

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

AUTOMATISIERUNGSTECHNIKPRAKTIKUM

Helikopterreglung

13. Mai 2015

Autoren

Pascal BOCK

Marius HÖRNSCHEMEYER

Jakob KÜBLER

Marek MERTEN

Betreuer

Dipl. Ing. Christian KUNDE

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Beschreibung des Versuches	3
1.2	lineares Zustandsraummodell	3
1.3	Eingänge u_1 und u_2	4
1.3.1	Implementierung mittels Simulink	6
2	Versuchsvorbereitung	6
2.1	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	6
2.1.1	Steuerbarkeit	6
2.1.2	Beobachtbarkeit	7
2.2	Beobachterentwurf	8
2.2.1	Alternativen zum Beobachter	9
2.3	Reglerentwurf	9
2.3.1	optimale Regler	9
2.3.2	LQ-Regler	10
2.3.3	Implementierung in <i>MATLAB</i>	11
2.4	Vorfilter	11
2.5	integrale Erweiterung	13
2.5.1	Zustandsrückführung für integrale Erweiterung	14
3	Versuchsdurchführung	15
3.1	Ergebnisse	15
3.1.1	Auslenkung Vorfilter	15
3.1.2	Auslenkung Integral	15
3.1.3	Trajektorie Vorfilter	16
3.1.4	Trajektorie Integral	16
A	erstellte Graphiken aus Messwerten	17
A.1	Auslenkung mit Vorfilter	18
A.2	Auslenkung mit integraler Erweiterung	20
A.3	Verfolgen einer Trajektorie mit Vorfilter	21
A.4	Verfolgen einer Trajektorie mit integraler Erweiterung	22

1 Grundlagen

1.1 Beschreibung des Versuches

Aufgabe des Versuchs ist es eine Regelung für einen Laborhelikopter zu entwerfen. Dabei ist das Modell auf Regel- und Steuerbarkeit zu überprüfen und ein Beobachter und Vorfilter zu entwerfen. Zudem soll durch eine integrale Erweiterung der Zustände die bleibende Regelabweichung auf Null gesenkt werden.

1.2 lineares Zustandsraummodell

Der Helikopter lässt sich auf folgendes lineares Zustandsraummodell zurückführen,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{array} \right\} \Sigma_1 \quad (\text{MGR-1})$$

mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{a_1, a_2\} \in \mathbb{R} \quad (\text{MGR-2})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \{b_2, a_3\} \in \mathbb{R} \quad (\text{MGR-3})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{MGR-4})$$

$$D = 0 \quad (\text{MGR-5})$$

Die Konstanten sind mit folgenden Werten gegeben:

$$a_1 = 0.4 \quad (\text{MGR-6})$$

$$a_2 = -1.46 \quad (\text{MGR-7})$$

$$a_3 = 0.116 \quad (\text{MGR-8})$$

$$b_1 = 0.55 \quad (\text{MGR-9})$$

$$(\text{MGR-10})$$

Die Zustände, Eingänge und Ausgangsgrößen sind wie folgt definiert:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{MGR-11})$$

mit $[\varphi_i] = \text{rad}$ beziehungsweise $[\dot{\varphi}_i] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Dabei ist φ_1 der Radialwinkel und beschreibt die Auslenkung des Helikopters entlang der Drehachse, φ_2 ist der Höhenwinkel und φ_3 ist der Neigungswinkel des Helikopters. $\dot{\varphi}_i$ beschreibt die erste Ableitung des Winkel und somit die entsprechende Geschwindigkeit.

Das Blockschaltbild für Σ_1 ergibt sich wie folgt:

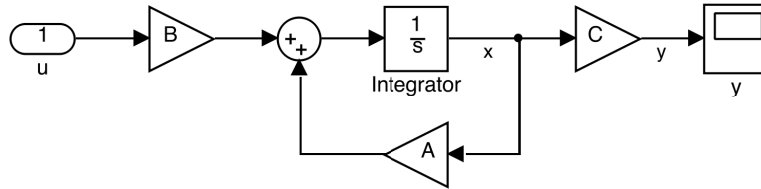


Abbildung MGR-1: Blockschaltbild des linearen Modell Σ_1

1.3 Eingänge u_1 und u_2

Die Eingänge u_1 und u_2 sind nicht mit den Spannungen der beiden Elektromotoren u_f und u_b zu verwechseln.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Eingängen und Spannungen:

$$u_1 = (\text{sign}(u_b)u_b^2 + \text{sign}(u_f)u_f^2) \cdot \cos(\varphi_3) \quad (\text{MGR-12})$$

$$u_2 = (\text{sign}(u_b)u_b^2 - \text{sign}(u_f)u_f^2) \quad (\text{MGR-13})$$

Die Elektromotoren unterliegen physikalischen Beschränkungen, daher muss gelten:

$$u_f, u_b \in [-5V, +5V] \quad (\text{MGR-14})$$

Damit die Bedingung aus Gleichung MGR-14 überprüft werden kann muss die Umkehrfunktion gebildet werden und in Simulink implementiert werden.

Mittels Substitution folgt:

$$a = \text{sign}(u_b)u_b^2 \quad (\text{MGR-15})$$

$$b = \text{sign}(u_f)u_f^2 \quad (\text{MGR-16})$$

$$u_1 = (a + b) \cdot \cos(\varphi_3) \quad (\text{MGR-17})$$

$$\Rightarrow b = \frac{u_1}{\cos(\varphi_3)} - a \quad (\text{MGR-18})$$

$$u_2 = a - b \quad (\text{MGR-19})$$

$$\Rightarrow a = u_2 + b \quad (\text{MGR-20})$$

Einsetzen liefert folgende Ausdrücke für die explizite Berechnung von a und b mittels der Eingänge u_1 und u_2 :

$$a = \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{u_1}{\cos(\varphi_3)} \right) \quad (\text{MGR-21})$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{\cos(\varphi_3)} - u_2 \right) \quad (\text{MGR-22})$$

Für die beiden Spannungen ergibt sich aus Gleichung MGR-15 und Gleichung MGR-16:

$$u_b = \text{sign}(a) \cdot \sqrt{|a|} \quad (\text{MGR-23})$$

$$u_f = \text{sign}(b) \cdot \sqrt{|b|} \quad (\text{MGR-24})$$

1.3.1 Implementierung mittels Simulink

In Simulink ergibt sich folgendes Blockschaltbild für die Umrechnung der Eingänge in Spannungen:

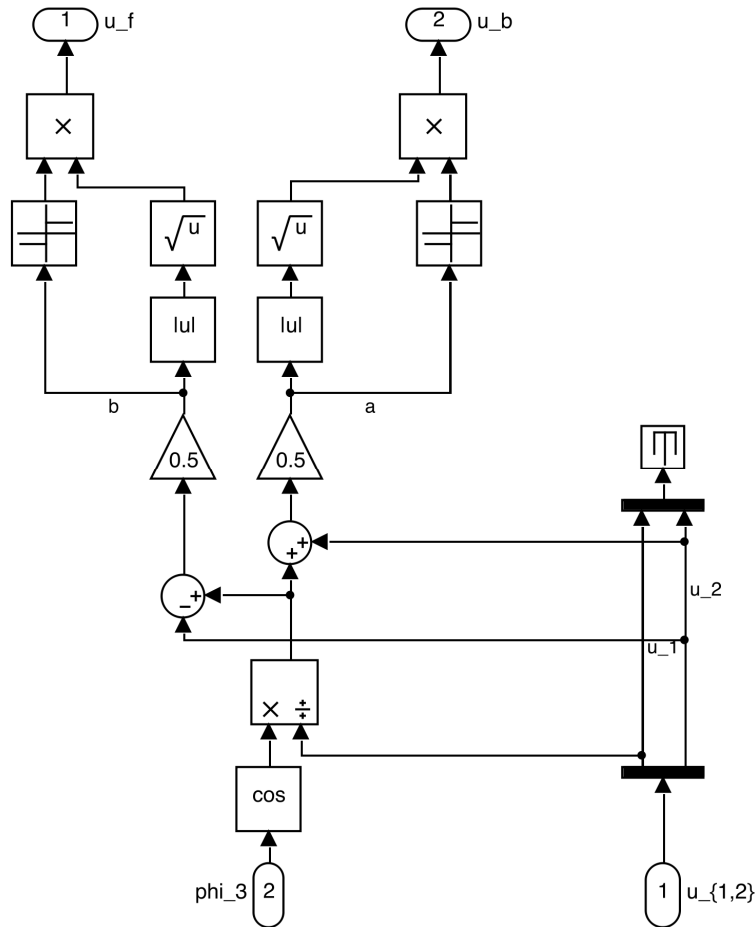


Abbildung MGR-2: Blockschaltbild der Umrechnungen von $u_{1,2}$ in die Spannungen $u_{f,b}$

2 Versuchsvorbereitung

2.1 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zu zeigen ist, dass das System Σ_1 steuerbar und beobachtbar ist.

2.1.1 Steuerbarkeit

Definition 1 (Steuerbarkeit) Ein System $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit t_e von jedem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\underline{u}_{[0,t_e]}$ in einen beliebig vorgegebenen Endzustand $\underline{x}(t_e)$ überführt werden kann. [1, S. 64]

Steuerbarkeitskriterium nach **KALMAN**

Ein System (A, B) ist vollständig steuerbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix S

$$S_S = \begin{pmatrix} A & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \times n \cdot m)} \quad (\text{MGR-1})$$

gilt:

$$\text{rang}(S_S) = n \quad (\text{MGR-2})$$

[1, S. 66]

2.1.2 Beobachtbarkeit

Definition 1 (Steuerbarkeit) Ein System Σ_1 heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand \underline{x}_0 aus dem über einem endlichen Intervall $[0, t_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\underline{u}_{[0, t_e]}$ und der Ausgangsgröße $\underline{y}_{[0, t_e]}$ bestimmt werden kann [1, S. 93]

Beobachtbarkeit nach **KALMAN**

Ein System (A, C) ist vollständig beobachtbar, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix S_B

$$S = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \cdot n \times n} \quad (\text{MGR-3})$$

gilt:

$$\text{rang}(S_B) = n \quad (\text{MGR-4})$$

[1, S. 95]

Umsetzung in **MATLAB**

Mit **MATLAB** können diese Matrizen über die Befehle

```
1 S_S=ctrb(A,B);    % Steuerbarkeitsmatrix
2 S_B=obsv(A,C);    % Beobachtbarkeitsmatrix
```

erzeugt und ausgewertet werden:

```
1 r_S=rank(S_S);    % Rank der Steuerbarkeitsmatrix
2 r_B=rank(S_B);    % Rank der Beobachtbarkeitsmatrix
```

Für das System Σ_1 erhält man

$$r_S = 6 \quad (\text{MGR-5})$$

$$r_B = 6 \quad (\text{MGR-6})$$

Damit haben die Matrizen vollen Rang und das System Σ_1 ist vollständig steuer- und beobachtbar.

2.2 Beobachterentwurf

Beim Laborhelikopter sind nicht alle sechs Zustände messbar. Für eine Messung stehen lediglich die drei Winkel $\varphi_{(1,2,3)}$ zur Verfügung. Für eine Zustandsrückführung werden jedoch alle Zustände benötigt.

Durch einen Beobachter wird ein Schätzwert für alle Zustände aus den Stell- und Regelgrößen erzeugt. Die Zustandsrückführung wird mit diesen Schätzwerten realisiert.

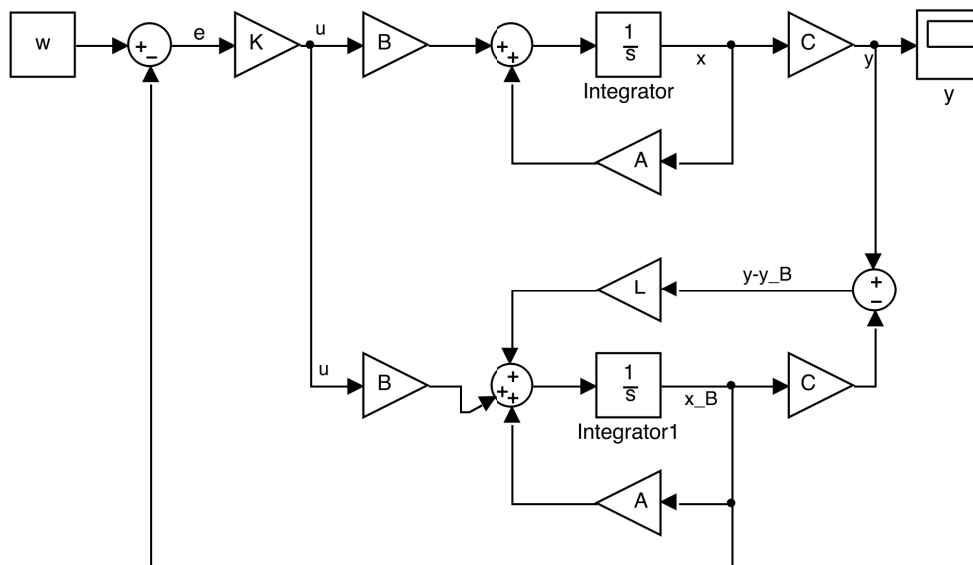


Abbildung MGR-1: Blockschaltbild des LUENBERGER-Beobachters

Dazu wird parallel zum System ein Beobachter geschaltet und mit dem gleichen Eingang beaufschlagt. Die Ausgangsgrößen von Beobachter und System werden verglichen und die Differenz wird dem Beobachter als *Fehler* zurückgegeben. Dieser Beobachter wird als *LUENBERGER*-Beobachter bezeichnet.

Für den Beobachter nach *LUENBERGER* ergibt sich folgendes Modell:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + u_B \quad (\text{MGR-7})$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (\text{MGR-8})$$

Dabei beschreibt gerade der zusätzliche Term \underline{u}_B in Gleichung MGR-7, den zurückgeführten Fehler zwischen Ausgang des Systems und Ausgang des Beobachters.

$$\underline{u}_B = L(\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \quad (\text{MGR-9})$$

Durch Umstellen erhält man

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (A - LC)\hat{\underline{x}} + B\underline{u} + L\underline{y} \quad (\text{MGR-10})$$

Damit der Beobachter die unbekannten Zustände schnell genug schätzen kann, müssen die Eigenwerte des Beobachters circa das drei- bis sechsfache der Systemeigenwerte sein. Dies kann über die Wahl der Beobachter Matrix L geschehen. In *MATLAB* kann dazu der *place*(·)-Befehl genutzt werden.

```
1 eig=[eig_1, eig_2, ..., eig_n]; %gewuenschte Eigenwerte des Beobachters
2 L=place(A,C,eig); % Beobachtermatrix L
```

Dabei müssen die gewünschten Eigenwerte des Beobachters vorher in der Variable *eig* gespeichert sein.

2.2.1 Alternativen zum Beobachter

Anstatt den Beobachter zu benutzen, um die nicht messbaren Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ zu schätzen, bietet sich folgende Alternative an:

Durch *Speicherung* der vorherigen und aktuellen Winkelposition, kann mittels linearer Regression eine Steigung berechnet werden, diese entspricht einer approximierten Winkelgeschwindigkeit zum aktuellen Zeitpunkt. Je kürzer die Intervalle umso näher kommt die Schätzung dem realen Wert bei einer idealen Messung von $\varphi_{(1,2,3)}$.

Dieses Verfahren ist jedoch sehr anfällig gegenüber Messrauschen und einzelnen Messfehlern (*Ausrutscher*), da diese eine stark andere Steigung und damit Geschwindigkeit vorgeben, als das reale System zu diesem Zeitpunkt besitzt.

2.3 Reglerentwurf

Die Regelung des System soll mittels eines LQ-Reglers erfolgen. Dabei wird die Reglermatrix K mit dem Regelfehler e , wie in Abbildung 2.2 dargestellt, als Eingang versorgt.

2.3.1 optimale Regler

Ein übliches Verfahren beim Entwurf von Reglern ist die Platzierung von Polen. Dabei wird die Dynamik durch Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Kreises bewusst im Hinblick auf zum Beispiel Einschwingzeit, Überschwingungen oder Bandbreite beeinflusst. Bei dieser Art der Reglerauslegung wird allerdings der *Energieaufwand* zur Erreichung des Regelziels außer Acht gelassen. [2]

Um die Güte eines Regler im Bezug auf den gesamten Verlauf der Stell- und Regelgrößen zu beurteilen wird eine Gütefunktion J eingeführt:

$$J_e(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) = \underline{y}^T(t_e)S\underline{y}(t_e) + \int_0^{t_e} \left(\underline{y}^T(t)Q_y\underline{y}(t) + \underline{u}^T(t)R\underline{u}(t) \right) dt \quad (\text{MGR-11})$$

$$= \underbrace{\underline{y}^T(t_e)S\underline{y}(t_e) + \int_0^{t_e} \left(\underline{y}^T(t)Q_y\underline{y}(t) \right) dt}_I + \underbrace{\int_0^{t_e} \left(\underline{u}^T(t)R\underline{u}(t) \right) dt}_{II} \quad (\text{MGR-12})$$

[1, S. 282]

Die Matrizen S, Q_y, R sind symmetrisch und positiv (semi-) definit.

Ziel des Reglerentwurfes ist das Finden eines $\underline{u}^*(t)$, welches die Gütefunktion minimal werden lässt:

$$\min_{\underline{u}(t)} J_e(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) = J_e(\underline{x}_0, \underline{u}^*(t)) \quad (\text{MGR-13})$$

Durch $\underline{u}^*(t)$ wird das System in bestmöglicher Weise im Zeitintervall $0 < t < t_e$ vom Ausgangszustand \underline{x}_0 in den Endzustand \underline{x}_e überführt. Dabei haben die Matrizen S, Q_y, R Einfluss auf die *bestmögliche Weise*:

Q_y Die Matrix Q_y beschreibt wie schnell die einzelnen Zustände \underline{x} des Systems zu Null gemacht werden sollen. Dabei ist vor allem die Hauptdiagonale entscheidend, meistens sind alle anderen Elemente Null. Die Matrix Q muss positiv definit sein, da $\{A, Q\}$ beobachtbar sein muss.

R Je größer die Elemente in R sind umso kleiner wird die entsprechende Stellgröße gehalten. Alle Elemente müssen positiv sein.

S Falls t_e nicht ausreichend ist um alle Zustände auf Null zu bringen, so muss S die Zustände zu Null werden lassen.

[3]

Eine weitere Möglichkeit der Interpretation ist, dass der Term $I(S, Q_y)$ aus Gleichung MGR-12 möglichst klein wird, wenn die Zustände von \underline{x}_0 schnell gegen Null \underline{x}_e laufen. Dabei gibt die Matrix Q_y die Wichtung der einzelnen Zustände vor.

Der Term $II(R)$ hingegen gibt den Aufwand oder die Energie für den Steuereingriff wieder. Die optimale Steuerung $\underline{u}^*(t)$ ist ein Kompromiss in Abhängigkeit von der Wichtung der *Geschwindigkeit* wie schnell die einzelnen Zustände gegen Null laufen (Q_y) und der *Kontrolle* über die einzelnen Stellgrößen (R).

2.3.2 LQ-Regler

Das so ermittelte $\underline{u}^*(t)$ ist allerdings noch kein Regler. Durch das Reglergesetz ist folgendes gegeben:

$$\underline{u}^*(t) = -K\underline{x}(t) \quad (\text{MGR-14})$$

Nicht alle über Gleichung MGR-12 ermittelten $\underline{u}^*(t)$ lassen sich als Rückführung nach Gleichung MGR-14 beschreiben. Daher wird das Optimierungsproblem Gleichung MGR-13 umgeformt zu:

$$\min_{\underline{u}(t)=-K\underline{x}(t)} J_e(x_0, \underline{u}(t)) = J_e(\underline{x}_0, \underline{u}(t) = -K^*(t, x_0)\underline{x}(t)) \quad (\text{MGR-15})$$

Die Matrix K muss dabei nicht konstant sein. Dieses kann umgangen werden, wenn man sich von der Bedingung eines finiten Zeithorizontes $t \in [0, t_e]$ löst und zu einer Betrachtung eines unendlichen Zeitintervalls übergeht. Für das Gütefunktional Gleichung MGR-12 bedeutet dieses den Wegfall des ersten Summanden aus I , da kein S mehr bei einer Betrachtung für $t \rightarrow \infty$ benötigt wird.

$$J(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) = \int_0^\infty (\underline{y}^T(t) Q_y \underline{y}(t) + \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t)) dt \quad (\text{MGR-16})$$

Das Minimierungsproblem ergibt sich zu:

$$\min_{\underline{u}(t)} J(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) = \min_{\underline{u}(t)=-K\underline{x}(t)} J(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) \stackrel{\text{stat. Opt.problem}}{=} \min_K J(\underline{x}_0, -K\underline{x}(t)) \quad (\text{MGR-17})$$

[1, S. 285]

Diese Lösung lässt sich als Regelung nach Gleichung MGR-14 darstellen. Die Reglermatrix K^* ist unabhängig von \underline{x}_0 , aber nicht die Lösung $\underline{u}^*(t)$. Dieses bedeutet, dass nach Gleichung MGR-14 die Stellgröße $\underline{u}(t), \forall t$ unabhängig von \underline{x}_0 nur aus $\underline{x}(t)$ berechnet werden kann.

2.3.3 Implementierung in MATLAB

In MATLAB kann der `lqr(·)`-Befehl zum erstellen der statischen Reglermatrix verwendet werden.

```
1 Q=diag([1,1,1,1,1,1]); %Besetzen der Hauptdiagonalen mit Werten
2 R=diag([1,1]); %Besetzen der Hauptdiagonalen mit Werten
3 SYS=ss(A,B,C,D); %Erstellen eines 'state space models'
4 [K,S,e] = lqr(SYS,Q,R); %Erstellen der Reglermatrix K
```

Alternativ zur Erstellung eines Zustandsraummodells über den `ss(·)`-Befehl können auch die Matrizen A und B angegeben werden.

2.4 Vorfilter

Wenn das System selbst keinen I -Anteil hat, dann kommt es zu einer bleibenden Regelabweichung $\underline{e}(t)$. Um die Sollwertvorgabe abzusichern, kann ein Vorfilter entwickelt werden. Dieser wird vor den Soll-Ist-Vergleich auf die Führungsgrößen geschaltet.

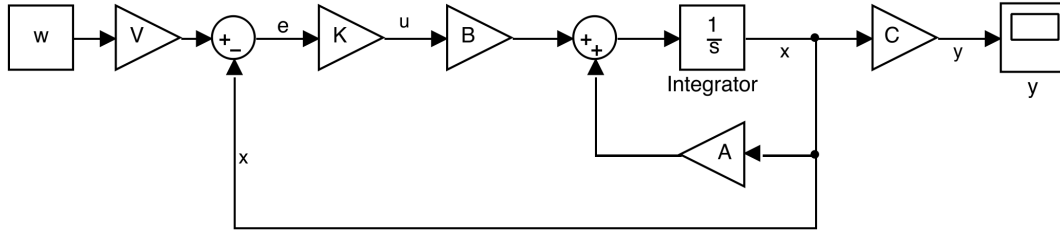


Abbildung MGR-2: Verschaltung eines Regelkreises mit Vorfilter V (ohne Beobachter)

Als Rückführung ergibt sich:

$$\underline{u} = K(\underline{\tilde{w}} - \underline{x}) \quad (\text{MGR-18})$$

Eingesetzt in das lineare System:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (\text{MGR-19})$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \quad (\text{MGR-20})$$

$$= A\underline{x} + BK\underline{\tilde{w}} - BK\underline{x} \quad (\text{MGR-21})$$

$$= (A - BK) \underline{x} + BK\underline{\tilde{w}} = 0 \quad (\text{MGR-22})$$

$$\Rightarrow \underline{x} = (A - BK)^{-1} BK\underline{\tilde{w}} \quad (\text{MGR-23})$$

Das System wird für den stationären Fall betrachtet, daher wird die Ableitung gleich Null gesetzt und es kann nach \underline{x} umgestellt werden.

Die Aufgabe des Vorfilters ist es die bleibende Regelabweichung zu verhindern. Es wird der Zusammenhang zwischen der Führungsgröße \underline{w} und der Ausgangsgröße \underline{y} benötigt.

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (\text{MGR-24})$$

$$= C(A - BK)^{-1} BK\underline{\tilde{w}} \quad (\text{MGR-25})$$

$$= \underbrace{C(A - BK)^{-1} BKV}_{\tilde{V}} \underline{w} \quad (\text{MGR-26})$$

Die Matrix \tilde{V} ist nicht grundsätzlich keine Einheitsmatrix, diese wird aber benötigt, damit gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = 0 \quad (\text{MGR-27})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}(t) - \underline{w}(t)) = 0 \quad (\text{MGR-28})$$

Es wird davon ausgegangen, dass $\underline{y}(t) = \underline{x}(t)$ gilt, da entweder alle Zustände gemessen

werden können, oder das System vollständig beobachtbar ist.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) - \underline{w}(t) = 0 \quad (\text{MGR-29})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(C (A - BK)^{-1} BK V \underline{w}(t) - \underline{w}(t) \right) \quad (\text{MGR-30})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[\underbrace{C (A - BK)^{-1} BK V}_{\stackrel{!}{=}\mathbb{1}} - \mathbb{1} \right] \underbrace{\underline{w}(t)}_{\neq 0} \right) \quad (\text{MGR-31})$$

$\mathbb{1}$ steht für die Einheitsmatrix entsprechender Dimension.

Aus Gleichung MGR-31 folgt, dass V so gewählt werden muss, dass das folgende Gleichungssystem gelöst wird.

$$C (A - BK)^{-1} BK V = I \quad (\text{MGR-32})$$

Im Falle von quadratischen Matrizen kann dies über eine Invertierung geschehen.

$$V = \left[C (A - BK)^{-1} BK \right]^{-1} \quad (\text{MGR-33})$$

In *MATLAB* kann der Befehl *linsolve(·)* für nicht quadratische Probleme genutzt werden. Für quadratische Matrizen kann die Invertierung mittels *inv(·)* geschehen.

```
1 A_lin=C*inv(A-B*K)*B*K; %inv(A) invertiert die Matrix A
2 B_lin=eye(3);           %eye(n) gibt eine nxn-Einheitsmatrix aus
3 V=linsolve(A_lin,B_lin);
```

2.5 integrale Erweiterung

Durch eine Integrale Erweiterung der Zustände werden zwei neue Zustände eingeführt. Diese sollen dafür sorgen, dass es keine bleibende Regelabweichung für die Zustände φ_1 und φ_2 gibt. Die integrale Erweiterung ist eine Alternative zum Vorfilter.

Die beiden neuen Zustände werden definiert als:

$$x_7 = \int e_1(t) dt = \int (x_1 - w_1) dt \quad (\text{MGR-34})$$

$$x_8 = \int e_2(t) dt = \int (x_2 - w_2) dt \quad (\text{MGR-35})$$

$$\Rightarrow \dot{x}_7 = x_1 - w_1 \quad (\text{MGR-36})$$

$$\Rightarrow \dot{x}_8 = x_2 - w_2 \quad (\text{MGR-37})$$

Stellt man nun ein System nach Gleichung MGR-1 auf, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = A_{int} \underline{x} + B_{int} \underline{u} - W \underline{w} \\ \underline{y} = C_{int} \underline{x} + D_{int} \underline{u} \end{array} \right\} \Sigma_2 \quad (\text{MGR-38})$$

mit den Matrizen:

$$A_{int} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{a_1, a_2\} \in \mathfrak{R} \quad (\text{MGR-39})$$

$$B_{int} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & a_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \{b_2, a_3\} \in \mathfrak{R} \quad (\text{MGR-40})$$

$$C_{int} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{MGR-41})$$

$$D_{int} = 0 \quad (\text{MGR-42})$$

Die Matrix W dient lediglich der Auswahl der richtigen Führungsgrößen $\underline{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{MGR-43})$$

2.5.1 Zustandsrückführung für integrale Erweiterung

Durch den neuen Term $-W\underline{w}$ in Gleichung MGR-38 verändert sich auch das Blockschaltbild wie folgt:

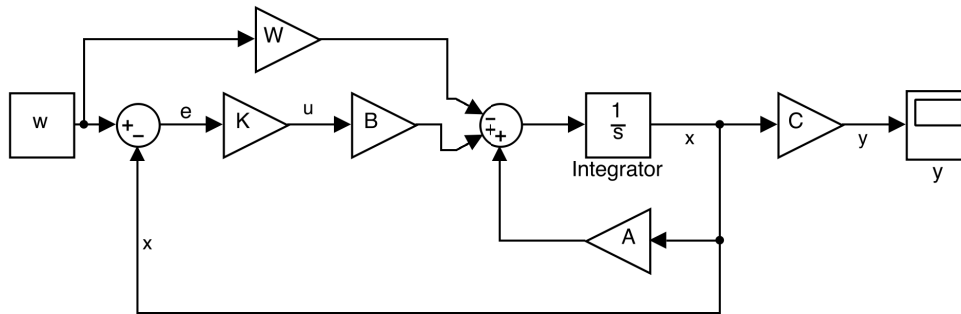


Abbildung MGR-3: Zustandsrückführung mit integraler Erweiterung

3 Versuchsdurchführung

3.1 Ergebnisse

Rückkehr zur Ausgangsposition

3.1.1 Auslenkung Vorfilter

In Abbildung A.1 ist die manuelle Störung/Auslenkung des Radialwinkels zur Zeit $t \approx 27s$ zu sehen. Der Höhenwinkel wird von dieser Störung kaum beeinflusst und zeigt ein gutes Führungsverhalten. Das anfängliche Abweichen des Radialwinkels von der Führungsgröße lässt sich mit der anfänglichen Neigung ($\varphi_3(t=0) \neq 0$) des Helikopters erklären.

Zur Erstellung der Reglermatrix K wurden folgende Matrizen verwendet:

$$Q = \text{diag}(100, 1000, 1, 1, 1, 1)$$

$$R = \text{diag}(1, 1)$$

Die große Gewichtung des dynamischen Verhaltens von φ_2 in der Matrix Q passt zum guten Führungsverhalten des Höhenwinkels.

In Abbildung A.1 wurde ebenfalls eine Auslenkung des Radialwinkels vorgenommen. Die Höhen- und Neigungswinkel zeigen annähernd ähnliches Verhalten wie in Abbildung A.1. Beim Radialwinkel jedoch ist nach der Auslenkung eine bleibende Regelabweichung zu beobachten.

$$Q = \text{diag}(100, 1000, 1, 1, 1, 1)$$

3.1.2 Auslenkung Integral

In Abbildung A.2 wurde eine manuelle Auslenkung des Radialwinkel zum Zeitpunkt $t \approx 27s$ vorgenommen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der tatsächliche Radialwinkel um den vorgegeben Sollwert schwingt; auch ohne vorherige Auslenkung.

$$Q_{int} = \text{diag}(10, 10, 10, 1, 1, 1, 10, 10)$$

Sollwerttrajektorie

3.1.3 Trajektorie Vorfilter

In Abbildung A.3 soll der Helikopter einer vorgegeben Trajektorie folgen. Insbesondere beim Radialwinkel φ_1 ist zu erkennen, dass der Helikopter der Sollwert-Trajektorie nur mit einer gewissen Verzögerung folgt. Dies lässt sich teilweise mit der großen Gewichtung des dynamischen Verhaltens von φ_2 gegenüber des Verhaltens von φ_1 erklären:

$$Q = \text{diag}(100, 1000, 1, 1, 1, 1)$$

3.1.4 Trajektorie Integral

Bei integraler Erweiterung des Zustandsraummodelles und geeigneter Zustandsrückführung soll der Helikopter ebenfalls einer Trajektorie folgen. In Abbildung A.4 sind beim Radialwinkel φ_1 das Folgen mit deutlicher Verzögerung als auch ein Überschwingen zu beobachten.

Der vorgegebene Höhenwinkel φ_2 wird trotz einer Zeitspanne von mindestens 20 Sekunden nicht erreicht.

Insgesamt ist das Führungsverhalten unbefriedigend. Dies ist höchstwahrscheinlich auf eine strukturell falsche Zustandsrückführung zurückzuführen. Die stabilisierende Matrix K_{int} wird mit der Regelabweichung multipliziert anstatt mit den aktuellen Zuständen wie es für eine Zustandsrückführung üblich ist. $Q_{Int} = \text{diag}(100, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

A erstellte Graphiken aus Messwerten

A.1 Auslenkung mit Vorfilter

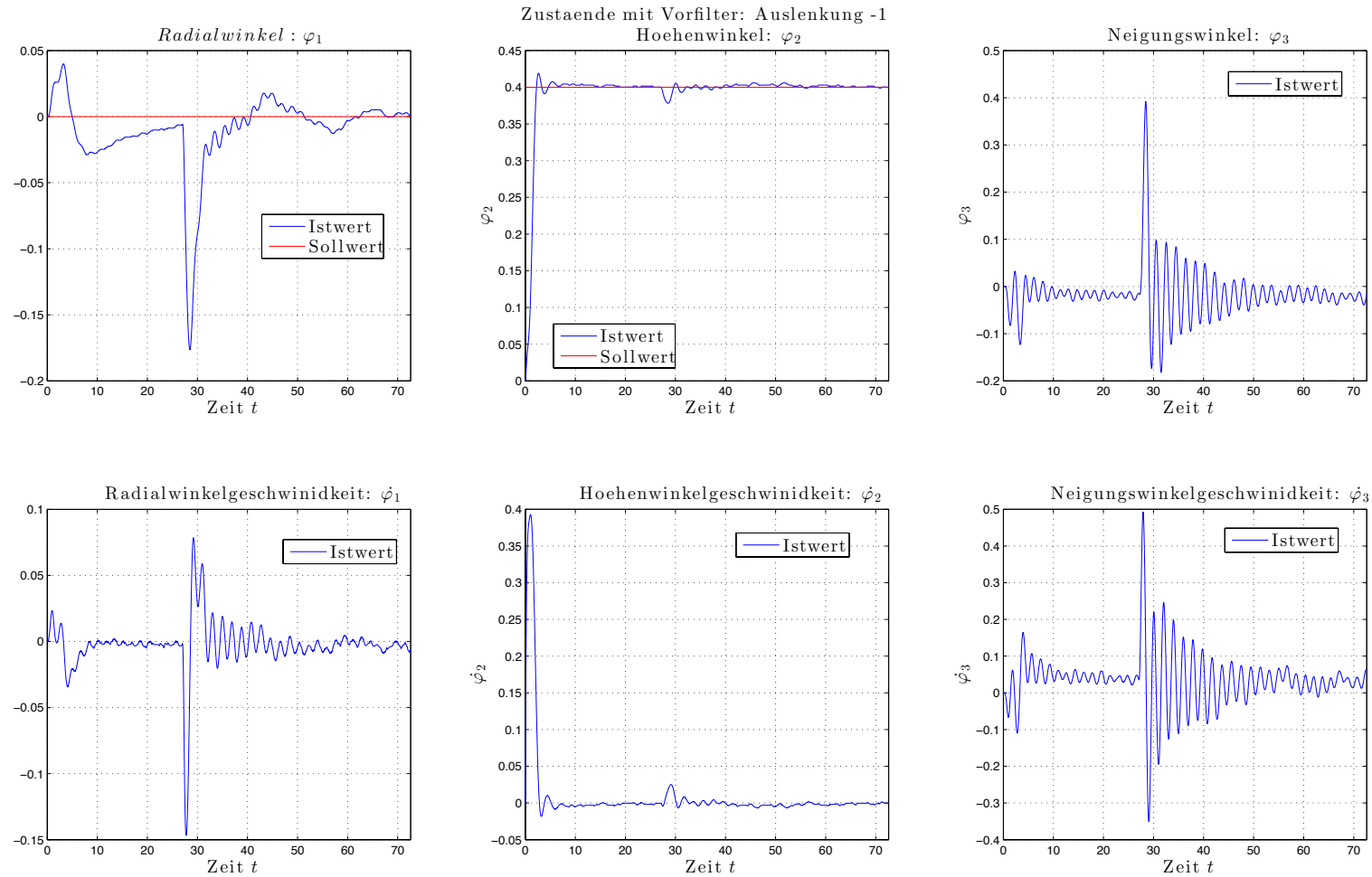


Abbildung MGR-1: Auslenkung mit Vorfilter - 1

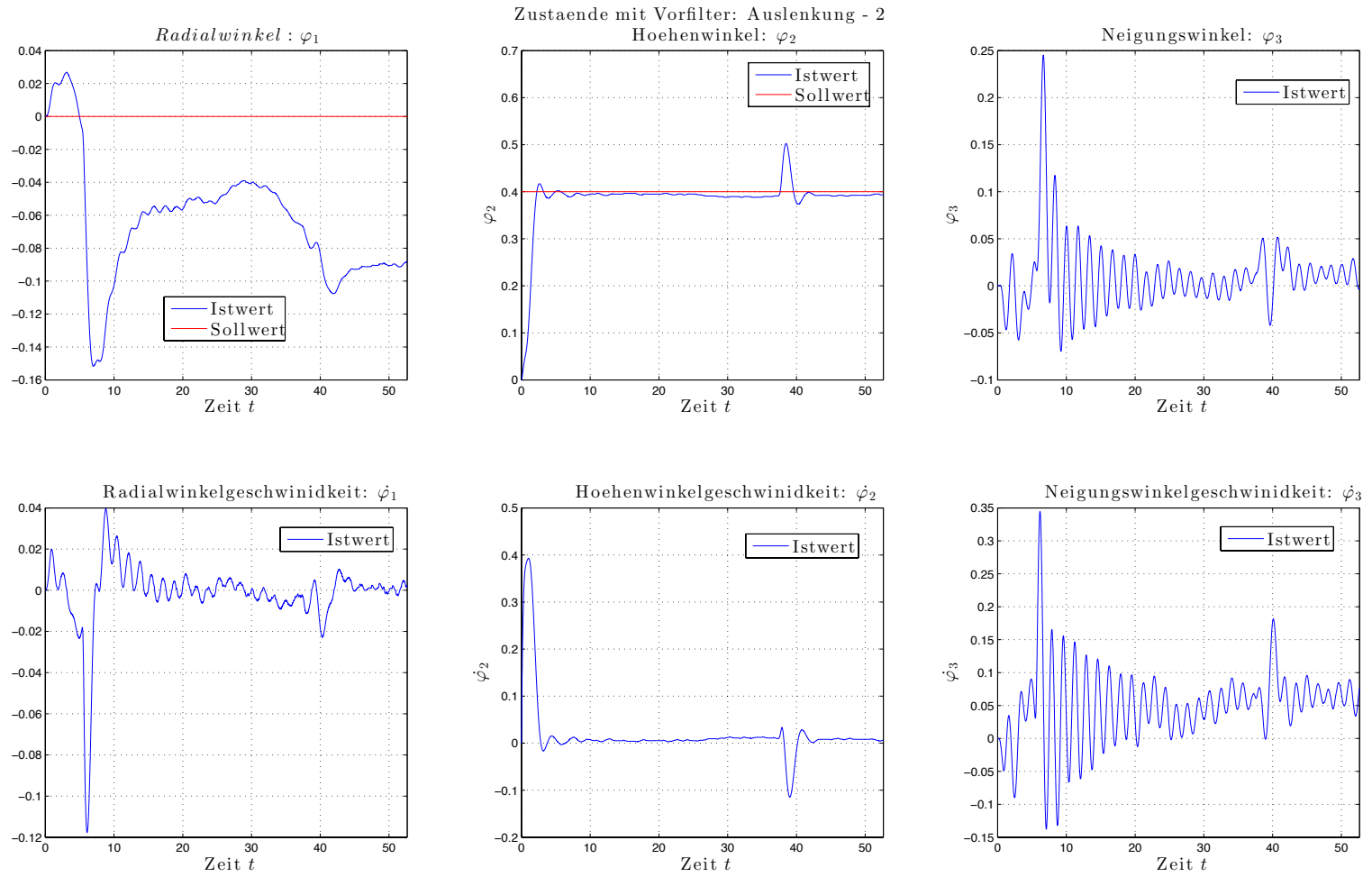


Abbildung MGR-2: Auslenkung mit Vorfilter - 2

A.2 Auslenkung mit integraler Erweiterung

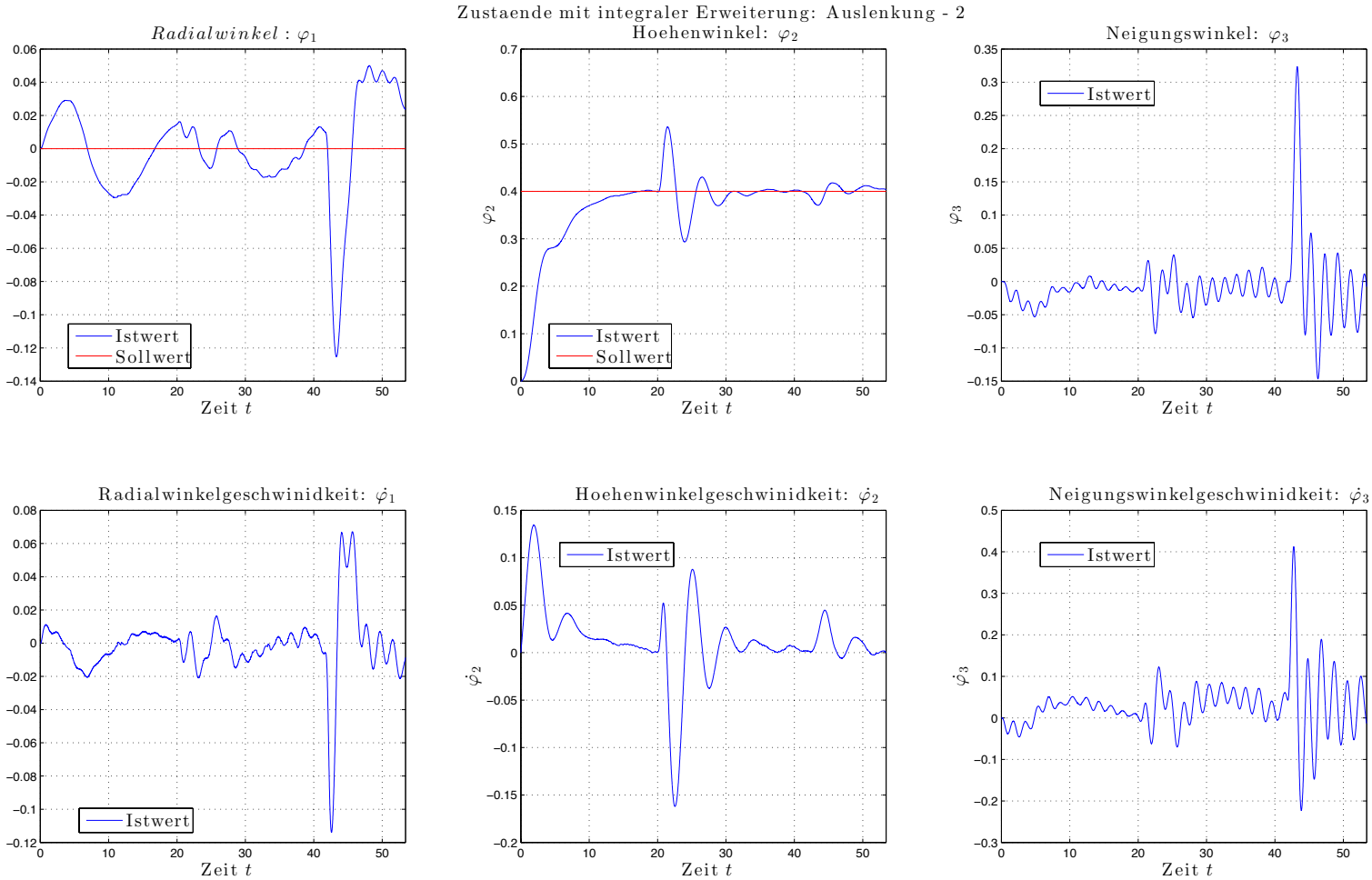


Abbildung MGR-3: Auslenkung mit integraler Erweiterung - 1

A.3 Verfolgen einer Trajektorie mit Vorfilter

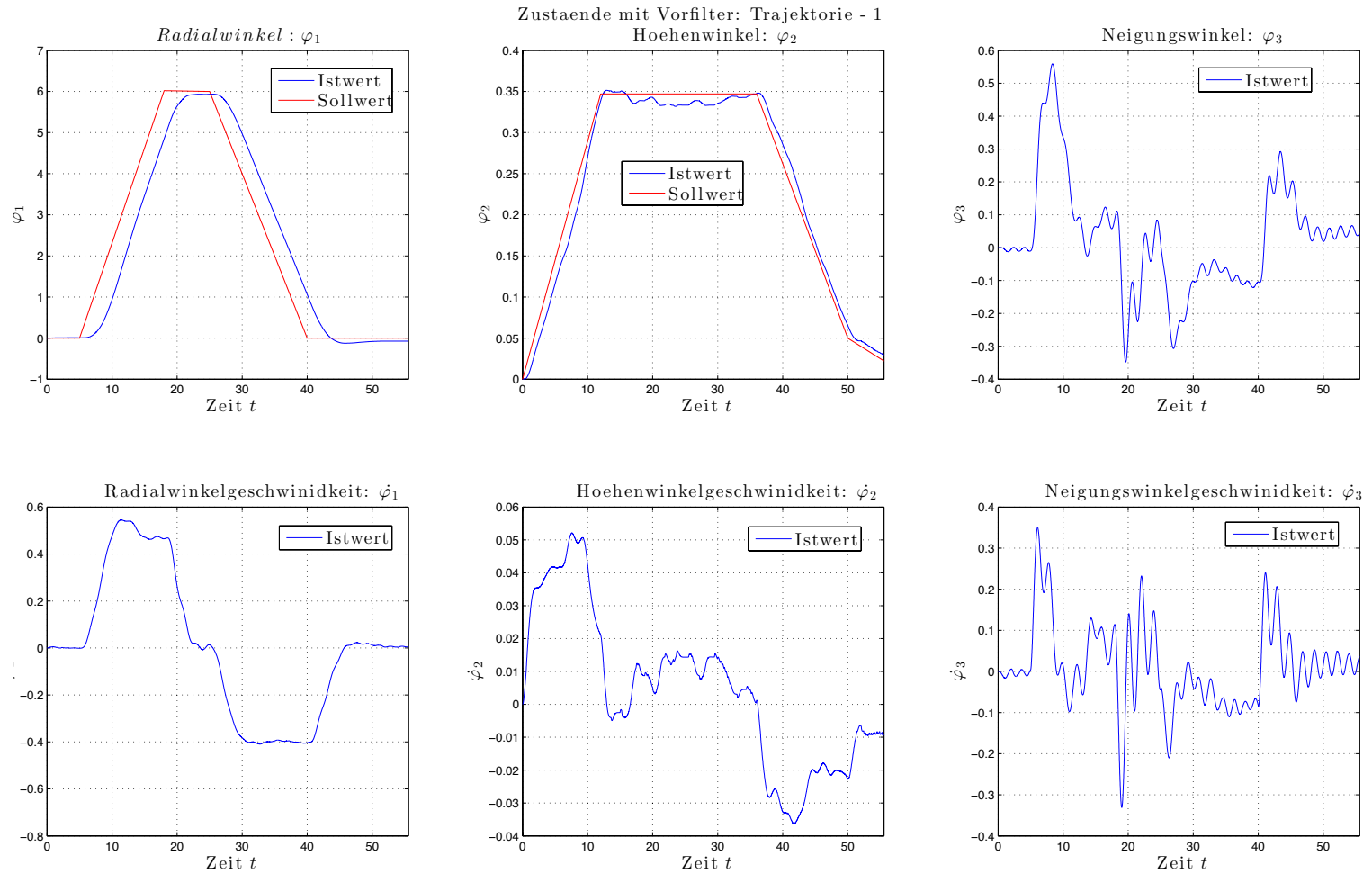


Abbildung MGR-4: Verfolgen einer Trajektorie mit Vorfilter

A.4 Verfolgen einer Trajektorie mit integraler Erweiterung

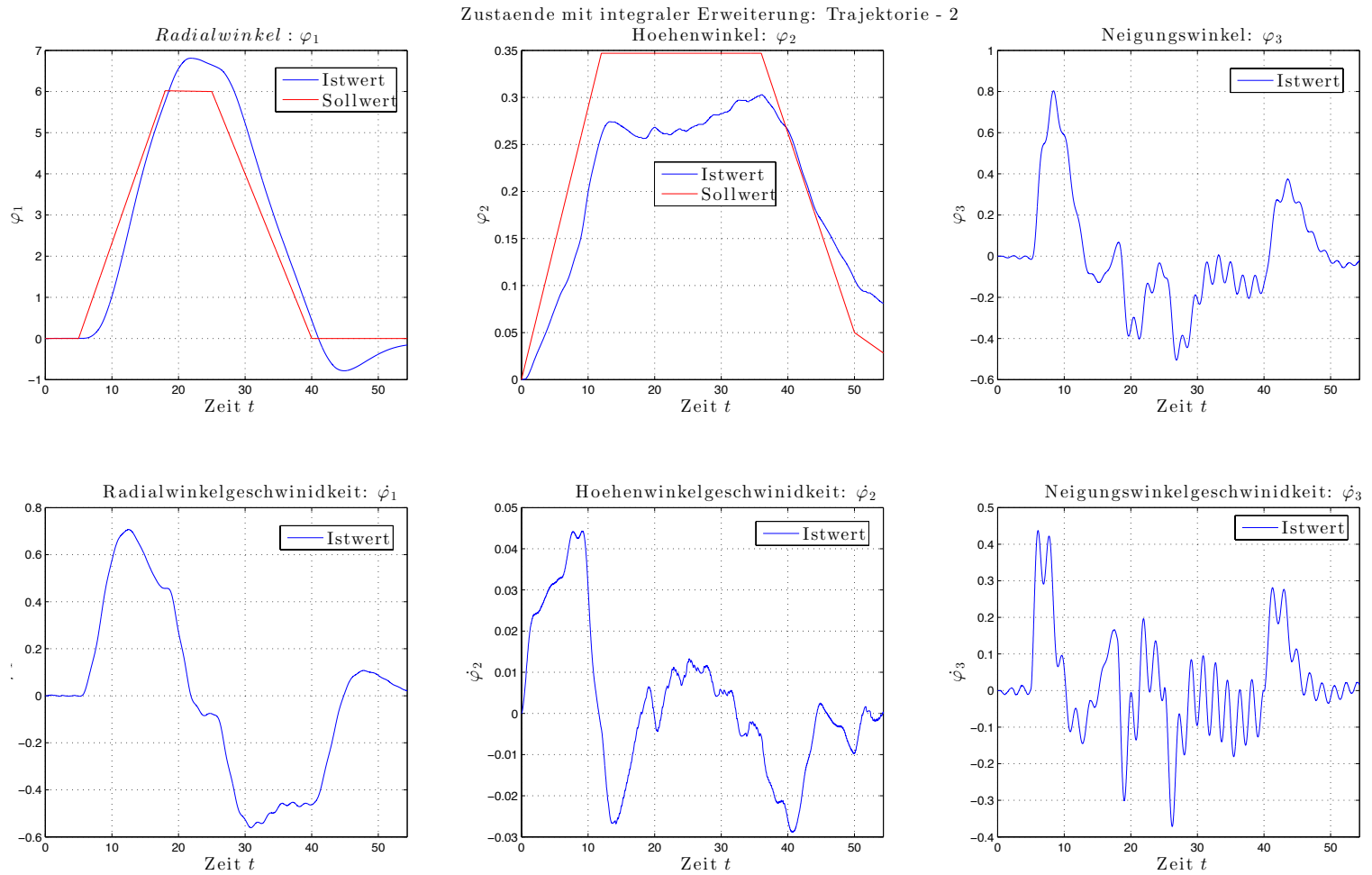


Abbildung MGR-5: Verfolgen einer Trajektorie mit integraler Erweiterung

Abbildungsverzeichnis

MGR-1	Blockschaltbild des linearen Modell Σ_1	4
MGR-2	Blockschaltbild der Umrechnungen von $u_{1,2}$ in die Spannungen $u_{f,b}$	6
MGR-1	Blockschaltbild des LUENBERGER-Beobachters	8
MGR-2	Verschaltung eines Regelkreises mit Vorfilter V (ohne Beobachter)	12
MGR-3	Zustandsrückführung mit integraler Erweiterung	15
MGR-1	Auslenkung mit Vorfilter - 1	18
MGR-2	Auslenkung mit Vorfilter - 2	19
MGR-3	Auslenkung mit integraler Erweiterung - 1	20
MGR-4	Verfolgen einer Trajektorie mit Vorfilter	21
MGR-5	Verfolgen einer Trajektorie mit integraler Erweiterung	22

Literatur

- [1] Prof. Dr. Ing. Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer-Verlag, Bochum, 6. Auflage edition, 2010.
- [2] Dr. sc. techn. Eric Bullinger. Regelungstechnik 2. Vorlesungsmitschrift 12. Mai 2015, 2015.
- [3] Wikipedia. LQ-Regler. <http://de.wikipedia.org/wiki/LQ-Regler>.