

Praktikum

Magnetschwebekörper

1 Einleitung

Im Rahmen dieses Praktikums soll für einen einfachen Magnetlagerversuchstand eine Stabilitätsuntersuchung und ein Reglerentwurf durchgeführt werden. Als Entwurfsverfahren soll hierzu das Verfahren der Wurzelortskurve zur Anwendung kommen.

2 Aufbau

Der Magnetlagerversuchsstand (Abb. 1) besteht im Wesentlichen aus:

- einem Elektromagneten
- einem die Spule von außen umfassenden Eisenkern. Durch ihn wird die zu überbrückende Luftstrecke möglichst klein gehalten, so dass sich über ihn der magnetische Fluss schließen kann
- einem Schwebekörper
- einem echtzeitfähigen Rechner der Firma Mathworks (xPC Target Box) (Abb. 2).

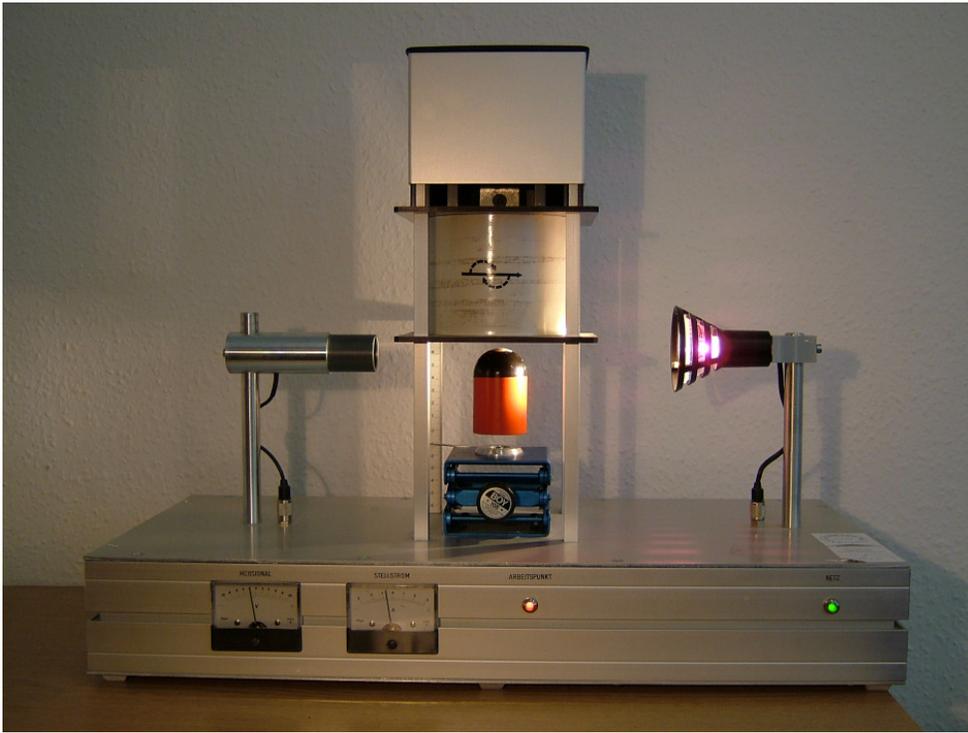


Abbildung 1. Versuchsstand



Abbildung 2. xPC Target Box

In Abbildung (3) ist der Gesamtaufbau des Versuchsstandes dargestellt. Auf der xPC Target Box wird der implementierte Regelalgorithmus berechnet. Dazu wird anhand des gewünschten Sollwertes y_d und des gemessenen Istwertes y eine neue Stellgröße u berechnet. Diese bildet das Eingangssignal der spannungsgesteuerten Stromquelle, die einen der Steuerspannung proportionalen Strom in die Regelspule einprägt. In dieser bildet sich ein elektromagnetisches Feld aus, das eine anzieh-

hende Kraft auf den Schwebekörper ausübt. Je nach Verhältnis von anziehender Magnetkraft und entgegengerichteter Gewichtskraft erfährt der Schwebekörper eine Beschleunigung nach oben bzw. unten. Der statische Fall der Ruhelage, d.h. Gleichheit der beiden Kräfte ist in der Realität nur im geregelten Fall realisierbar. Die Position wird durch ein optisches Wegmesssystem, bestehend aus Lampe und Fototransistor, aufgenommen. In der Messelektronik wird diese vorverarbeitet und an die xPC Target Box als gemessener Istwert übermittelt.

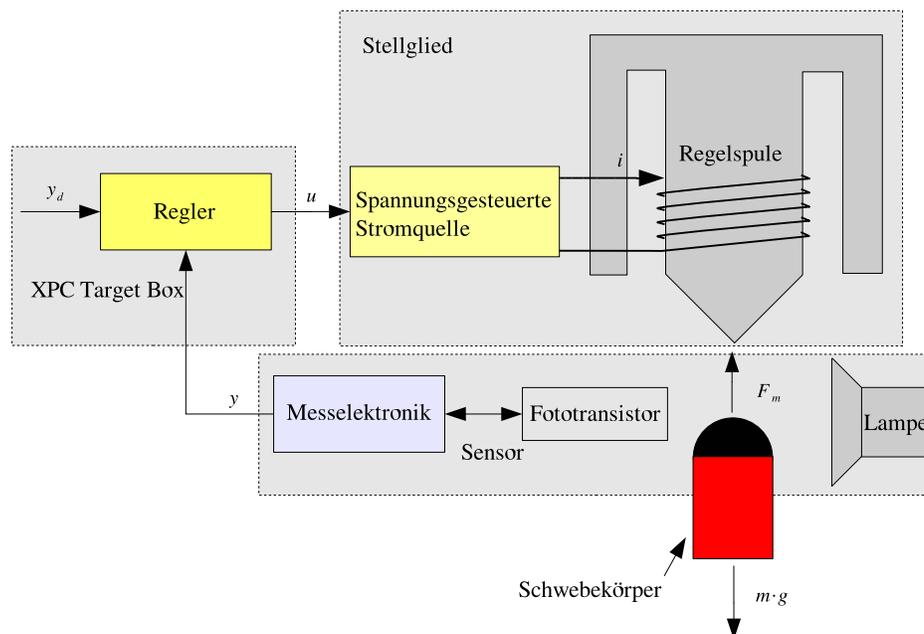


Abbildung 3. Aufbau des Magnetlagers

3 Theoretische Modellbildung

3.1 Modell

Zum Aufstellen der Systemgleichungen wird die in Abbildung (4) dargestellte Modellannahme zugrundegelegt. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Durchflutung Θ aus dem Produkt des magnetischen Flusses $\Phi(d_L, i)$ und der Reihenschaltung der magnetischen Widerstände des Eisenjochs $R_{m, \text{Eisenjoch}}$, des Rotors $R_{m, \text{Rotor}}$ und der beiden Luftstrecken $R_{m1, \text{Luft}}$ und $R_{m2, \text{Luft}}$ ergibt.

$$\Theta = \Phi(d_L, i) (R_{m, \text{Eisenjoch}} + R_{m, \text{Rotor}} + R_{m1, \text{Luft}} + R_{m2, \text{Luft}}) \quad (1)$$

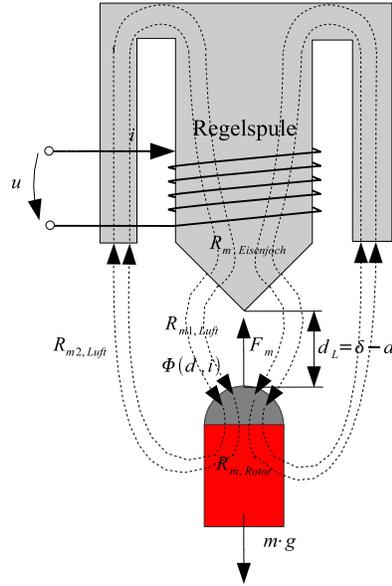


Abbildung 4. Modell

Das magnetische Feld im Luftspalt zwischen Eisenjoch und Schwebekörper wird als annähernd homogen betrachtet. Darüberhinaus wird angenommen, dass die beiden Weglängen (Eisenjoch \rightarrow Rotor und Rotor \rightarrow Eisenjoch) im Mittel $2d_L$ entsprechen. Daher folgt für den magnetischen Widerstand der beiden Luftstrecken:

$$R_{m, \text{Luft}} = R_{m1, \text{Luft}} + R_{m2, \text{Luft}} = \frac{2 d_L}{A \mu_0 \underbrace{\mu_{r, \text{Luft}}}_{=1}} = \frac{2 d_L}{A \mu_0}. \quad (2)$$

Für das als homogen angenommene magnetische Feld im Eisen (Eisenjoch und Rotor) ergibt sich entsprechend:

$$R_{m, \text{Eisen}} = R_{m, \text{Eisenjoch}} + R_{m, \text{Rotor}} = \frac{l_{\text{Fe}}}{A \mu_0 \mu_r}. \quad (3)$$

Aus Gleichung (1), (2) und (3) folgt:

$$\Theta = \Phi(d_L, i) \frac{1}{A \mu_0} \left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2 d_L \right). \quad (4)$$

Unter Verwendung des Durchflutungsgesetzes $\Theta = i N$ lässt sich Gleichung (4) nach dem magnetischen Fluss Φ auflösen:

$$\Phi(d, i) = \mu_0 A N \frac{i}{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2 d_L\right)}. \quad (5)$$

Die Luftspatlänge d_L wird im Folgenden als Differenz aus maximal möglichem Luftspalt δ und dem Abstand d des Schwebekörpers bezogen auf die damit definierte untere Grenze dargestellt:

$$d_L = \delta - d. \quad (6)$$

Für die Flussverkettung Ψ gilt $\Psi = N \Phi(d, i)$ bzw. $\Psi = L(d) i$, so dass folgt:

$$\Psi = \frac{\mu_0 A N^2}{\underbrace{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2 \delta - 2 d\right)}_{=L(d)}} i. \quad (7)$$

Die Energie des magnetischen Feldes $E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \Psi i$ lässt sich daher mit der in Gleichung (7) definierten Ersatzinduktivität $L(d)$ auch darstellen als:

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L(d) i^2. \quad (8)$$

3.2 Aufstellung der Systemenergie

Für den Schwebekörper kann aufgrund der Führung sowohl die Verschiebung in der $y - z$ Ebene als auch die Rotation um alle drei Achsen vernachlässigt werden. Daher sind für das Magnetlager nur die folgenden Energieanteile zu beachten:

- Kinetische Energie durch Translation des Schwerpunktes:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{d}^2. \quad (9)$$

- Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = - m g (\delta - d). \quad (10)$$

- Magnetische Energie:

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L(d) i^2. \quad (11)$$

Da der Strom i die Zeitableitung der generalisierten Koordinate $Q = \int i dt$ ist, kann die magnetische Energie analog zur kinetischen Energie betrachtet werden.

3.3 Lagrange Bewegungsgleichung

Es ergibt sich aus den Energien folgende Lagrangedichtefunktion:

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (12)$$

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} + E_{\text{magn}} - E_{\text{pot}}, \quad (13)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{d}^2 + \left(\frac{L}{2}\right) i^2 + m g (\delta - d). \quad (14)$$

Es wird nun die Lagrange Bewegungsgleichung für die erste generalisierte Koordinate ausgewertet.

$$\boxed{q = d:}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} \quad (15)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (m \dot{d}) + m g - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} i^2 \quad (16)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (m \dot{d}) + m g - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\mu_0 A N^2}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d} \right) i^2 \quad (17)$$

$$0 = m \ddot{d} + m g - \mu_0 A N^2 \frac{i^2}{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d \right)^2} \quad (18)$$

Im zweiten Schritt wird die Euler-Lagrange Gleichung für die zweite generalisierte Koordinate aufgestellt.

$$\boxed{q = \int i dt:}$$

$$-i R + U = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\int i dt)} \quad (19)$$

$$-i R + U = \frac{d}{dt} (L i) \quad (20)$$

$$-i R + U = i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} \quad (21)$$

$$-i R + U = \frac{d}{dt} \left(\mu_0 A N^2 \frac{1}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d} \right) i + L \frac{di}{dt} \quad (22)$$

$$-i R + U = 2 \mu_0 A N^2 \frac{1}{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d \right)^2} i \dot{d} + \frac{\mu_0 A N^2}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d} \frac{di}{dt} \quad (23)$$

Durch Umstellen ergibt sich:

$$\frac{di}{dt} = \left[\frac{\mu_0 A N^2}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d} \right]^{-1} \left[\frac{-2 \mu_0 A N^2}{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d \right)^2} i \dot{d} - i R + U \right]. \quad (24)$$

Unter Verwendung von (7) und der zeitlichen Ableitung (26) vereinfacht sich die Gleichung (23) zu:

$$\frac{di}{dt} = L^{-1} \left(\dot{L}(d) i - i R + U \right), \quad (25)$$

mit

$$\dot{L}(d) = \frac{-2 \mu_0 A N^2}{\left(\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r} + 2\delta - 2d \right)^2} \dot{d}. \quad (26)$$

Es ergibt sich ein Signalflussplan (Abb. 5) bestehend aus einem elektrischen (Gl. (25)), einem magnetischen und mechanischem Teilsystem.

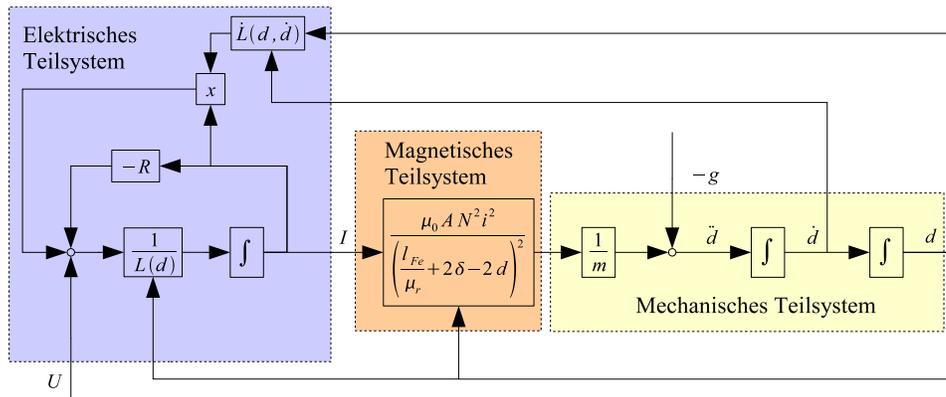


Abbildung 5. Signalfussplan des spannungsgesteuerten Magnetlager

An der Versuchsanlage wird eine unterlagerte Stromregelung verwendet, so dass anstatt der Gleichungen (25) das folgende PT_1 -Verhalten angenommen werden kann:

$$i = \frac{K_{St}}{T_{St}s + 1} i_s. \quad (27)$$

Im Signalfussplan wird entsprechend das elektrische Teilsystem durch den Stromsteller ersetzt (Abb. 6).

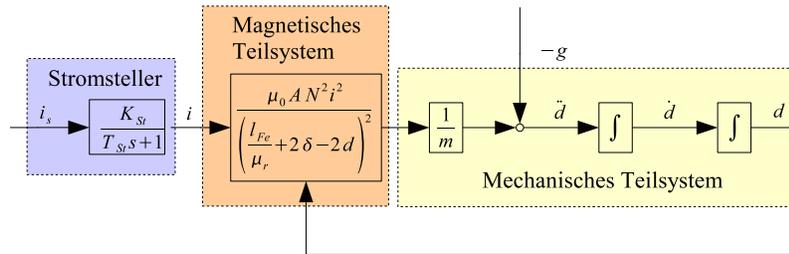


Abbildung 6. Signalfussplan des Magnetlager mit Stromregelung

Da die charakteristische Zeitkonstante des Stromstellers verglichen mit der restlichen Systemdynamik vernachlässigbar ist, ergibt sich das folgende Entwurfsmodell:

$$\ddot{d} - \underbrace{\frac{\mu_0 A N^2}{m}}_{=:a} \frac{i^2}{\left(\underbrace{\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + 2\delta - 2d}_{=:k_1}} \right)^2} = -g. \quad (28)$$

3.4 Nichtlineares Zustandsmodell

Aus dem oben beschriebenen Euler-Lagrange System (28) ergibt sich unter Einführung des Zustandsvektors:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

folgendes nichtlineare Zustandsmodell:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a \frac{i^2}{(k_1 - 2x_1)^2} - g \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Die beiden Parameter a und k_1 wurden experimentell bestimmt:

$$a = 0,00356 \frac{Nm^2}{kg A^2}, \quad (31)$$

$$k_1 = 0,0379 m. \quad (32)$$

Für den Strom soll eine Stellgrößenbegrenzung von $2A$ eingehalten werden. Es sind Luftspalte zwischen 0 und $14mm$ realisierbar.

4 Versuchsvorbereitung

1. Das nichtlineare Streckenmodell ist in Simulink zu implementieren.
2. Die nichtlinearen Zustandsgleichungen sind im Arbeitspunkt $x_{AP} = 7mm$ zu linearisieren. Es ist eine Analyse der Strecke durchzuführen:
 - Stabilität,
 - Streckenzeitkonstanten,
 - Pol-Nullstellen Diagramm,
 - Bode Diagramm.
3. Es ist mittels Hurwitz-Kriteriums zu überprüfen, welcher der vier Standardregler (P, PI, PD und PID) eine Stabilisierung erlaubt. Zeichnen Sie für die stabilisierenden Regler jeweils eine Stabilitätskarte.
4. Als gewünschtes dynamisches Verhalten des geschlossenen Regelkreises wird ein schwingungsfähiges PT_2 -Glied mit $D \geq 0,7$ und $\omega_0 \geq 14 \frac{1}{s}$ veranschlagt.

5. Anhand der Wurzelortskurve sind die Reglerzeitkonstanten und die offene Kreisverstärkung derart zu bestimmen, dass die oben getroffenen Anforderungen an die Regelgüte erfüllt werden.

5 Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einem nichtminimalphasigen System?
2. Wodurch wird bestimmt ob ein Achsenabschnitt der reellen Achse Teil der Wurzelortskurve ist?
3. Wie wird die Anzahl und Lage der Asymptoten der Wurzelortskurve bestimmt?
4. Wie kann aus einem Punkt der Wurzelortskurve die offene Kreisverstärkung K_0 ermittelt werden?
5. Wie sieht die Wurzelortskurve für ein schwingungsfähiges PT₂-Glied mit folgenden Parametern aus?

D	0,7	0,3	0,1	0,7	0,3	0,1
ω_0	$1 \frac{1}{s}$	$1 \frac{1}{s}$	$1 \frac{1}{s}$	$10 \frac{1}{s}$	$10 \frac{1}{s}$	$10 \frac{1}{s}$

Tabelle 1.

6 Versuchsdurchführung

1. Die entworfenen Regler sind an der Anlage zu implementieren. Es ist dabei möglich die erstellten Simulinkblöcke direkt zu übernehmen.
2. Testen der Regler anhand eines geeigneten Sollwertverlaufes (z.B. Treppenfunktion Abbildung (7)).

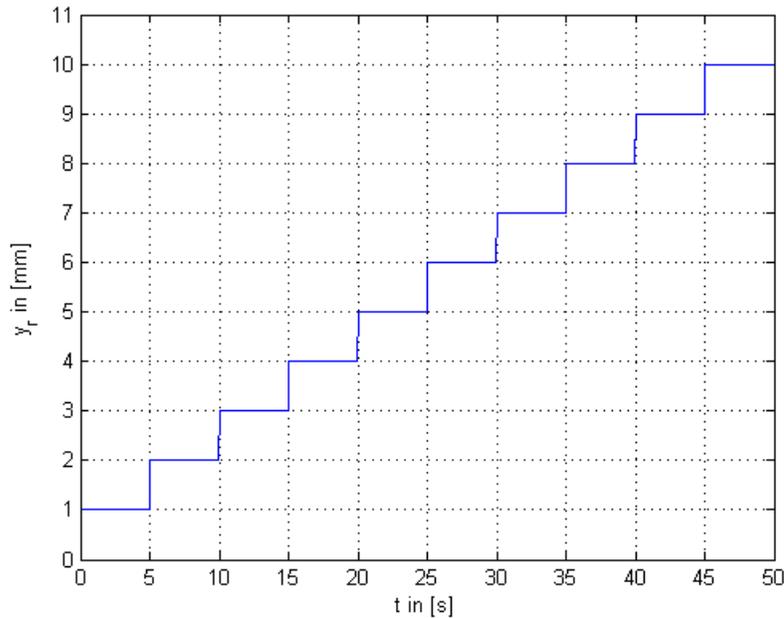


Abbildung 7. Treppenfunktion

3. Die erhaltenen Ergebnisse sind zu interpretieren. Es ist ein Vergleich zwischen den beiden Reglern vorzunehmen.

7 Literatur

1. *Föllinger, O.*: Regelungstechnik. Hüthig Buch Verlag. 1994.
2. *Göldner, K.*: Mathematische Grundlagen der Systemanalyse - Band 2. Fachbuchverlag Leipzig. 1989.
3. *Reinisch, K.*: Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme. Verlag Technik. 1979.
4. *Unbehauen, H.*: Regelungstechnik 1, Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme. Vieweg. 2000.
5. *Dorf, C. B.; Bishop, H. R.*: Moderne Regelungssysteme. Pearson Studium. 2006.