls ($[p] = \frac{kg \cdot m}{s} = N \cdot s$) als auch Bewegungsmenge oder Bewegungsgröße bezeichnet kann anschaulich als *Wucht* eines Aufpralls bezeichnet werden. [11]

In der Physik ist der Impuls das Produkt aus Masse m ($[m] = kg$) und Geschwindigkeit v ($[v] = \frac{m}{s}$).

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (M7.1)$$

Die Geschwindigkeit ist ein Vektor. Damit besitzt auch der Impuls eine Richtung und Größe. Die Richtung von Impuls und Geschwindigkeit stimmen immer überein, jedoch kann der Betrag des Impulses verschieden sein.

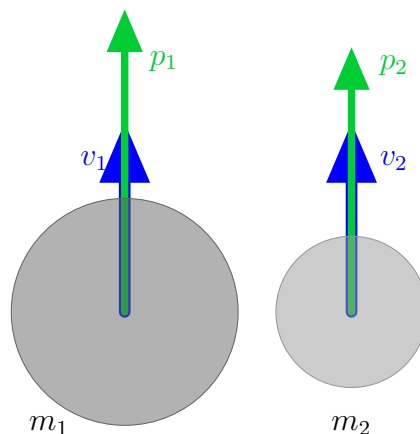


Abbildung M7.1: Impuls- und Geschwindigkeitsvektor von zwei Massen m_1 und m_2 mit $m_1 > m_2$ (nach [11])

6.2.2 Erhaltungssatz

Stoßen in einem abgeschlossenen System zwei Körper der Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 aufeinander, so gilt unabhängig, davon ob diese einen unelastischen oder elastischen Stoß ausführen die Impulserhaltung.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \quad (\text{M7.2})$$

Für einen elastischen Stoß gilt für die Geschwindigkeiten v'_i der beiden Körper nach dem Stoß:

$$v'_1 = v'_2 \quad (\text{M7.3})$$

Die Massen m_i bleiben unverändert.

6.2.3 Stöße

In der Physik wird unter einem Stoß eine kurze Wechselwirkung zwischen zwei oder mehr Körpern verstanden. Dabei unterscheidet man zwischen verschiedenen Arten von Stößen. Bei allen Stößen gilt die Impulserhaltung.

elastischer Stoß

Bei einem elastischen Stoß gilt neben der Impulserhaltung auch die Energieerhaltung. Beide Körper werden weder erwärmt noch bleibend verformt. Es findet keine Energieumwandlung statt.

Die Summe der Bewegungsenergie beider Körper ist vor und nach dem Stoß identisch.

unelastischer Stoß

Nach einem unelastischen Stoß besitzen die beiden Körper die gleiche Geschwindigkeit. Es kommt daher zu einer Umwandlung von Bewegungsenergie in innere Energie. Die Summe der Bewegungsenergie vor dem Stoß ist größer als die Summe der Energie nach dem Stoß, da Energie umgewandelt worden ist.

gerader Stoß

In diesem Fall ist der Punkt der Kraftwirkung beim Stoß entscheidend. Bei einem geraden Stoß verlaufen die Impulsvektoren parallel oder auf der Stoßlinie. Sollte dies nicht der Fall sein, so spricht man von einem *schiefen* Stoß.

zentraler Stoß

Liegt der Schwerpunkt der beiden stoßenden Körper auf der Stoßlinie, so ist der Stoß zu dem noch zentral. Stöße bei denen dieses nicht zutrifft werden *exzentrisch* genannt.

6.2.4 Berechnung der Geschwindigkeit aus der vertikalen Auslenkung h

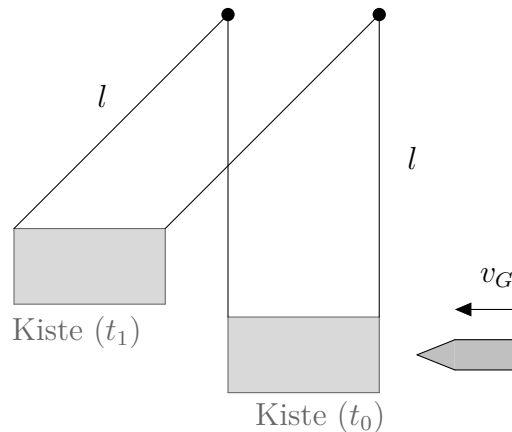


Abbildung M7.2: Schematische Darstellung der Kiste zu den Zeitpunkten t_0 vor dem Stoß und t_1 nach dem Stoß

vor der Kollision von Geschoss und Kiste

Die Kiste der Masse m_K ruht ($v_K = 0$) an zwei Seilen der Länge l gelagert. Das Geschoss der Masse m_G mit $m_G \ll m_K$ fliegt nach dem Abschuss mit der Geschwindigkeit v_G auf die Kiste zu.

Kollision von Geschoss und Kiste

Es kommt zu einem elastischen geraden zentralen Stoß zwischen dem Geschoss und der Kiste. Dabei führt diese eine gerade Bewegung nach vorne x und oben aus h . Durch Justierung der Aufhängung sind *Schlamberbewegungen* zu verhindern.

Geschwindigkeit des Geschosses in Abhängigkeit von v'

Für einen elastischen Stoß gilt Gleichung M7.2 und zusätzlich Gleichung M7.3, damit ergibt sich:

$$m_G \cdot v_G + m_K \cdot v_K = v' \cdot (m_K + m_G) \quad (\text{M7.4})$$

Da die Kiste vor der Kollision ruht ($v_K = 0$) kann weiter vereinfacht werden.

$$m_G \cdot v_G = v' \cdot (m_K + m_G) \quad (\text{M7.5})$$

$$v_G = v' \cdot \frac{(m_K + m_G)}{m_G} \quad (\text{M7.6})$$

Das Geschoss verbleibt nach dem Zusammentreffen in der Kiste, so dass als neue Gesamtmasse $m' = m_K + m_G$ angenommen werden kann.¹³

$$v_G = v' \cdot \left(\frac{m'}{m_G} \right) \quad (\text{M7.7})$$

Ermittlung von v'

Die Geschwindigkeit von Kiste und Geschoss v' kann nun durch Anwendung der beiden Energiesätze ermittelt werden. Am Punkt der maximalen vertikalen Auslenkung gilt ein Gleichgewicht von potenzieller und kinetischer Energie $E_{pot} = E_{kin}$:

$$E_{pot} = mgh = \frac{1}{2}mv^2 = E_{kin} \quad (\text{M7.8})$$

Durch Umformen nach v erhält man:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{M7.9})$$

$$2mgh = mv^2 \quad (\text{M7.10})$$

$$v = \sqrt{2gh} = v' \quad (\text{M7.11})$$

Bestimmung der vertikalen Auslenkung h

Im Versuch wird lediglich die horizontale Auslenkung x der Kiste und nicht die vertikale h gemessen.

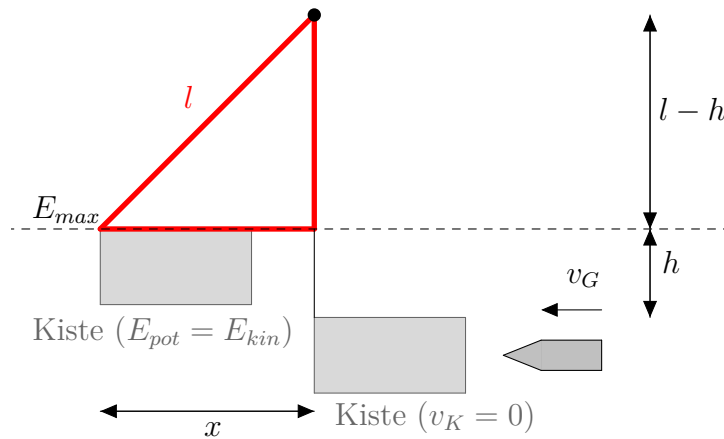


Abbildung M7.3: Schematische Darstellung der Kiste zum Zeitpunkt ihrer maximalen vertikalen Auslenkung. Es wurde nur ein Faden der Aufhängung eingezeichnet.

¹³bei unbekannter Masse des in der Kiste verbleibenden Geschoss und $m_K \gg m_G$ kann auch $m' \approx m_K$ angenommen werden

Aus Abbildung M7.3 geht durch den Satz von Pythagoras hervor, dass:

$$x^2 + (l - h)^2 = l^2 \quad (\text{M7.12})$$

$$l - h = \sqrt{l^2 - x^2} \quad (\text{M7.13})$$

$$h = l - \sqrt{l^2 - x^2} \quad (\text{M7.14})$$

Bestimmung der Geschwindigkeit v_G

Durch Einsetzen von Gleichung M7.11 und Gleichung M7.14 in Gleichung M7.7 erhält man die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit v_G mittels gemessener Größen l , m_G , m' und x .

$$v_G = v' \cdot \left(\frac{m'}{m_G} \right) \quad (\text{M7.15})$$

$$v_G = \sqrt{2gh} \cdot \left(\frac{m'}{m_G} \right) \quad (\text{M7.16})$$

$$v_G = \sqrt{2g \cdot (l - \sqrt{l^2 - x^2})} \cdot \left(\frac{m'}{m_G} \right) \quad (\text{M7.17})$$

Einfluss des Luftstoßes

Nach dem Abfeuern des Geschosses trifft bei einem Luftgewehr nicht nur das Geschoss selbst, sondern auch ein Luftstoß auf die Kiste. Die Auslenkung resultiert damit nicht nur aus der Energie des Geschosses. Da jedoch die Geschwindigkeit des Geschosses berechnet werden soll, ist es nötig die Auslenkung der Kiste bei einem Beschuss ohne Munition mehrfach zu bestimmen. Durch Subtraktion der durch Luft resultierenden Auslenkung \bar{x}_{Luft} von der gemessenen Auslenkung x kann die Geschwindigkeit bestimmt werden. Es ergibt sich damit für die auf Luftstoß bereinigte Formel folgendes:

$$v_G = \sqrt{2g \cdot (l - \sqrt{l^2 - (x - \bar{x}_{Luft})^2})} \cdot \left(\frac{m'}{m_G} \right) \quad (\text{M7.18})$$

6.3 Versuchsaufbau

Die Kiste wird so aufgehängt, dass das Geschoss mittig auf eine Seitenwand der Kiste aufprallt und die Kiste daraufhin eine Bewegung Schwingung nach vorne ausführt, ohne dabei nach links oder rechts zu pendeln.

Für die Aufnahme des Messwerte für \bar{x}_{Luft} muss für jede neue Pendellänge l mindestens dreimal ohne Geschoss auf die Kiste gefeuert werden.

Es sind mindestens zwei Pendellängen zu untersuchen.

Abbildungsverzeichnis

M1.1	Histogramm der relativen Häufigkeiten der Messwerte aus Tabelle M1.1 bei einem Vertrauensniveau von $p = 0,9973$	15
M1.2	Lineare Regression der Messwerte aus Tabelle M1.2	18
M1.3	Darstellung der Ergebnisintervalle aus Aufgabenteil 4 auf einem Zahlenstrahl	19
M11.1	Lineare Regression der Messwerte in einem $\varphi - M$ -Diagramm	29
M11.2	Lineare Regression der Messwerte in einem $T^2 - s^2$ -Diagramm	30
M11.3	quadratische Regression der Messwerte in einem $J - s$ -Diagramm	32
M11.4	Skizze des Probekörpers (alle Angaben in mm)	34
E5.1	Kompensationsmethode nach POGGENDORF	38
E5.2	Verlauf der Kennlinie für den Fall eines linearen Zusammenhangs ($y = ax + b$) zwischen U und I	40
E5.3	eingezeichneter Arbeitspunkt bei einem linearen Lastwiderstand R_L (rote Gerade) und einer Gleichstromquelle mit Innenwiderstand (schwarze Gerade)	41
E5.4	nicht linearer Innenwiderstand einer Spannungsquelle (roter Graph) und linearer Lastwiderstand (schwarzer Graph)	42
E5.5	Schaltplan zur Aufnahme der Kennlinie einer elektrochemischen Spannungsquelle	43
E5.6	Schaltplan zur Aufnahme der Kennlinie einer Solarzelle	44
E5.7	Strom-Spannungs-Charakteristik einer elektrochemischen Spannungsquelle	45
E5.8	Strom-Spannungs-Charakteristik einer Solarzelle	46
E5.9	Leistung als Funktion des äußeren Widerstandes R_a bei einer elektrochemischen Spannungsquelle	48
E5.10	Leistung als Funktion des äußeren Widerstandes R_a bei einer Solarzelle . .	49
E5.11	graphischer Vergleich des Innenwiderstandes einer Solarzelle und einer elektrochemischen Spannungsquelle	52
W8.1	Darstellung der Zustände des Gases in einem $p - v$ -Diagramm [2]	59
W8.2	Darstellung der Änderung des Gasdruckes nach der Kompression	63
W8.3	Darstellung der Änderung des Gasdruckes nach der Expansion	63
O10.1	graphische Darstellung der der Linse auf der Planglasplatte mit einfallendem Licht	74
O10.2	graphische Darstellung der beiden Dreiecke und des Krümmungsradius R einer Linse	76
O10.3	r_k^2 in Abhängigkeit von k mit linearer Regression ($y = ax + b$) der Messwerte	81
O10.4	Für das menschliche Auge wahrnehmbare Wellenlängen (nach [10])	87
M7.1	Impuls- und Geschwindigkeitsvektor von zwei Massen m_1 und m_2 mit $m_1 > m_2$ (nach [11])	88
M7.2	Schematische Darstellung der Kiste zu den Zeitpunkten t_0 vor dem Stoß und t_1 nach dem Stoß	90
M7.3	Schematische Darstellung der Kiste zum Zeitpunkt ihrer maximalen vertikalen Auslenkung. Es wurde nur ein Faden der Aufhängung eingezeichnet.	91

Tabellenverzeichnis

M1.1	Durchmesser der Kugel mit einer Bügelmessschraube 50-mal gemessen . . .	13
M1.2	Messwerte für Durchmesser und Masse aller Versuchsgruppen	17
W8.1	Zustandsgrößen während des Versuches	59
W8.2	Wartezeiten für Temperatúrausgleich	64
W8.3	Messung von Δp_A und Δp_2 bei Luft	64
W8.4	Messung von Δp_A und Δp_2 bei CO_2	64
W8.5	Bestimmung von T zur Bestimmung der bestmöglichen Messmethode . . .	65
W8.6	Messung von κ nach <i>RÜCHARDT</i>	66
W8.7	prozentuale Abweichung von ermittelten Wert und Literaturwert	70
O10.1	Messung der Ringradien für Licht der Na-Dampf-Lampe	79
O10.2	Messung der Ringradien für grünen Filter	79
O10.3	Messung der Ringradien für roten Filter	80

Literatur

- [1] Rüdiger Erbrecht u.a. *Das große Tafelwerk (interaktiv)*. Cornelsen Verlag, Berlin, 1. Auflage, 17. Druck edition, 2010.
- [2] Fakultät für Naturwissenschaft-Institut für experimentelle Physik. Physikalisches Praktikum: Aufgabenstellung: Adiabatenexponent. http://www.iep.ovgu.de/praktika/praktika/grundpraktikum_i.html.
- [3] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: Durchführung eines Geradenausgleichs (lineare Regression). http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M1_5.php.
- [4] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: Dynamische Methode der Bestimmung des Direktionmoments. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M11_3.php.
- [5] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: Erstellung eines Histogramms. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M1_1.php.
- [6] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: Statische Methode der Bestimmung des Direktionmoments. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M11_1.php.
- [7] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: Streubreite und Größtabweichung. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/img/M1_1_expl.png.
- [8] Eckard Specht. Der kleine Helfer für das Physikalische Praktikum: unregelmäßiger Körper. http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/praktikum/M11_4.php.
- [9] Heribert Stroppe. *Physik für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften*. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 14. erweiterte Auflage edition, 2008.
- [10] Wikipedia. Für das menschliche Auge wahrnehmbares Spektrum.
- [11] Wikipedia. Impuls. <https://de.wikipedia.org/wiki/Impuls>.
- [12] Wikipedia. Tabellensammlung Chemie für die Dichte fester Stoffe. http://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe.