Otto-von-Guericke-Universität-Magdeburg
Institut für Automatisierungstechnik

Praktikum
Lineare Systeme

Datum: 21.11.06
Gruppe: G3 STK-03-A

Martin Braunschweig
Andreas Bück
Boris Bensmann
Katharina Holstein

Betreuer: Dipl.-Ing. M. Fütterer

1. Versuchsvorbereitung

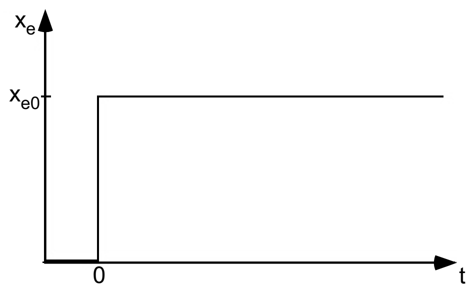
1.) Die Sprungantwort ist das Antwortverhalten eines Systems auf die Sprungfunktion, welche als Testsignal auf das System aufgegeben wird:

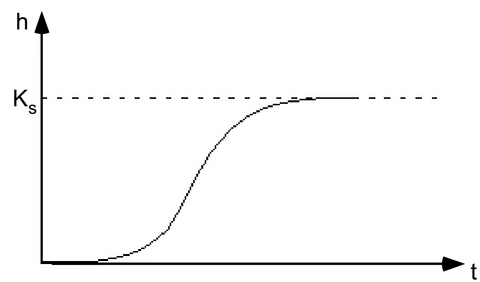
$$x_e(t) = x_{e0} \cdot E(t)$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Die Übergangsfunktion beschreibt die normierte Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{x(t)}{y_0} \qquad K_s = \frac{x(t \to \infty)}{y_0}$$



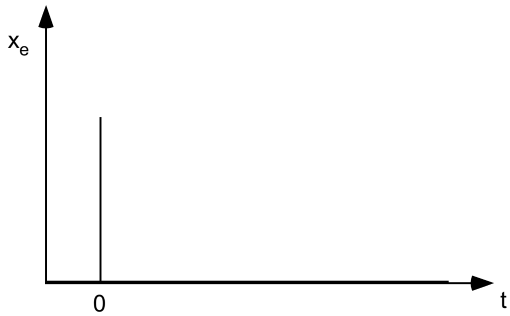


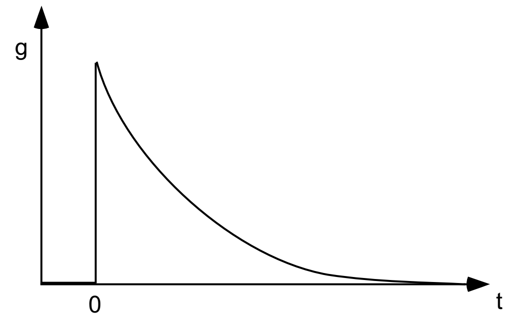
2.) Die Gewichtsfunktion (Impulsantwort) beschreibt das Antwortverhalten des Systems auf den Einheitsimpuls (Diracimpuls):

$$x_e(t) = x_{e0} \cdot T \cdot \delta(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \ \ t > 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$





3.) Im Zeitbereich wird das Übertragungsverhalten des Systems mittels Differentialgleichungen für verschiedene Testfunktionen berechnet. Die Testfunktionen können aperiodischer Natur sein (Impuls-, Sprung-, Anstiegsfunktion) oder aber auch periodischer (z.B. Sinusfunktion). Die Analyse der periodischen Funktionen liefert das dynamische Verhalten des Systems im Frequenzbereich. Somit beschreibt der Frequenzgang eines Systems das Verhältnis der sinusförmigen Ausgangsschwingung zur sinusförmigen Eingangsschwingung in komplexer Form für alle Kreisfrequenzen:

$$F(j\omega) = \Re\left\{F(j\omega)\right\} + j \cdot \Im\left\{F(j\omega)\right\}$$

$$\text{oder } F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot \exp(j\varphi(\omega))$$

$$\text{mit } |F(j\omega)| = \sqrt{\Re^2\left\{F(j\omega)\right\} + \Im^2\left\{F(j\omega)\right\}}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi\left\{F(j\omega)\right\} = \arctan\frac{\Im\left\{F(j\omega)\right\}}{\Re\left\{F(j\omega)\right\}}$$

Die Frequenzgangfunktion kann aus der Übertragungsfunktion ermittelt werden:

$$F(j\omega) = G(s)|_{j\omega} \quad \rightarrow \quad G(s) = F(\sigma + j\omega)$$

Frequenzgang und Übertragungsfunktion eines Übertragungselementes besitzen die gleiche Struktur.

4.) Bei minimalphasigen Systemen treten keine Pol-/ Nullstellenkürzungen in der Übertragungsfunktion auf. Das bedeutet, dass bei diesem System zum Verlauf des Betrages im Bodediagramm (siehe 5.) der Phasengang minimal ist.

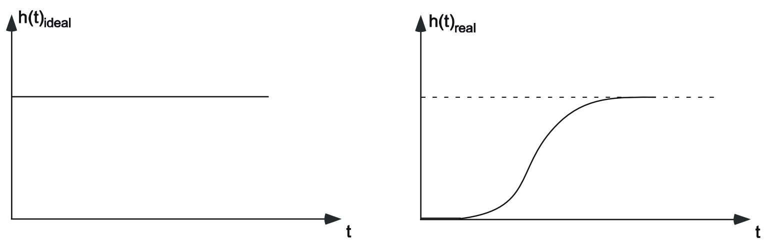
5.) Betrachtet wird die Ortskurve des offenen Kreises: $F_0(j\omega) = 0$. Ordnet man nun jedem Punkt $j\omega$ eine komplexe Zahl in der imaginären Ebene zu, so erhält man Punkte in der z-Ebene.

Durchläuft ω vollständig von $-\infty$ bis $+\infty$ so entsteht in der z-Ebene eine Kurve – die Ortskurve. Auf Grund der Symmetrie wird sich in der Darstellung der Ortskurve meist auf $0 \leq \omega \leq \infty$ beschränkt.

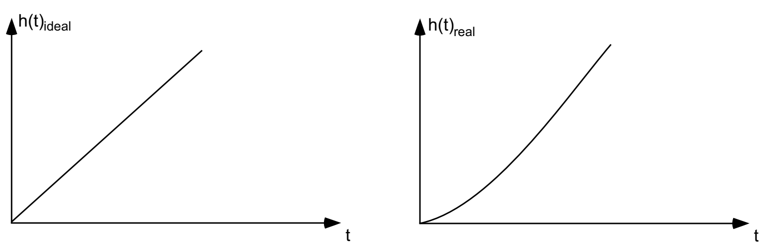
Trägt man $|F_0(j\omega)|$ und $\varphi_0(\omega)$ des offenen Kreises $F_0(j\omega)$ über die Kreisfrequenz ω bei einem logarithmischen Maßstab für Betrag und Kreisfrequenz auf, so erhält man das Bodediagramm.

6.) Grundtypen linearer dynamischer Übertragungsglieder:

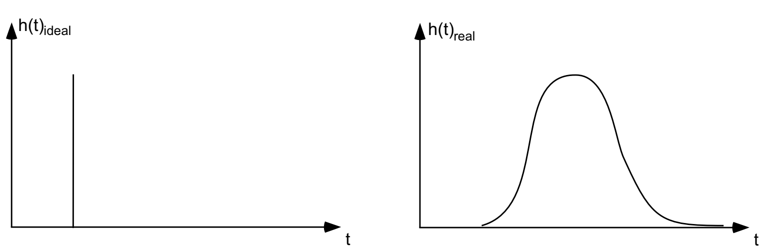
P-Glied (proportional-übertragendes Glied): $G(s) = K$



I-Glied (integrierendes Glied): $G(s) = \frac{1}{s}$



D-Glied (differenzierendes Glied): $G(s) = s$



7.) Der Hebel stellt ein reales physikalisches System für das P-Glied dar.

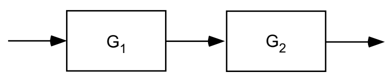
Ein I-Glied beschreibt zum Beispiel einen Wassertank.

Das D-Glied ist ein Grundelement zur Beschreibung von zum Beispiel Stoßdämpfern.

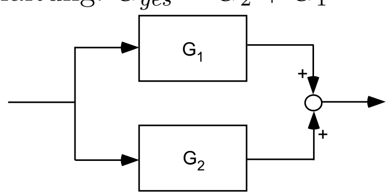
8.) Die Ordnung eines Systems wird durch die Anzahl der Speicher im System bestimmt. In der Differenzialgleichung ist die Ordnung des Systems an der höchste Ableitung ablesbar. Im Frequenzgang kann liest man die Ordnung an der höchsten Potenz von $j\omega$ im Nenner der Übertragungsfunktion ab.

9.) Lineare Übertragungsglieder können auf drei Arten zusammengeschaltet werden:

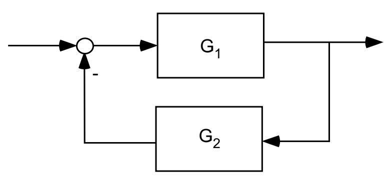
Reihenschaltung: $G_{ges} = G_2 \cdot G_1$



Parallelschaltung: $G_{ges} = G_2 + G_1$



Rückkopplung: $G_{ges} = \frac{G_2 G_1}{1+G_2 \cdot G_1}$



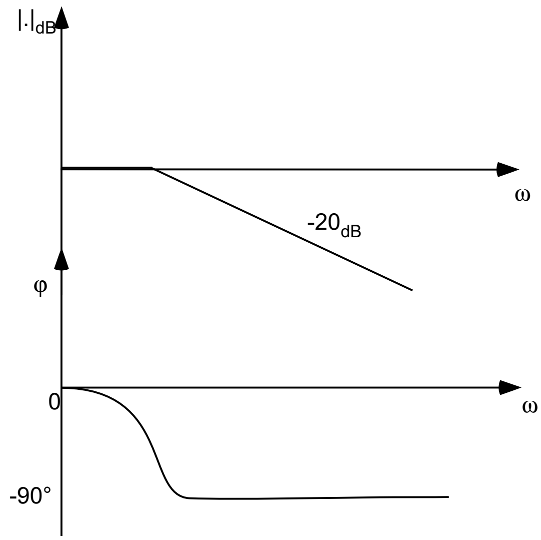
10.) + **11.)** + **12.)**

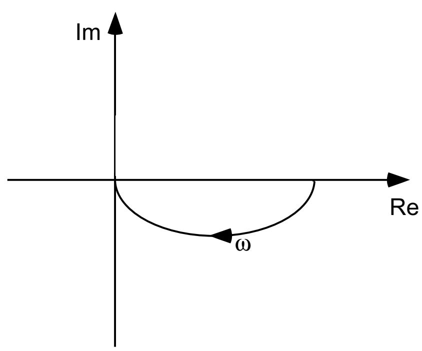
Gesucht sind die Differentialgleichung, die Übertragungsfunktion und der Frequenzgang der angegebenen Strecken. Diese werden jeweils in der eben genannten Reihenfolge angegeben. Weiterhin werden die Ortskurve und die Übergangsfunktion (h über t)

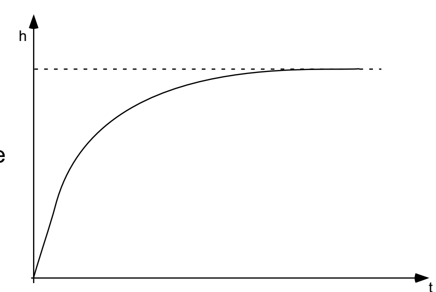
- PT_1-Strecke:

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

$$T\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t} = kx_e$$



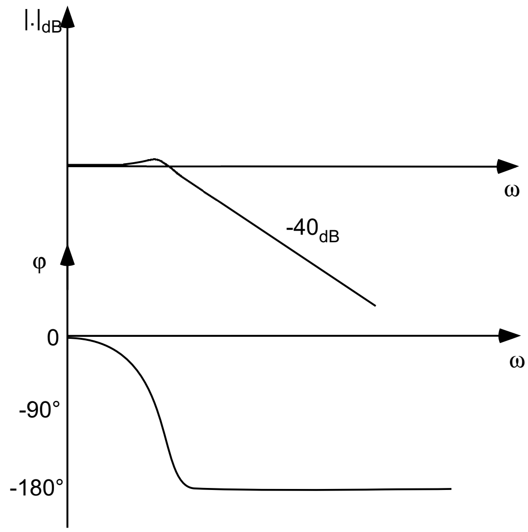


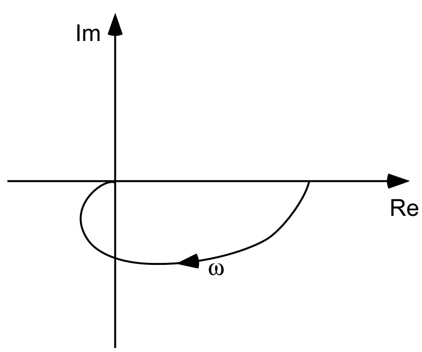


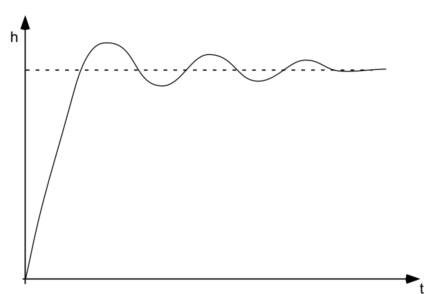
- PT_2-Strecke:

$$G(s) = \frac{k}{T_0^2 s + 2DT_0 s + 1}$$

$$T^2 \ddot{x}_a + 2DT\dot{x}_a + x_a = kx_e$$



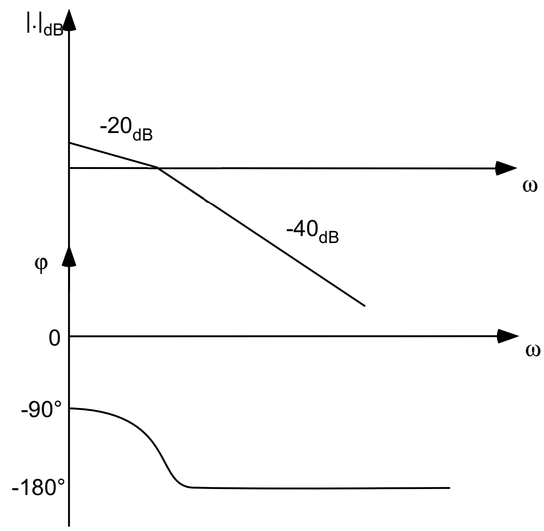


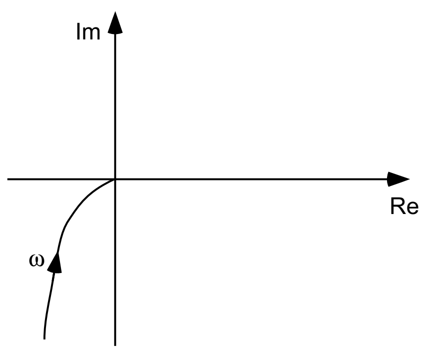


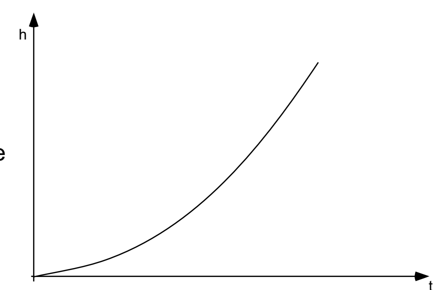
- IT_1-Strecke:

$$G(s) = \frac{k}{T_1 s(1 + Ts)}$$

$$T\ddot{x}_a + \dot{x}_a = kx_e$$



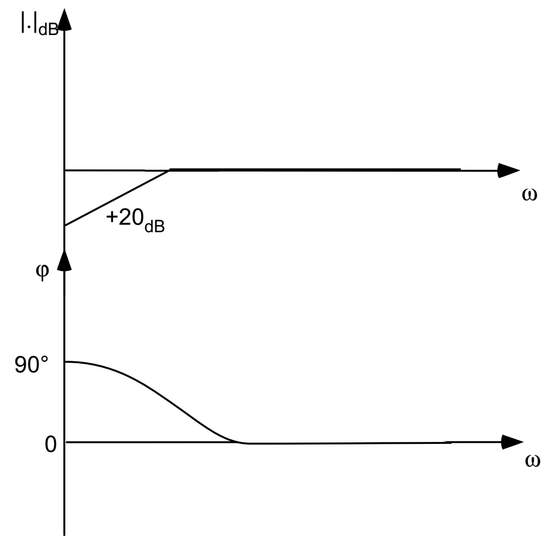


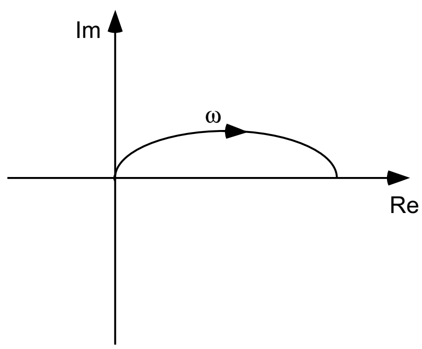


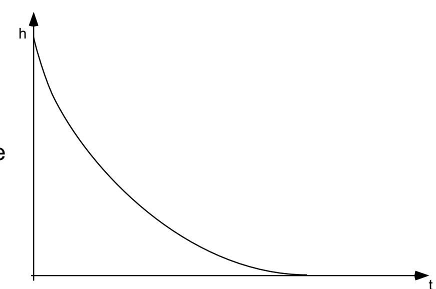
- DT_1-Strecke:

$$G(s) = \frac{ks}{1+Ts}$$

$$T\dot{x}_a + x_a = k\dot{x}_e$$







13.) Die Identifikation von PT_1 und PT_2 Strecken kann bei vorhandener Übergangsfunktion mit verschiedenen Verfahren durchgeführt werden. Dabei beziehen sich alle ermittelten T-Werte auf Tabellenwerte aus z.B. [1]

So kann an die Übergangsfunktion die Wendetangente im Wendepunkt angelegt werden. Durch Ablesen des Schnittpunktes mit der x-Achse (T_u) und des Differenzschnittpunktes zwischen y-Achse und T_u (T_a) kann über Tabellen das T bestimmt werden. Dabei geht man auch für die PT_2 Strecke von gleichen Zeitkonstanten aus.

Über das Verfahren von Strejc können mittels Bestimmung von h_{70} und folgend von $h(T_{70/4})$ und einem bestimmten α die einzelnen T's der Strecke berechnet werden.

Weiterhin kann die Strecke über das Verfahren von Radtke bestimmt werden. Dabei werden aus h_{63} und dem zugehörigen $h(T_{63}/2)$ die T's bestimmt. Bei diesem Verfahren wird von gestaffelten Zeitkonstanten ausgegangen:

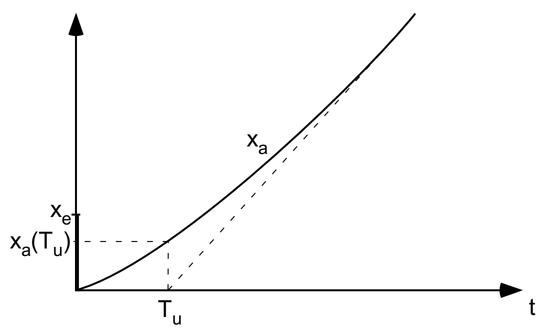
$$G(s) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \frac{T}{i} s)}$$

Weist die Übergangsfunktion der PT_2-Strecke eine Schwingung auf, so können über Frequenz (T), Anregelzeit (T_a) und Amplitude die Streckenparameter bestimmt werden.

$$D = \frac{\ln \frac{T_a}{T_a+1}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{T_a}{T_a+1}\right)^2}}$$

$$T_0 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{1 - D^2}$$

14.) Zur Identifikation von IT_n-Strecken wird wiederum eine zeichnerische Auswertung der Sprungantwort verwendet.



Die Ordnung des Systems kann über folgende Gleichung und Tabellen [2] bestimmt werden:

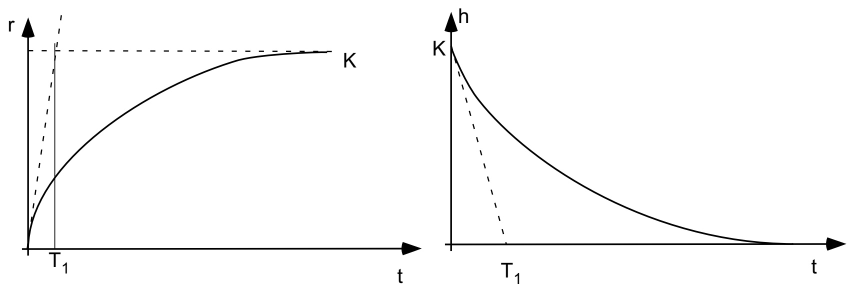
$$K_s K_I = \frac{x_a(t_{m1})}{x_{e0}(t_{m1} - T_u)} \quad \text{mit } t_{m1} \gg T_u$$

$$x_u = \frac{x_a(T_u)}{x_{e0 \cdot K_s K_i T_u}} \quad \text{wobei gilt: } T_u = \sum_i T_i$$

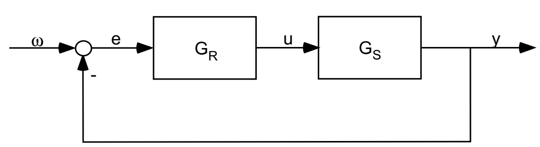
Die Ordnung des Systems bestimmt somit auch die einzelnen Zeitkonstanten (n gleiche):

$$T_i = \frac{T_u}{n}$$

15.) Zur Ermittlung einer DT_1-Strecke eignen sich Sprünge oder Rampen als Testsignale, sodass man Sprungantworten bzw. Rampenantworten als Antwortsignal. Aus dem Schnittpunkt des Anstieges der Funktion in ihrem Ursprung mit der Endwertgeraden lässt sich das T_1 bestimmen.



16.) Die Dämpfung D und die Zeitkonstante T_0 des Regelkreises lassen sich wie folgt berechnen:



$$G_s(s) = \frac{K_s}{T_s S + 1} \qquad G_r(s) = \frac{1}{T_I s}$$

$$G(s) = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{G_s G_r}{1 + G_r G_s} = \frac{K_I K_s}{T_s^2 s^2 + s + K_I K_s} = \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1}$$

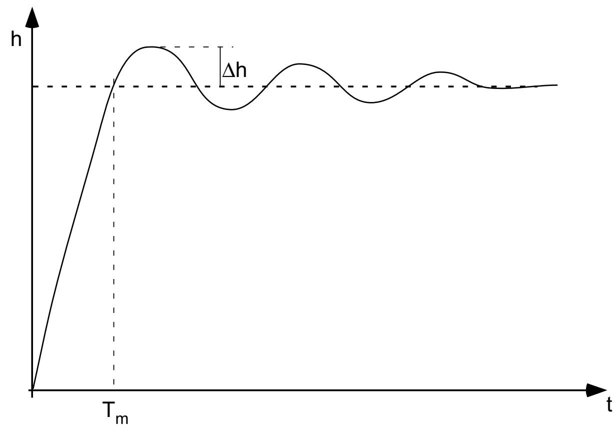
$$\rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{T_s}{K_I K_s}} \qquad D = \frac{1}{2K_I K_s T_0}$$

17.) Aus der Überschwingweite Δh lässt sich die Dämpfung D des Systems bestimmen:

$$D = \frac{\ln \frac{\Delta h}{\Delta h+1}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{\Delta h}{\Delta h+1}\right)}}$$

Aus der Zeit bis zum ersten Überschwingen (T_m) und der eben berechneten Dämpfung lässt sich das T_0 berechnen:

$$T_0 = \frac{T_m}{\pi}\sqrt{1 - D^2}$$



18.) Der Regelkreis ist schematisch genauso aufgebaut, wie in Aufgabe 16. in der Graphik dargestellt.

$$G_s(s) = \frac{K_s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \qquad G_r(s) = K_r$$

$$G_0 = G_s G_r = \frac{K_s K_r}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= W(s) - Y(s) = W(s) - G_0 \cdot E(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_0(s)} W(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{K_s K_r + (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \end{aligned}$$

Somit berechnet sich die bleibende Regelabweichung zu:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \frac{1}{1 + K_s K_r}$$

Literatur

[1] Reinisch, K.: *Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme*, Verl. Technik 1979

[2] Lutz, H., Wendt, W.: *Taschenbuch der Regelungstechnik*, Verl. Harri Deutsch 2005