

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

AUTOMATISIERUNGSTECHNIKPRAKTIKUM

Lineare Systeme

17. Juni 2015

Autoren

Pascal BOCK

Marius HÖRNSCHEMEYER

Jakob KÜBLER

Marek MERTEN

Betreuer

Dr. Ing. Thomas MÜLLER

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
1.1 Versuchsziel	3
1.2 Vorbereitungsfragen	3
1.2.1 Was sind Sprungantwort und Übergangsfunktion?	3
1.2.2 Was ist die Gewichtsfunktion?	3
1.2.3 Was ist der Frequenzgang eines Übertragungssystems? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Übertragungsfunktion und Frequenzgang? Verbinden Sie damit eine physikalische Bedeutung!	3
1.2.4 Was ist eine Phasenminimumsystem	3
1.2.5 Was sind Ortskurve und Bodediagramm?	4
1.2.6 Nennen Sie die Grundtypen linearer dynamischer Übertragungsglieder und skizzieren Sie deren ideale und reale Zeitverläufe(Sprungantworten)!	4
1.2.7 Ordnen Sie reale physikalische Systeme diesen Grundtypen zu!	4
1.2.8 Wodurch wird die Ordnung eines Systems bestimmt? Wie schlägt sich das in der Differenzialgleichung und im Frequenzgang nieder?	5
1.2.9 Welche Möglichkeiten der Zusammenschaltung linearer Übertragungsglieder kennen Sie und wie erfolgt diese Zusammenfassung mathematisch?	5
1.2.10 Geben Sie Differenzialgleichung, Übertragungsfunktion und Frequenzgang für folgende Streckentypen an: PT_1 , PT_2 , IT und DT_1 ! Ermitteln Sie analytisch den Näherungsamplitudenfrequenzgang sowie den Phasenverlauf und stellen Sie die Ergebnisse qualitativ dar!	5
1.2.11 Skizzieren Sie die Ortskurve der in Aufgabe 2 angegebenen Grundglieder!	6
1.2.12 Geben Sie die Übergangsfunktionen der in Aufgabe 2 betrachteten Systeme an!	8
1.2.13 Informieren Sie sich über Methoden der Identifikation von PT_1 - und PT_2 -Strecken anhand der Übertragungsfunktion! Wie erfolgt die Bestimmung der Streckenparameter?	9
1.2.14 Wie ermittelt man die Parameter von IT_n -Strecken an der Übertragungsfunktion?	10
1.2.15 Welche Testsignale sind zur Identifikation von DT_1 -Gliedern geeignet? Wie ermittelt man aus dem entsprechenden Zeitverläufen die Kennwerte des DT_1 -Gliedes?	11
1.2.16 Ermitteln Sie analytisch die Dämpfung D und die Zeitkonstante T_0 des Regelkreises bestehend aus I -Regler $G_R(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_I s}$ und PT_1 -Strecke $G_S(s) = \frac{K_S}{T_S s + 1}$ als Funktionen von T_S , K_S und $K_1 = \frac{1}{T_1}$! Wie sind T_S , K_S und K_1 zu wählen, damit sich bestimmte Werte für D und T_0 einstellen lassen?	12

1.2.17	Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Überschwingweite Δh sowie der Zeit bis zum ersten Überschwingen T_m der Übergangsfunktion eines Schwingungsgliedes und den Kennwerten D und T_0 ?	13
1.2.18	Bestimmen Sie analytisch die bleibende Regelabweichung eines Regelkreises, bestehend aus PT_2 -Strecke und P -Regler!	13
2	Auswertung	14
2.1	PT_1 -Glieder	15
2.2	I -Glieder	16
2.3	DT_1 -Glieder	17
2.4	PT_2 -Glieder (aperiodischer Grenzfall)	18
2.5	PT_2 -Glieder (Schwingungsfall)	18
2.6	IT_1 -Glieder	19
3	Zusammenfassung	21
4	ANHANG	21

1 Grundlagen

1.1 Versuchsziel

Es wird das dynamische Verhalten linearer Systeme untersucht. Dabei sollen Sprungantworten und Frequenzgänge als Bodediagramm und Ortskurve sowohl aufgenommen als auch ausgewertet werden.

1.2 Vorbereitungsfragen

1.2.1 Was sind Sprungantwort und Übergangsfunktion?

Die Sprungantwort ist die Antwort eines System auf eine sprungförmige Veränderung des Eingangssignals $u(t) = \hat{x}_e \sigma(t)$. Die Übergangsfunktion $h(t)$ stellt die Reaktion des Systems auf einen Sprung bezogen auf dessen Höhe dar.

$$h(t) = \frac{1}{\hat{x}_e} x_a(t) \quad (\text{PA1-1})$$

Dabei ist \hat{x}_e die Höhe des Sprungs und $x_a(t)$ die Antwort des Systems.

1.2.2 Was ist die Gewichtsfunktion?

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ ist die Reaktion eines Systems an dessen Ausgang auf einen (Dirac-)Impuls $\delta(t)$ am Eingang.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \frac{1}{t}, & t = 0 \end{cases} \quad (\text{PA1-2})$$

1.2.3 Was ist der Frequenzgang eines Übertragungssystems? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Übertragungsfunktion und Frequenzgang? Verbinden Sie damit eine physikalische Bedeutung!

Der Frequenzgang ist die Antwort eines Übertragungssystems auf eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω . Es handelt sich also um eine komplexe Zahl ($\delta + j\omega$) in Abhängigkeit von ω und mit $\delta = 0$.

Die Übertragungsfunktion $G(s) = G(\delta + j\omega)$ geht im Sonderfall $\delta = 0$ in den Frequenzgang $G(j\omega)$ über und ist somit die mathematische Funktion, welche die Frequenz ω mit dem Ausgang, dem Frequenzgang, des Übertragungssystems verbindet.

Das periodische Anstoßen eines Pendels kann als Anregung mit einer Frequenz w interpretiert werden, die Auslenkung des Pendels als Ausgang des Übertragungssystems.

1.2.4 Was ist eine Phasenminimumsystem

Ein System ist minimalphasig, wenn es (grenz-)stabil ist und der Zähler seiner Übertragungsfunktion keine positive Nullstellen aufweist. Es ist möglich aus dem Phasen- oder Amplitudenverlauf auf den jeweils anderen zu schließen. Der ermittelte Phasengang ist

der betragsmäßig kleinste zu ermittelnde Phasengang bei vorgegebenen Amplitudenverlauf $A(\omega)$.

1.2.5 Was sind Ortskurve und Bodediagramm?

Ortskurve und Bodediagramm sind Darstellungsarten des Frequenzganges eines Systems. Die Ortskurve wird auf der komplexen Zahlenebene aufgetragen und geht von der Frequenz $\omega \rightarrow -\infty$ bis zu $\omega \rightarrow \infty$. In den Ingenieurwissenschaften wird häufig nur der Verlauf $\omega \in [0, \infty[$ betrachtet. Es sind nur Amplitude und Winkel der komplexen Zahl abzulesen, aber der genaue Zusammenhang $G(j\omega)$ kann nicht entnommen werden.

Das Bodediagramm besteht genau genommen aus zwei Diagrammen: Eines für die Amplitude $A(\omega)$ der komplexen Zahl in Abhängigkeit von der Frequenz und eines für den Phasenwinkel $\varphi(\omega)$. Typischerweise wird die Amplitude in Dezibel und die Frequenz logarithmisch aufgetragen.

1.2.6 Nennen Sie die Grundtypen linearer dynamischer Übertragungsglieder und skizzieren Sie deren ideale und reale Zeitverläufe(Sprungantworten)!

Die Grundtypen der linearer dynamischen Übertragungsglieder sind das P -, I -, D - und T_t -Glieder.

Das P -Glieder weist in proportionales Verhalten auf, der Eingang wird proportional verstärkt oder erniedrigt. Ein I -Glieder zeigt integrales Verhalten und integriert den Eingang auf, im zeitdiskreten ist diese Integration eine Addition der einzelnen Werte.

Genau umgekehrtes Verhalten zeigt das D -Glieder. Dessen Ausgang ist anhängig von der Änderung des Eingangs (differenzielles Verhalten). Ein ideales D -Glieder ($G(s) = s$) ist physikalisch nicht zu realisieren, da die Amplitude des Ausgangs für eine beliebig hohe Frequenz auch ein beliebig hoch wäre.

Totzeiten können durch das sogenannte T_t -Glieder dargestellt werden.

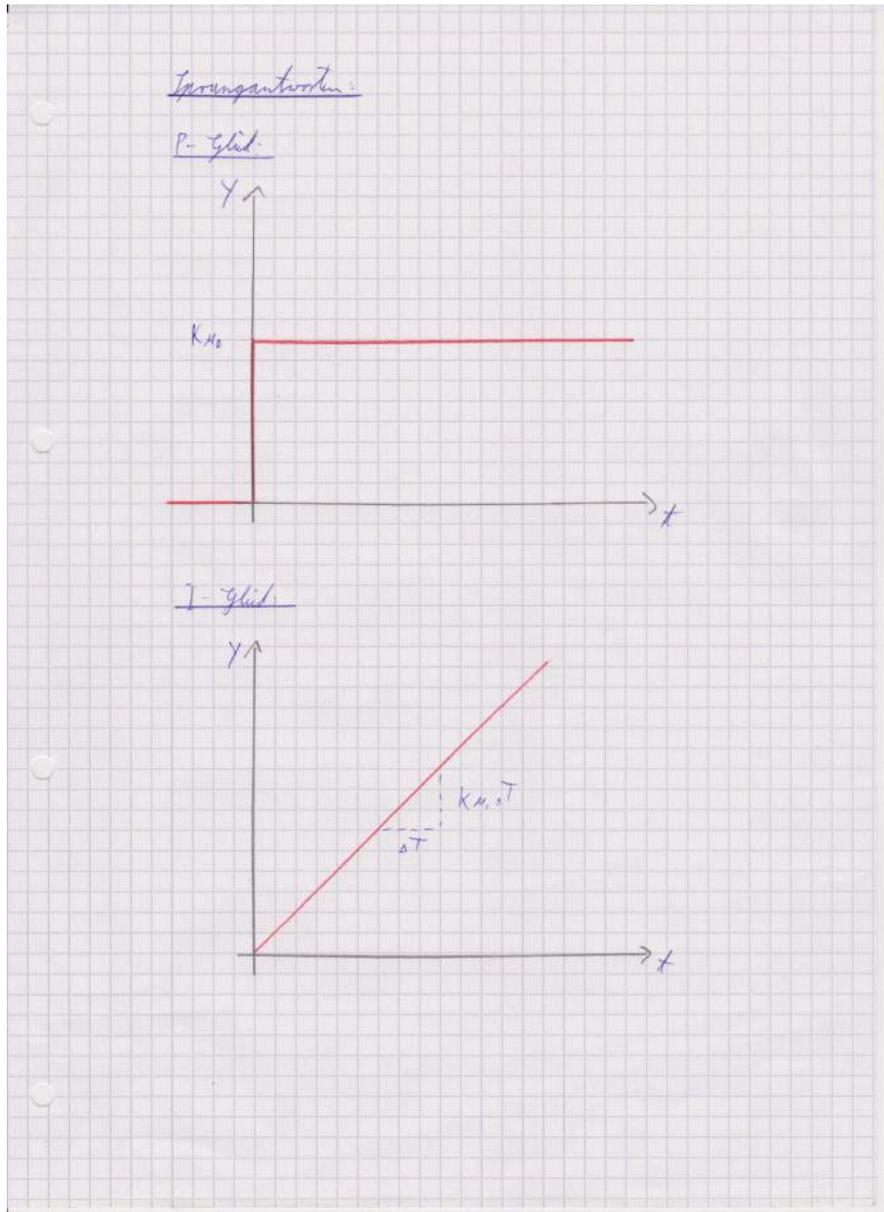


Abbildung PA1-1: Sprungantworten von P - und I -Glied

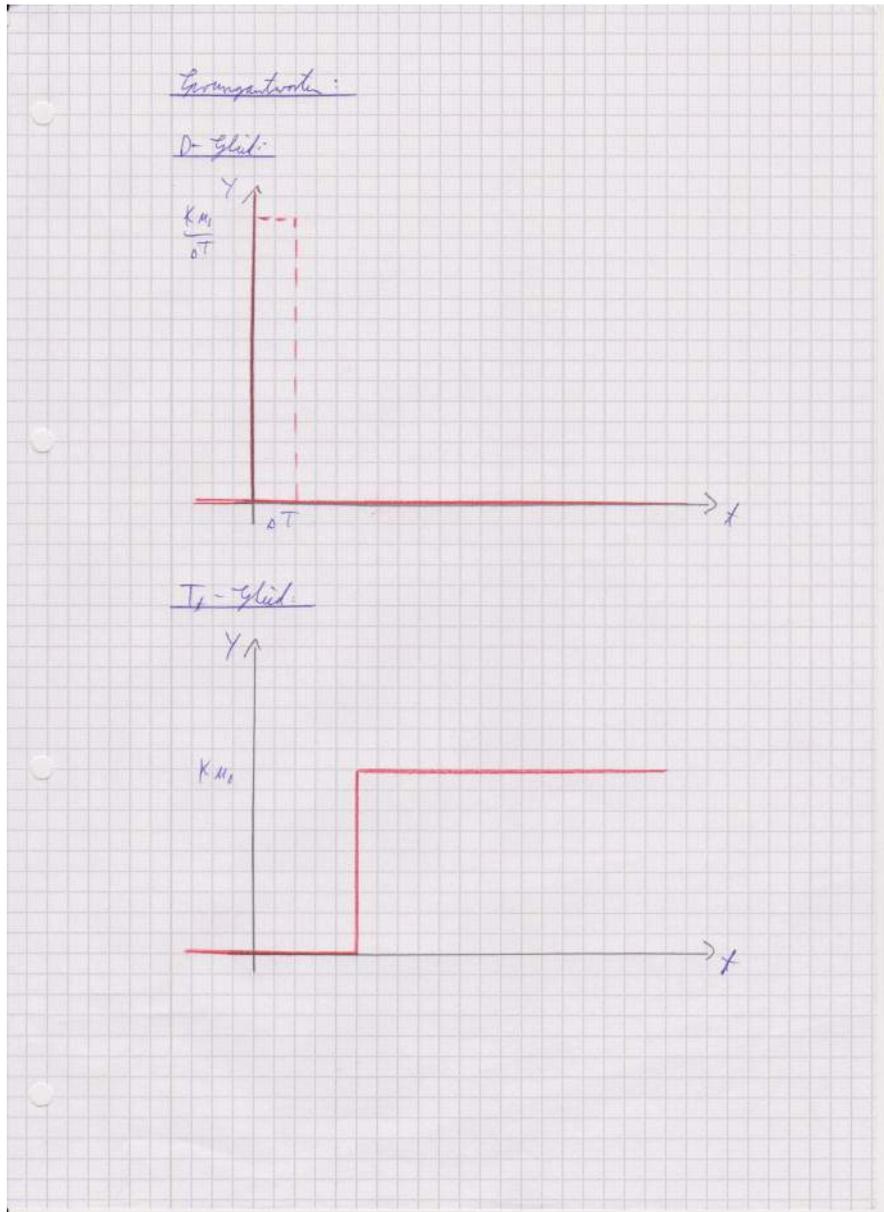


Abbildung PA1-2: Sprungantworten von D - und T_t -Glied

1.2.7 Ordnen Sie reale physikalische Systeme diesen Grundtypen zu!

P -Glied: idealer Transistor, Servo-Lenkung, Durchflussregelung mittels Schieber

I -Glied: ein Wasserbehälter ohne Ablauf integriert seinen Eingang (Volumenstrom) auf

D -Glied: die Widerstandskraft eines nichtnewtonschen Fluid gegenüber der Beschleunigung eines Körpers in diesem

T_t -Glied: eine Rohrstrecke sorgt für eine Verzögerung innerhalb eines stofflichen Über-

tragungssystem

1.2.8 Wodurch wird die Ordnung eines Systems bestimmt? Wie schlägt sich das in der Differenzialgleichung und im Frequenzgang nieder?

Die Ordnung des System gibt die Anzahl der Speicherelemente an. Wenn das System als lineare Differenzialgleichung dargestellt wird, entspricht die Ordnung eines System der höchsten Ableitung. Im Frequenzbereich entspricht die Ordnung des System der höchsten Potenz des Nennerpolynoms.

1.2.9 Welche Möglichkeiten der Zusammenschaltung linearer Übertragungsglieder kennen Sie und wie erfolgt diese Zusammenfassung mathematisch?

Lineare Übertragungsglieder: $G_1(s), G_2(s)$ (PA1-3)

In Reihe: $Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ (PA1-4)

Parallel: $Y(s) = G_1(s) + G_2(s)$ (PA1-5)

Feedback-Loop: $Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$ (PA1-6)

Feedforward-Loop: $Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$ (PA1-7)

1.2.10 Geben Sie Differenzialgleichung, Übertragungsfunktion und Frequenzgang für folgende Streckentypen an: PT_1 , PT_2 , IT und DT_1 ! Ermitteln Sie analytisch den Näherungsamplitudenfrequenzgang sowie den Phasenverlauf und stellen Sie die Ergebnisse qualitativ dar!

Streckentyp	Differenzialgleichung	Übertragungsfunktion	Frequenzgang
PT_1	$T\dot{y} + y = Ku$	$G(s) = \frac{K}{sT+1}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega}$
PT_2	$T_0^2\ddot{y} + 2DT_0\dot{y} + y = Ku$	$G(s) = \frac{K}{T_0^2s^2+2DT_0s+1}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1-T_0^2\omega^2+j2DT_0\omega}$
IT	$T\dot{y} + y = Ku$	$G(s) = \frac{K}{s(sT+1)}$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT\omega)}$
DT_1	$T\dot{y} + y = K\dot{u}$	$G(s) = \frac{Ks}{sT+1}$	$G(j\omega) = \frac{Kj\omega}{1+jT\omega}$

Um den Amplituden- und Phasenverlauf darzustellen, muss die komplexe Funktion $G(j\omega)$ in ihren Betrag $|G(j\omega)|$ und ihren Winkel $arg\{G(j\omega)\}$ zerlegt werden.

Streckentyp	Amplitudenverlauf	Phasenverlauf
PT_1	$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$\varphi(\omega) = -\arctan(R\omega)$
PT_2	$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T_0^2\omega^2)^2+(2DT_0\omega)^2}}$	$\omega < \frac{1}{T_0} : \varphi(\omega) = -\arctan(\frac{2DT_0\omega}{1-T_0^2\omega^2})$ $\omega > \frac{1}{T_0} : \varphi(\omega) = -\arctan(\frac{2DT_0\omega}{1-T_0^2\omega^2}) - \pi$
IT	$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(T\omega)$
DT_1	$A(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(T\omega)$

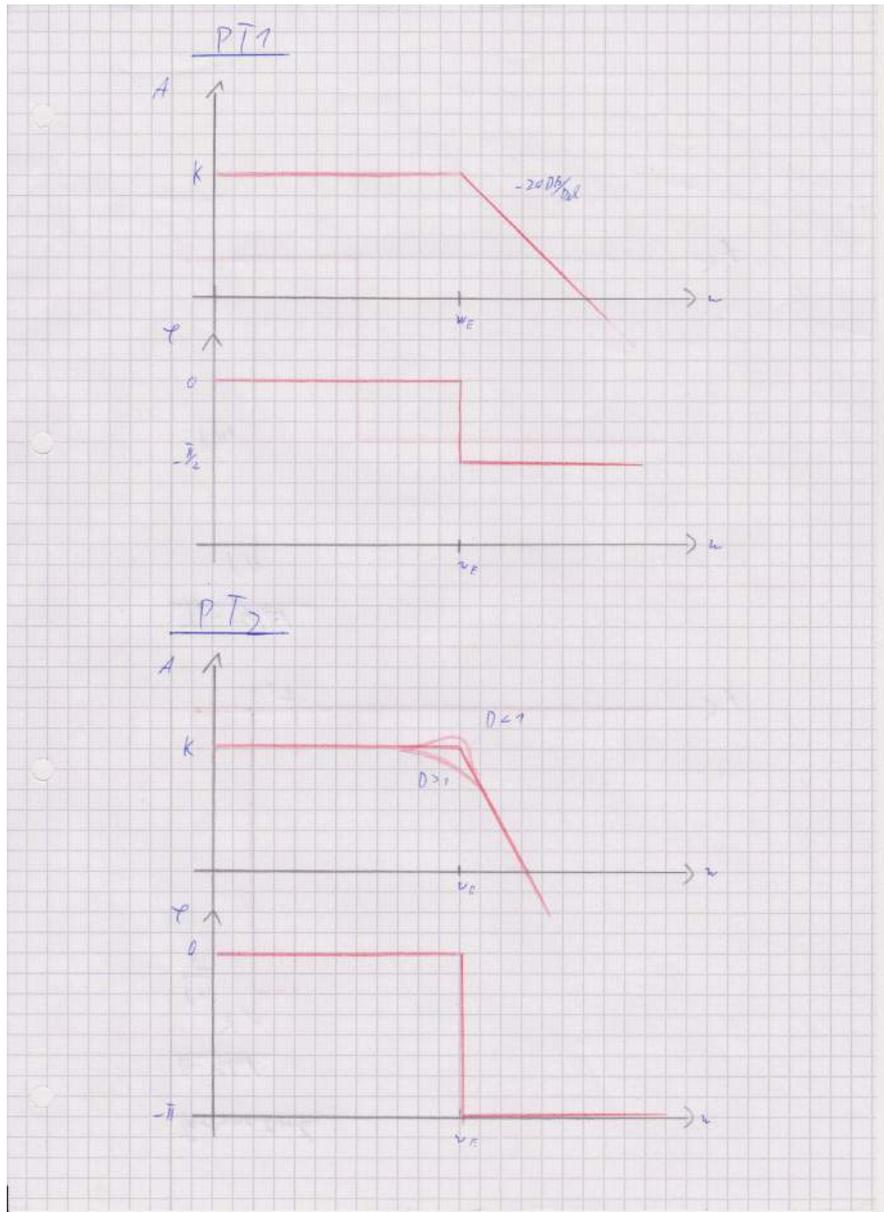


Abbildung PA1-3: Näherungsamplitudenfrequenzgang von PT_1 - und PT_2 -Glieder

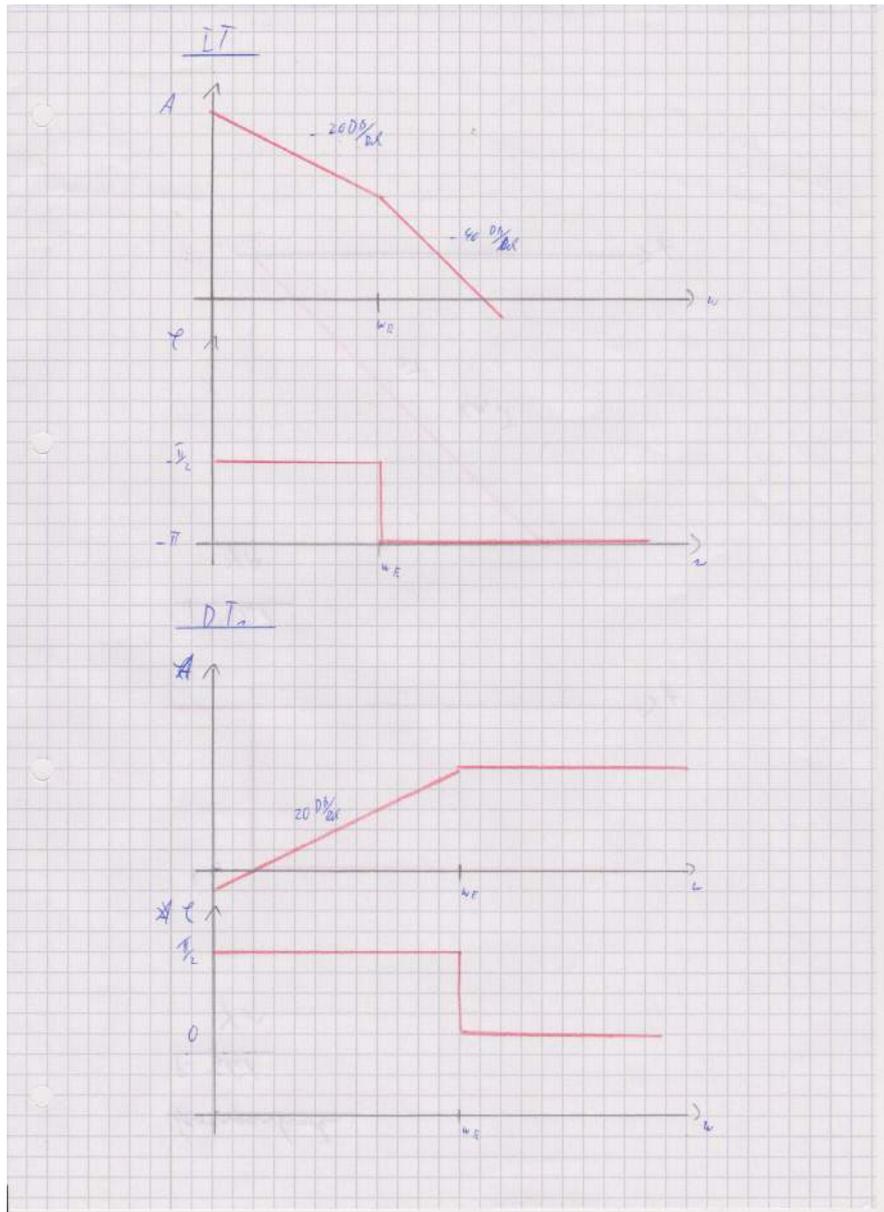


Abbildung PA1-4: Näherungsamplitudenfrequenzgang von IT- und DT-Glied

1.2.11 Skizzieren Sie die Ortskurve der in Aufgabe 2 angegebenen Grundglieder!

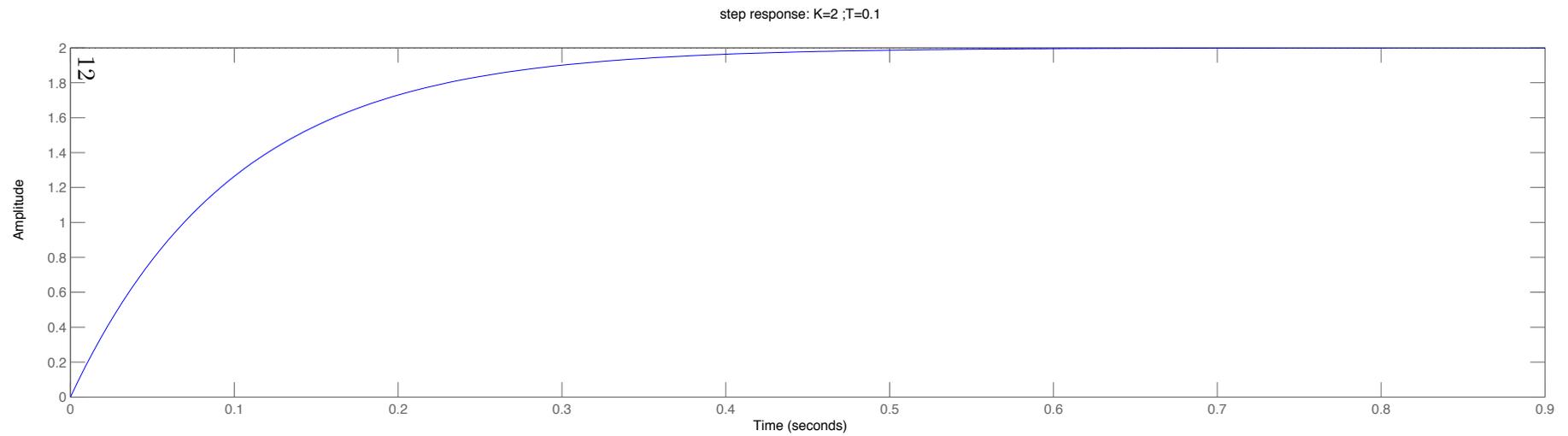
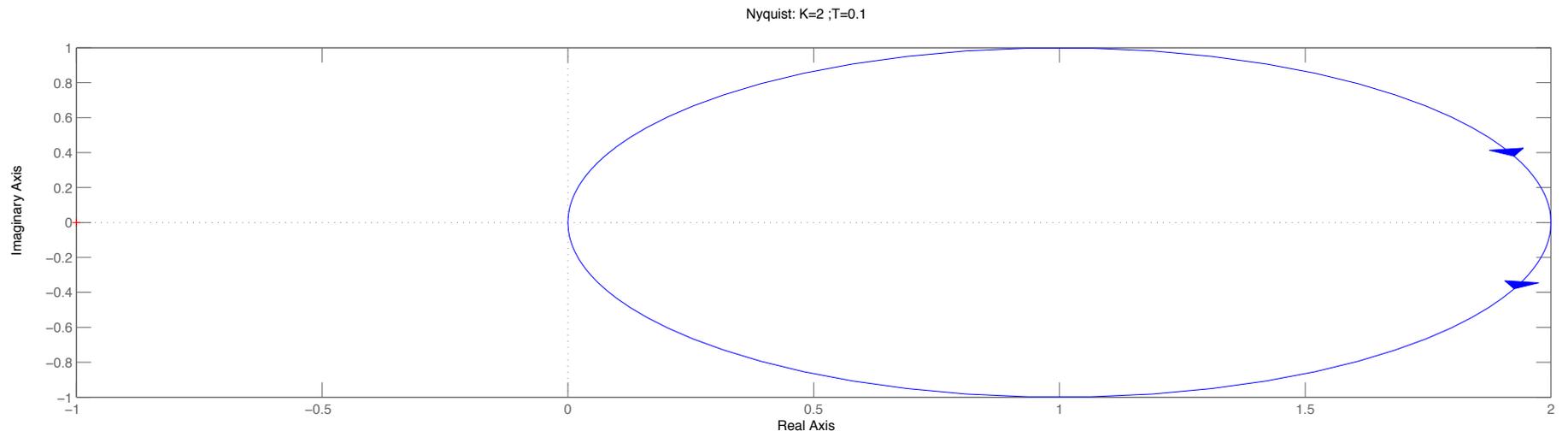


Abbildung PA1-5: Ortskurve und Übergangsfunktion eines PT_1 -Glieds

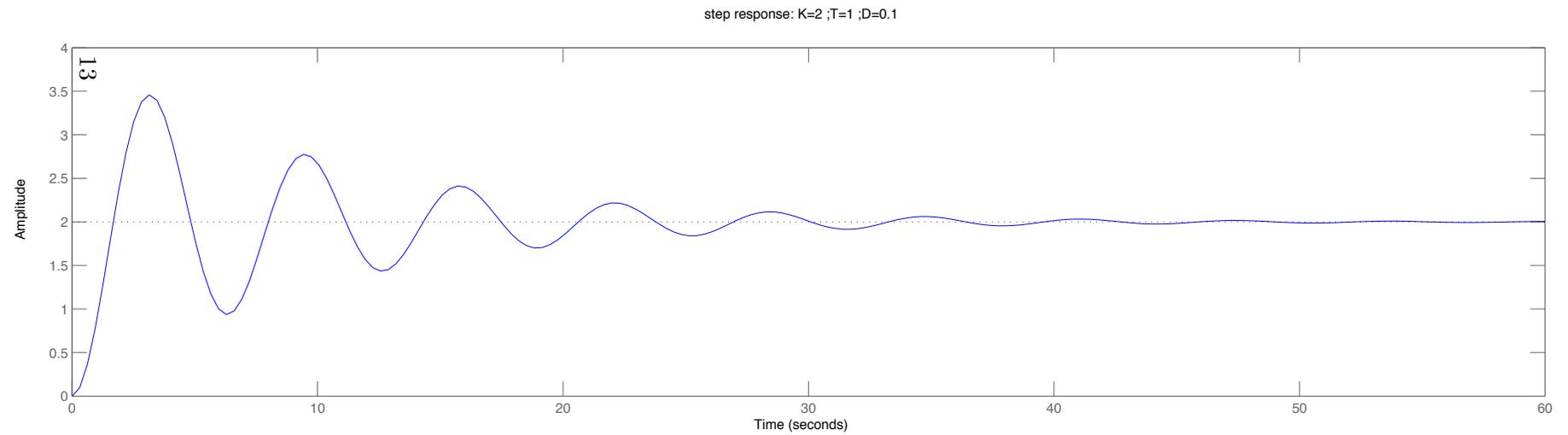
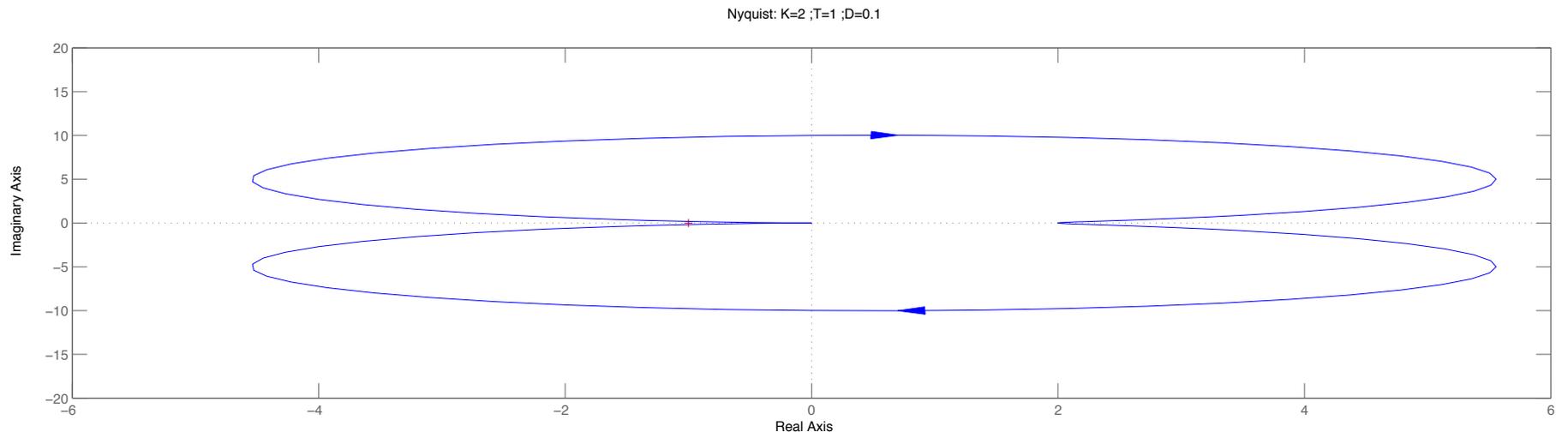


Abbildung PA1-6: Ortskurve und Übergangsfunktion eines PT_2 -Glieds

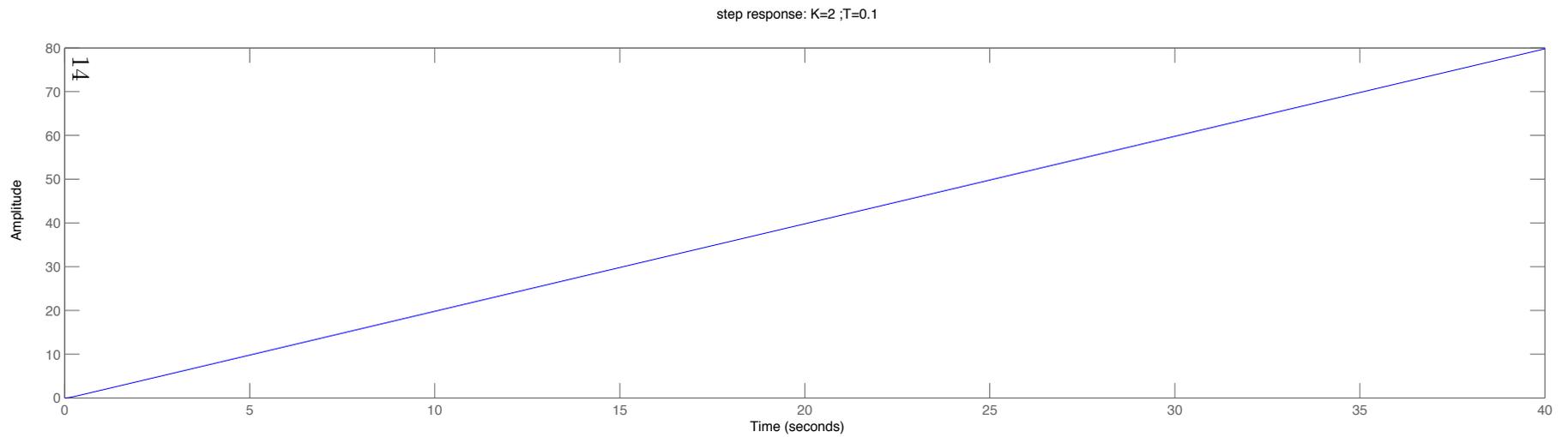
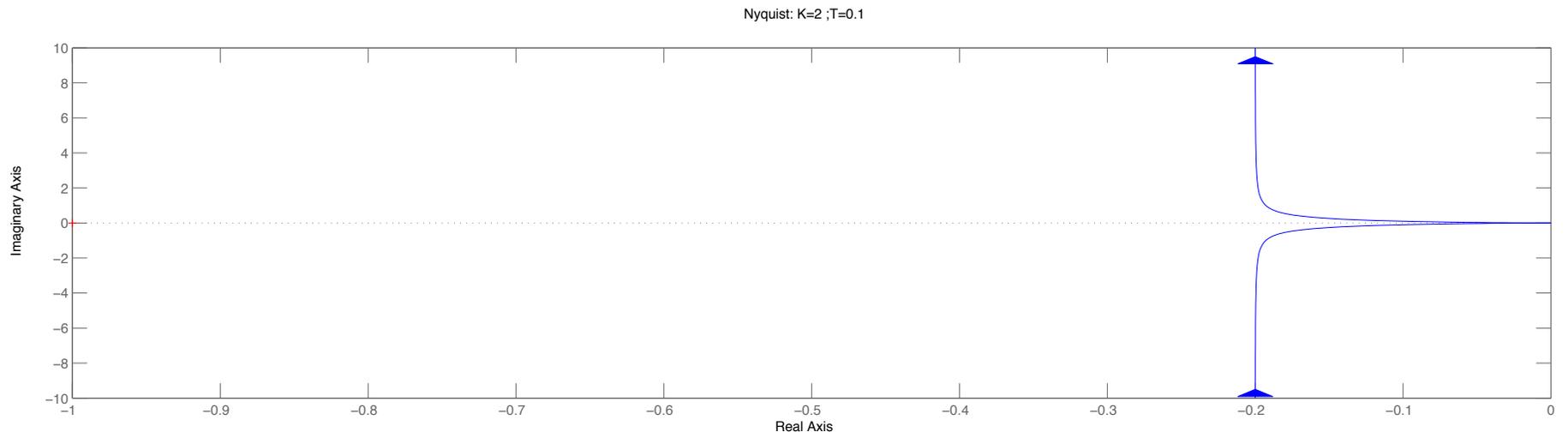


Abbildung PA1-7: Ortskurve und Übergangsfunktion eines IT -Glieds

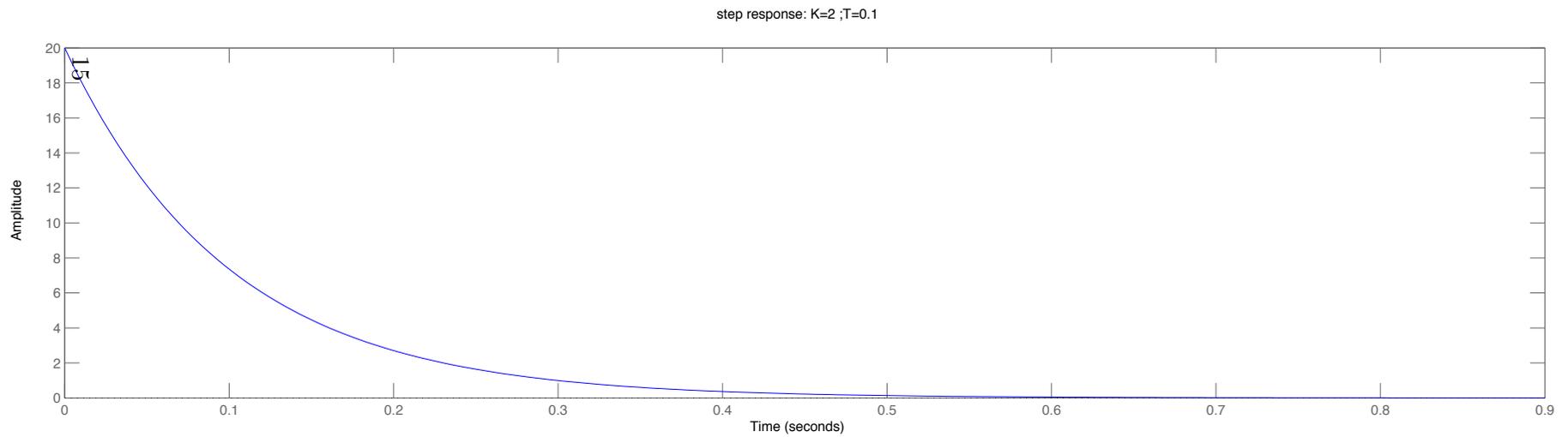
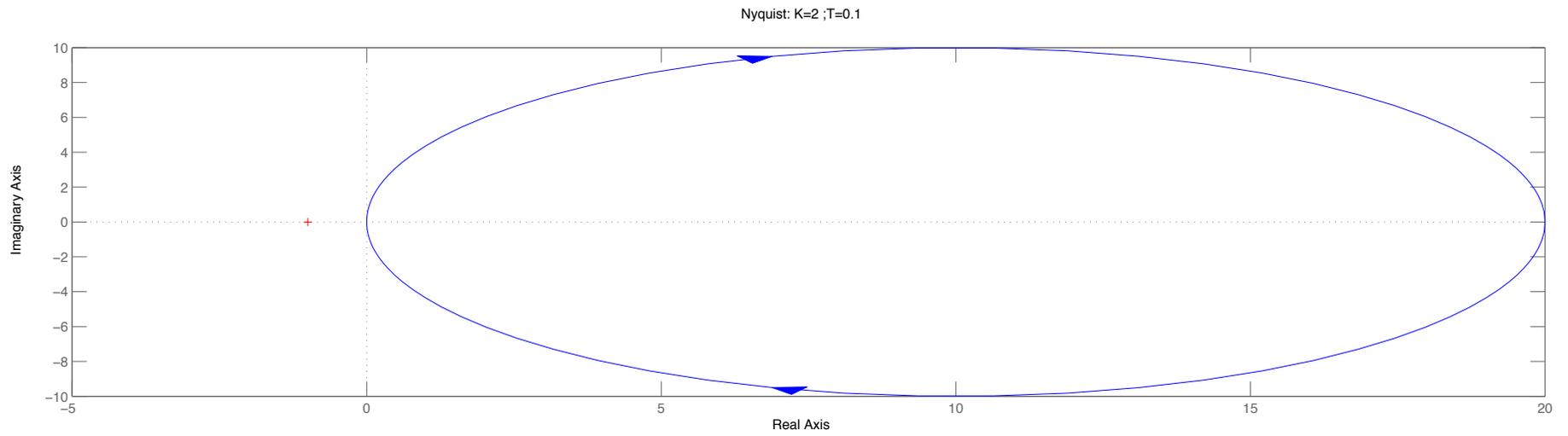


Abbildung PA1-8: Ortskurve und Übergangsfunktion eines DT_1 -Glieds

1.2.12 Geben Sie die Übergangsfunktionen der in Aufgabe 2 betrachteten Systeme an!

Die Berechnung der Übergangsfunktionen wird hier nur beispielhaft am PT_1 -Glied gezeigt. Die Vorgehensweise ist bei den anderen Gliedern ähnlich, jedoch deutlich aufwendiger.

Alle anderen Gleichungen aus [3]

PT_1 -Glied

Die Übertragungsfunktion des PT_1 -Gliedes lautet:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad (\text{PA1-8})$$

$$= \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (\text{PA1-9})$$

$$= \frac{\tilde{K}}{s + a} \quad (\text{PA1-10})$$

Die Übergangsfunktion oder Sprungantwort (im Frequenzbereich) lautet:

$$H(s) = \frac{\tilde{K}}{s(s + a)} \quad (\text{PA1-11})$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + a} \quad (\text{PA1-12})$$

Für die Rücktransformation mittels Laplace-Tabelle muss eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Man erhält:

$$\tilde{K} = c_1 \cdot (s + a) + c_2 \cdot s \quad (\text{PA1-13})$$

$$= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\stackrel{!}{=}0} \cdot s + \underbrace{c_1 a}_{\stackrel{!}{=} \tilde{K}} \quad (\text{PA1-14})$$

Es folgt aus einem Koeffizientenvergleich der linken und rechten Seite:

$$c_1 = \frac{\tilde{K}}{a} = K \quad (\text{PA1-15})$$

$$c_2 = -c_1 = -K \quad (\text{PA1-16})$$

Der folgende Ausdruck kann nun mittels Laplace-Tabellen transformiert werden:

$$H(s) = \frac{K}{s} + \frac{-K}{s + a} \quad (\text{PA1-17})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) \quad (\text{PA1-18})$$

$$= K\delta(t) - Ke^{-\frac{t}{T}}\delta(t) \quad (\text{PA1-19})$$

PT_2 -Glieder

Es muss eine Fallunterscheidung für D gemacht werden:

1. $D = 1$

$$h_{PT_2}(t) = K\delta(t) - Ke^{-\frac{t}{T}} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (\text{PA1-20})$$

2. $D > 1$

$$h_{PT_2}(t) = K\delta(t) - \frac{K\omega_0^2}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s_1}e^{s_1 t} - \frac{1}{s_2}e^{s_2 t}\right) \quad (\text{PA1-21})$$

$$s_{1,2} = \omega_0 \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1}\right) \quad (\text{PA1-22})$$

3. $0 < D < 1$

$$h_{PT_2}(t) = K \left(1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + \Psi)\right) \delta \quad (\text{PA1-23})$$

$$\Psi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\right) \quad (\text{PA1-24})$$

IT_1 -Glieder

Die Sprungantwort eines IT_1 -Gliedes ist das Integral der Sprungantwort des PT_1 -Gliedes.

$$h_{IT_1}(t) = \int_0^t h_{PT_1}(\tau) d\tau \quad (\text{PA1-25})$$

$$= Kt - KT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \delta(t) \quad (\text{PA1-26})$$

DT_1 -Glieder

Die Übergangsfunktion berechnet sich zu folgendem:

$$h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \delta(t) \quad (\text{PA1-27})$$

1.2.13 Informieren Sie sich über Methoden der Identifikation von PT_1 - und PT_2 -Strecken anhand der Übertragungsfunktion! Wie erfolgt die Bestimmung der Streckenparameter?

Bei dem PT_1 -Glieder handelt es sich um eine Verzögerung erster Ordnung.

PT_1 -Glieder: $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$

$$K = \frac{y(t \rightarrow \infty)}{u_0} \quad (\text{PA1-28})$$

$$T = \frac{Ku_0}{\dot{y}(t=0)} \quad (\text{PA1-29})$$

$$(\text{PA1-30})$$

Bei dem PT_2 -Glied handelt es sich um eine Verzögerung zweiter Ordnung. Der Parameter K kann ebenfalls über das asymptotische Verhalten bestimmt werden; die Parameter T_1 und T_2 mit Hilfe der Wendetangente und der daraus resultierenden Verzugszeit T_u und der Anstiegszeit T_a .

$$PT_2\text{-Glied: } G(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$K = \frac{y(t \rightarrow \infty)}{u_0} \quad (\text{PA1-31})$$

Bildet man das Verhältnis $\frac{T_a}{T_u}$ können T_1 und T_2 mit meiner Tabelle bestimmt werden. (z.B. aus UNBEHAUEN *Regelungstechnik I*)

1.2.14 Wie ermittelt man die Parameter von IT_n -Strecken an der Übertragungsfunktion?

Die meisten entwickelten Verfahren zur Parameterentwicklung existieren für PT_n -Strecken. IT_n -Strecken können leicht durch Integration von PT_n -Strecken erstellt werden. Daher gelten Verfahren zur Parameterbestimmung bei PT_n -Strecken auch für IT_n -Strecken. Eine Möglichkeit ist die zeichnerische Auswertung der Sprungantworten. Eine früher häufig verwendete Methode ist die Methode nach KÜPFMÜLLER erweitert durch STREJC. Dabei wird die Sprungantwort mittels folgender Übertragungsfunktion approximiert:

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_t}}{1 + sT} \quad (\text{PA1-32})$$

Die Parameter T_t und T werden dabei wie folgt ermittelt:

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln \left(\frac{K - h_1}{K - h_2} \right)} \quad (\text{PA1-33})$$

$$T_t = T \ln \left(1 - \frac{h_\nu}{K} \right) + t_\nu \quad (\text{PA1-34})$$

[2, S. 299 ff.]

Die verwendeten Konstanten sind Abbildung 1.2.14 zu entnehmen.

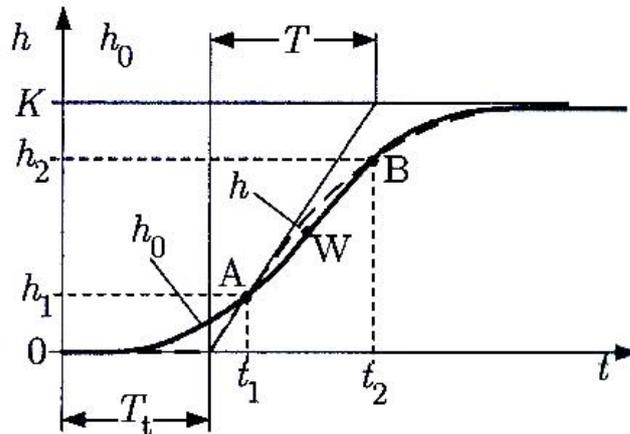


Abbildung PA1-9: Anwendung der KÜPFMÜLLER-Methode erweitert durch STREJC nach [2, S. 300]

Weitere Möglichkeiten ist die Approximation nach THAL-LARSEN mittels PT_3T_t -Glied (siehe [2, S. 302]).

1.2.15 Welche Testsignale sind zur Identifikation von DT_1 -Gliedern geeignet? Wie ermittelt man aus dem entsprechenden Zeitverläufen die Kennwerte des DT_1 -Gliedes?

DT_1 -Glied: $G(s) = \frac{Ks}{1+Ts}$

Der Parameter K kann durch das asymptotische Verhalten der Rampenantwort ermittelt werden:

$$K = \frac{y(t \rightarrow \infty)}{u_0} \tag{PA1-35}$$

Oder aber durch Untersuchung der Sprungantwort:

$$a = y(\dot{t} \rightarrow 0) = -\frac{Ku_0}{T^2} \tag{PA1-36}$$

$$b = y(t \rightarrow 0) = \frac{Ku_0}{T} \tag{PA1-37}$$

Es ergibt also ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$K = \frac{-b^2}{a} \tag{PA1-38}$$

$$T = \frac{Ku_0}{b} \tag{PA1-39}$$

1.2.16 Ermitteln Sie analytisch die Dämpfung D und die Zeitkonstante T_0 des Regelkreises bestehend aus I -Regler $G_R(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_1 s}$ und PT_1 -Strecke $G_S(s) = \frac{K_S}{T_S s + 1}$ als Funktionen von T_S , K_S und $K_1 = \frac{1}{T_1}$! Wie sind T_S , K_S und K_1 zu wählen, damit sich bestimmte Werte für D und T_0 einstellen lassen?

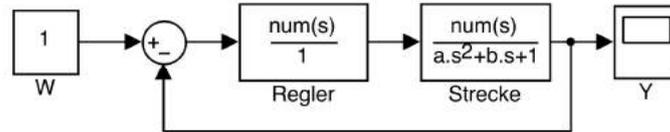


Abbildung PA1-10: Blockschaltbild eines Regelkreises aus I -Regler und PT_1 -Strecke

Aus Abbildung 1.2.16 kann folgende Gleichung für die Übertragungsfunktion $G(s)$ hergeleitet werden.

$$Y(s) = G_S(s)G_R(s) [U(s) - Y(s)] \quad (\text{PA1-40})$$

$$= \underbrace{\frac{G_S(s)G_R(s)}{a + G_R(s)G_S(s)}}_{G(s)} \cdot U(s) \quad (\text{PA1-41})$$

Mit $G_S(s)$ als Übertragungsfunktion der Strecke und $G_R(s)$ als Übertragungsfunktion des Reglers

$$G_S(s) = \frac{K_S}{T_S s + 1} \quad (\text{PA1-42})$$

$$G_R(s) = \frac{K_I}{s} \quad (\text{PA1-43})$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{K_S K_I}{T_S s^2 + s + K_S K_I} \quad (\text{PA1-44})$$

$$= \frac{\overbrace{1}^K}{\underbrace{\frac{T_S}{K_S K_I}}_{T_0^2} s^2 + \underbrace{\frac{1}{K_S K_I}}_{2dT_0} s + 1} \quad (\text{PA1-45})$$

Durch Umstellen folgt:

$$K = 1 \quad (\text{PA1-46})$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{T_S}{K_S K_I}} \quad (\text{PA1-47})$$

$$D = \frac{T_0}{2K_S K_I} = \frac{1}{2K_S K_I} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{T_S}{K_S K_I}}} \quad (\text{PA1-48})$$

1.2.17 Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Überschwingweite Δh sowie der Zeit bis zum ersten Überschwingen T_m der Übergangsfunktion eines Schwingungsgliedes und den Kennwerten D und T_0 ?

Anhand zweier auf einander folgender Überschwingweiten Δh_n , Δh_{n+1} und der Zeitspanne T_e zwischen diesen können die Kennwerte D und T_0 eines Schwingungsgliedes ermittelt werden.

$$D = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}{4\pi^2 + \ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}} \quad (\text{PA1-49})$$

$$T_0 = \frac{1}{w_0} = \frac{T_e \sqrt{1 - D^2}}{2\pi} \quad (\text{PA1-50})$$

1.2.18 Bestimmen Sie analytisch die bleibende Regelabweichung eines Regelkreises, bestehend aus PT_2 -Strecke und P -Regler!

Der Regelfehler $e(t)$ ist definiert als:

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (\text{PA1-51})$$

wobei $w(t)$ die Führungsgröße und $y(t)$ die Ausgangsgröße ist. Im Frequenzbereich ergibt sich:

$$E(s) = W(s) - Y(s) \quad (\text{PA1-52})$$

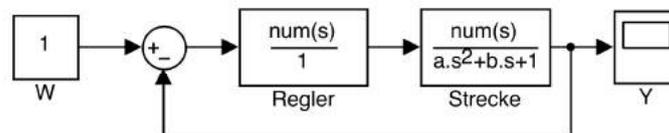


Abbildung PA1-11: Blockschaltbild eines Regelkreises aus P -Regler und PT_2 -Strecke

Aus Abbildung 1.2.18 geht für $Y(s)$ hervor:

$$Y(s) = G_R(s)G_S(s)E(s) \quad (\text{PA1-53})$$

Wird dieses nun in Gleichung PA1-52 eingesetzt und nach dem Regelfehler umgestellt:

$$E(s) = \frac{W(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \quad (\text{PA1-54})$$

$$= \frac{W(s)}{1 + G_0(s)} \quad (\text{PA1-55})$$

Durch Einsetzen der Definition für ein P - beziehungsweise PT_2 -Glied erhält man für $G_0(s)$:

$$G_R(s) = K_R \quad (\text{PA1-56})$$

$$G_S(s) = \frac{K_S}{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1} \quad (\text{PA1-57})$$

$$G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) \quad (\text{PA1-58})$$

$$= \frac{K_S \cdot K_R}{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1 + K_S K_R} \quad (\text{PA1-59})$$

Für Gleichung PA1-52 kann nun folgendes angegeben werden:

$$E(s) = \frac{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1}{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1 + K_S K_R} \quad (\text{PA1-60})$$

Die bleibende Regelabweichung ist eine Betrachtung des Grenzwertes für $t \rightarrow \infty$. Es folgt aus den Gesetzen der Laplace-Transformation:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (\text{PA1-61})$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1}{T_0^2 s^2 + 2DT_0 s + 1 + K_S K_R} \quad (\text{PA1-62})$$

$$= \frac{1}{1 + K_R K_S} \quad (\text{PA1-63})$$

Damit ist gezeigt, dass eine bleibende Regelabweichung vorhanden ist.

2 Auswertung

Anmerkung

Alle für die graphische Auswertung herangezogenen Abbildungen befinden sich im Anhang!

Die verwendete Nomenklatur erklärt sich wie folgt:

$$u(x|y) \rightarrow \text{Folgerung} \quad (\text{PA1-1})$$

$$h(x|y) \rightarrow \text{Folgerung} \quad (\text{PA1-2})$$

$$h(x|y), h(x|y) \rightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) \quad (\text{PA1-3})$$

Dabei stehen x und y in Gleichung PA1-1, Gleichung PA1-2 und Gleichung PA1-3 für die jeweiligen x - und y -Koordinaten des Punktes des Eingangssignal u oder der Sprungantwort h .

Steigungen wurden stets durch die lineare Approximation durch zwei Punkte errechnet wie Gleichung PA1-3 zeigt.

Die verwendeten Formeln zur Berechnung der Parameter sind Unterabschnitt 1.2 zu entnehmen.

Die Bestimmung der Parameter mittels Wendetangente erfolgt nach den [1] Eine tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in Abschnitt 3.

2.1 PT_1 -Glieder

a)

$$u(0,29|2,012) \longrightarrow u_0 = 2,012 \quad (\text{PA1-4})$$

$$h(8|2,012) \longrightarrow h(t \rightarrow \infty) = 2,012 \quad (\text{PA1-5})$$

$$h(0|0,009766), h(0,01|0,2051) \longrightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) = 19,5334 \quad (\text{PA1-6})$$

$$K = \frac{h(t \rightarrow \infty)}{u_0} = 1 \quad (\text{PA1-7})$$

$$T = \frac{Ku_0}{\dot{h}(t \rightarrow 0)} = 0,1030 \quad (\text{PA1-8})$$

b)

$$u(8|2,017) \longrightarrow u_0 = 2,017 \quad (\text{PA1-9})$$

$$h(8|2,012) \longrightarrow h(t \rightarrow \infty) = 2,012 \quad (\text{PA1-10})$$

$$h(0|0,009766), h(0,01|0,05371) \longrightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) = 4,3944 \quad (\text{PA1-11})$$

$$K = \frac{h(t \rightarrow \infty)}{u_0} = 0,9975 \quad (\text{PA1-12})$$

$$T = \frac{Ku_0}{\dot{h}(t \rightarrow 0)} = 0,4579 \quad (\text{PA1-13})$$

c)

$$u(0,8|2,012) \longrightarrow u_0 = 2,012 \quad (\text{PA1-14})$$

$$h(8|0,9912) \longrightarrow h(t \rightarrow \infty) = 0,9912 \quad (\text{PA1-15})$$

$$h(0|0,004883), h(0,01|0,07813) \longrightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) = 7,3247 \quad (\text{PA1-16})$$

$$K = \frac{h(t \rightarrow \infty)}{u_0} = 0,4926 \quad (\text{PA1-17})$$

$$T = \frac{Ku_0}{\dot{h}(t \rightarrow 0)} = 0,1353 \quad (\text{PA1-18})$$

Die ermittelten Werte der proportionalen Verstärkung K sind in allen drei Einstellung sehr nahe an den eingestellten Werten. Man kann davon ausgehen, dass die Bestimmung von K relativ genau und unproblematisch erfolgt. Die ermittelten Zeitkonstanten T bei den Einstellungen $b)$ und $c)$ weichen etwas mehr von den eingestellten Werten ab. Dies könnte mit den Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Anfangssteigung $\dot{h}(t=0)$ zusammenhängen: Bei einem steilen Anstieg liegen nur auf die y -Koordinate bezogen weit voneinander entfernte Messpunkte zur Bestimmung der Anfangssteigung vor. Der Faktor K bestimmt die proportionale Verstärkung des Eingangssignales u_0 und ist somit für die Höhe des konstanten Wertes bei fortschreitender Zeit verantwortlich. Die Zeitkonstante T legt die Anstiegszeit bis zum Erreichen des konstanten Wertes fest. Dabei gilt: Je größer T , desto länger die Anstiegszeit.

Auch am Frequenzgang des PT_1 -Gliedes können die Parameter K und T abgeschätzt werden. K lässt sich am Wert der Amplitude für niedrige Frequenzen ablesen und T über das Reziproke der Knickfrequenz ω_e .

2.2 I–Glied

a)

$$u(2|0,1074) \longrightarrow u_0 = 0,1074 \quad (\text{PA1-19})$$

$$h(1|1,265), h(6|7,163) \longrightarrow \dot{h}(t) = 1,1796 \quad (\text{PA1-20})$$

$$K_I = \frac{\dot{h}(t)}{u_0} = 10,9832 \quad (\text{PA1-21})$$

$$T_I = \frac{1}{K} = 0,0910 \quad (\text{PA1-22})$$

b)

$$u(2|0, 1077) \longrightarrow u_0 = 0, 1077 \quad (\text{PA1-23})$$

$$h(1|0, 1221), h(6|0, 7129) \longrightarrow \dot{h}(t) = 0, 1182 \quad (\text{PA1-24})$$

$$K_I = \frac{\dot{h}(t)}{u_0} = 1, 0971 \quad (\text{PA1-25})$$

$$T_I = \frac{1}{K} = 0, 9115 \quad (\text{PA1-26})$$

In beiden Einstellungen a) und b) liegen die ermittelten Werte für T_I nahe bei den eingestellten.

Für K_I , das Reziproke von T_I , gilt: Je größer K_I , desto steiler der Anstieg der Geraden.

2.3 DT_1 -Glied

a)

$$u(0, 5|0, 3076) \longrightarrow u_0 = 0, 3076 \quad (\text{PA1-27})$$

$$h(0.0002|8, 068) \longrightarrow h(t \rightarrow 0) = 8, 068 \quad (\text{PA1-28})$$

$$h(0.0002|8, 068), h(0, 0003|7, 881) \longrightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) = -2050 \quad (\text{PA1-29})$$

$$a = \dot{h}(t \rightarrow 0) = -2050 \quad (\text{PA1-30})$$

$$b = h(t \rightarrow 0) = 8, 068 \quad (\text{PA1-31})$$

$$K = \frac{-b^2}{a \cdot u_0} = 0, 1037 \quad (\text{PA1-32})$$

$$T = \frac{Ku_0}{b} = 3, 9532 \times 10^{-3} \quad (\text{PA1-33})$$

b)

$$u(0, 5|0, 3076) \longrightarrow u_0 = 0, 3076 \quad (\text{PA1-34})$$

$$h(0.0002|8, 301) \longrightarrow h(t \rightarrow 0) = 8, 301 \quad (\text{PA1-35})$$

$$h(0.0002|8, 301), h(0, 0003|8, 281) \longrightarrow \dot{h}(t \rightarrow 0) = -200 \quad (\text{PA1-36})$$

$$a = \dot{h}(t \rightarrow 0) = -200 \quad (\text{PA1-37})$$

$$b = h(t \rightarrow 0) = 8, 301 \quad (\text{PA1-38})$$

$$K = \frac{-b^2}{a \cdot u_0} = 1, 1201 \quad (\text{PA1-39})$$

$$T = \frac{Ku_0}{b} = 0, 0415 \quad (\text{PA1-40})$$

Die ermittelten Werte für K passen gut zu den vorgegebenen Werten. Die Verzögerungszeitkonstante T jedoch unterscheidet sich von Fall a) zu b). Dies passt nicht zur Erwartung, dass T in beiden Fällen aus schaltungstechnischen Gründen gleich sein müsste. Eine mögliche Erhitzung der Elemente durch die Beaufschlagung mit einem Eingangssignal könnte möglicherweise zu einer Veränderung des Parameters beitragen.

Der Differenzierbeiwert K bestimmt die Größe des Abstieges nach dem Maximum des Ausschlags. Dabei gilt: Je größer K , desto geringer der Abstieg. Die Verzögerungszeitkonstante T legt die Zeitdauer von Aufschaltung des Sprunges bis zum Maximum der Sprungantwort fest. Je größer T , desto größer die Zeitdauer.

2.4 PT_2 -Glied (aperiodischer Grenzfall)

a)

$$u(0,325|5,015) \longrightarrow u_0 = 5,5015 \quad (\text{PA1-41})$$

$$h(0,152|1,504), h(0,19|1,997) \quad (\text{PA1-42})$$

$$\longrightarrow \text{Wendetangente} : h = 12,9767 \times t - 0,468 \quad (\text{PA1-43})$$

$$\longrightarrow T_u = 0,0361, T_a = 0,4600 - 0,0361 = 0,4239 \quad (\text{PA1-44})$$

$$\frac{T_a}{T_u} = 11,7424 \approx 11,91 \quad (\text{PA1-45})$$

$$\mu = 0,3 \quad (\text{PA1-46})$$

$$T_1 = \frac{T_a}{1,68} = 0,2523 \quad (\text{PA1-47})$$

$$T_2 = T_1 \cdot \mu = 0,0757 \quad (\text{PA1-48})$$

Die ermittelten Werte für T_1 und T_2 liegen in der gleichen Größenordnung wie die eingestellten Werte, zeigen jedoch im Vergleich zu den anderen Messungen erhebliche Abweichungen. Auch ist auffällig, dass die bestimmten Parameter einmal oberhalb und einmal unterhalb des angegebenen Wertes für die Parameter T_1 und T_2 liegen. Dies kann mit einer ungenauen Bestimmung der Wendetangente sowie der Approximation $\frac{T_a}{T_u} = 11,7424 \approx 11,91$ in der weiteren Berechnung zusammenhängen.

2.5 PT_2 -Glied (Schwingungsfall)

c)

$$h(95, 4|1, 011), h(3, 375|1, 758), h(10, 15|1, 431) \quad (\text{PA1-49})$$

$$\longrightarrow \Delta h_n = 0,747, \Delta h_{n+1} = 0,42, T_e = 6,775 \quad (\text{PA1-50})$$

$$D = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}{4\pi^2 + \ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}} = 0,1199 \quad (\text{PA1-51})$$

$$T_0 = \frac{T_e \sqrt{1 - D^2}}{2\pi} = 1,0705 \quad (\text{PA1-52})$$

d)

$$h(98, 7|1, 011)h(6, 48|1, 748), h(19, 43|1, 421) \quad (\text{PA1-53})$$

$$\longrightarrow \Delta h_n = 0,737, \Delta h_{n+1} = 0,41, T_e = 12,95 \quad (\text{PA1-54})$$

$$D = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}{4\pi^2 + \ln\left(\frac{\Delta h_n}{\Delta h_{n+1}}\right)}} = 0,1210 \quad (\text{PA1-55})$$

$$T_0 = \frac{T_e \sqrt{1 - D^2}}{2\pi} = 2,0459 \quad (\text{PA1-56})$$

Sowohl die ermittelten Werte für D als auch für T_0 passen gut zu den eingestellten Werten. Die Abweichungen haben in beiden Fällen die selbe Größenordnung, jedoch fällt bei den Werten für die Dämpfung D diese stärker ins Gewicht, da die Werte für D eine Zehnerpotenz niedriger liegen als für T_0 .

Die Dämpfung D bestimmt die Höhe der Amplitude der Schwingungen um den konstanten Wert der proportionalen Verstärkung. Je weiter der Wert D von der 1 in Richtung 0 rückt, desto größer die Amplitude. Die Zeitkonstante T_0 legt den Wert der Anstiegszeit sowie die Abstände der einzelnen Schwingungen zueinander fest. Dabei gilt je größer T_0 , desto länger die Anstiegszeit und desto größer die Abstände zwischen den Schwingungen.

2.6 IT_1 -Glied

a)

$$u(8|0, 0, 4102) \longrightarrow u_0 = 0, 4102 \quad (\text{PA1-57})$$

$$h(8|3, 594), h(9|4, 053) \longrightarrow \dot{h}(t) = 0, 459 \quad (\text{PA1-58})$$

$$\text{Geradengleichung : } h^* = 0, 459t - 0, 078 \quad (\text{PA1-59})$$

$$K = \frac{\dot{h}(t)}{u_0} = 1, 1110 \quad (\text{PA1-60})$$

$$h^*(t) = 0 \longrightarrow T = 0, 1699 \quad (\text{PA1-61})$$

b)

$$u(8|0, 0, 5078) \longrightarrow u_0 = 0, 5078 \quad (\text{PA1-62})$$

$$h(8|4, 087), h(9|4, 717) \longrightarrow \dot{h}(t) = 0, 63 \quad (\text{PA1-63})$$

$$\text{Geradengleichung : } h^* = 0, 63t - 0, 953 \quad (\text{PA1-64})$$

$$K = \frac{\dot{h}(t)}{u_0} = 1, 2406 \quad (\text{PA1-65})$$

$$h^*(t) = 0 \longrightarrow T = 1, 5127 \quad (\text{PA1-66})$$

c)

$$u(8|0, 0, 5078) \longrightarrow u_0 = 0, 5078 \quad (\text{PA1-67})$$

$$h(8|1, 699), h(9|1, 963) \longrightarrow \dot{h}(t) = 0, 264 \quad (\text{PA1-68})$$

$$\text{Geradengleichung : } h^* = 0, 264u - 0, 413 \quad (\text{PA1-69})$$

$$K = \frac{\dot{h}(t)}{u_0} = 0, 5199 \quad (\text{PA1-70})$$

$$h^*(t) = 0 \longrightarrow T = 1, 564 \quad (\text{PA1-71})$$

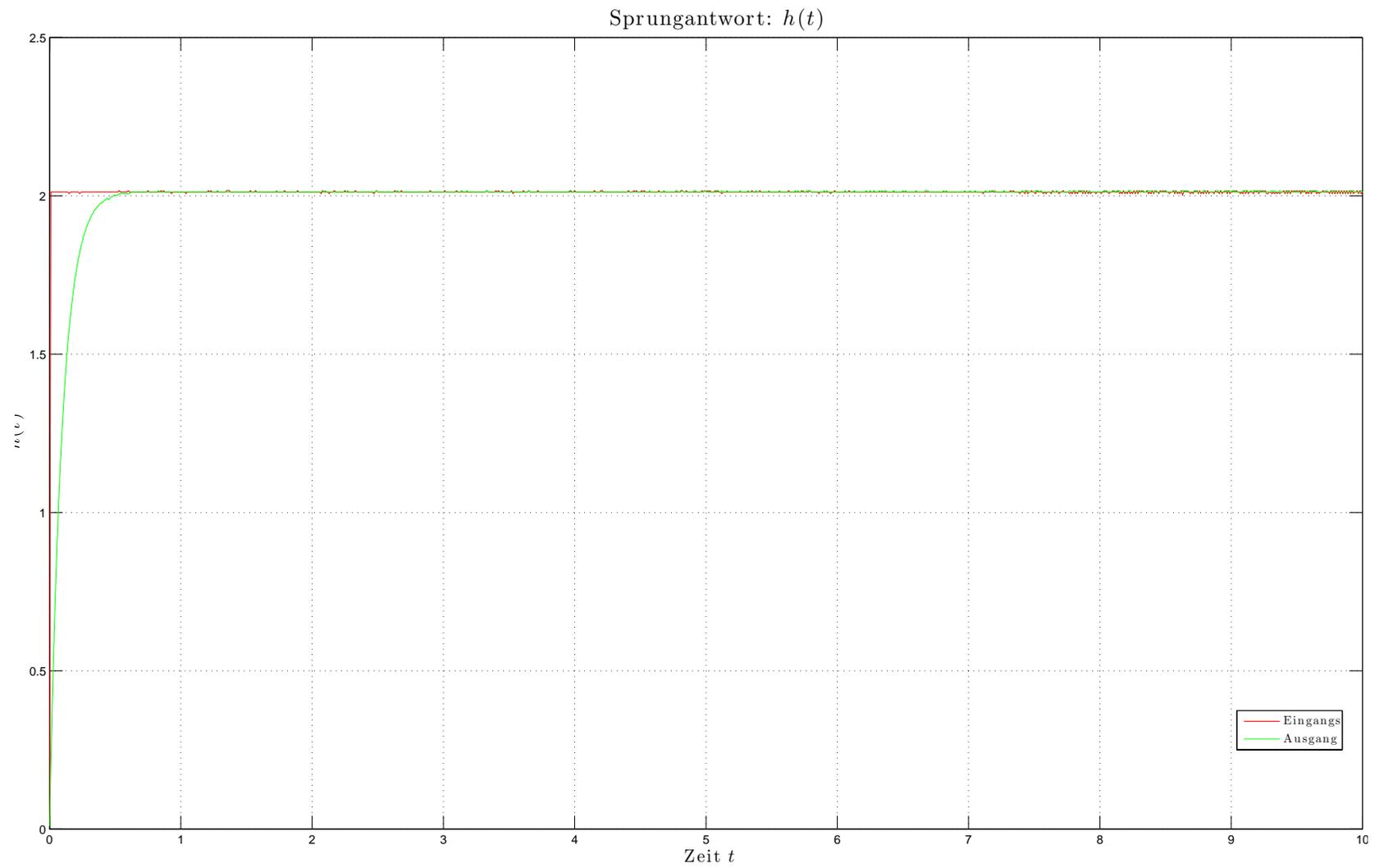
Die bestimmten Werte für die Verstärkung K passen in allen drei Fällen *a*), *b*) und *c*) recht gut zu den eingestellten Werten. Die Zeitkonstante T jedoch weist in allen drei Fällen ungefähr das 1,5-fache der eingestellten Werte auf. Dies weist auf ein systematisches Problem bei der Bestimmung von T hin.

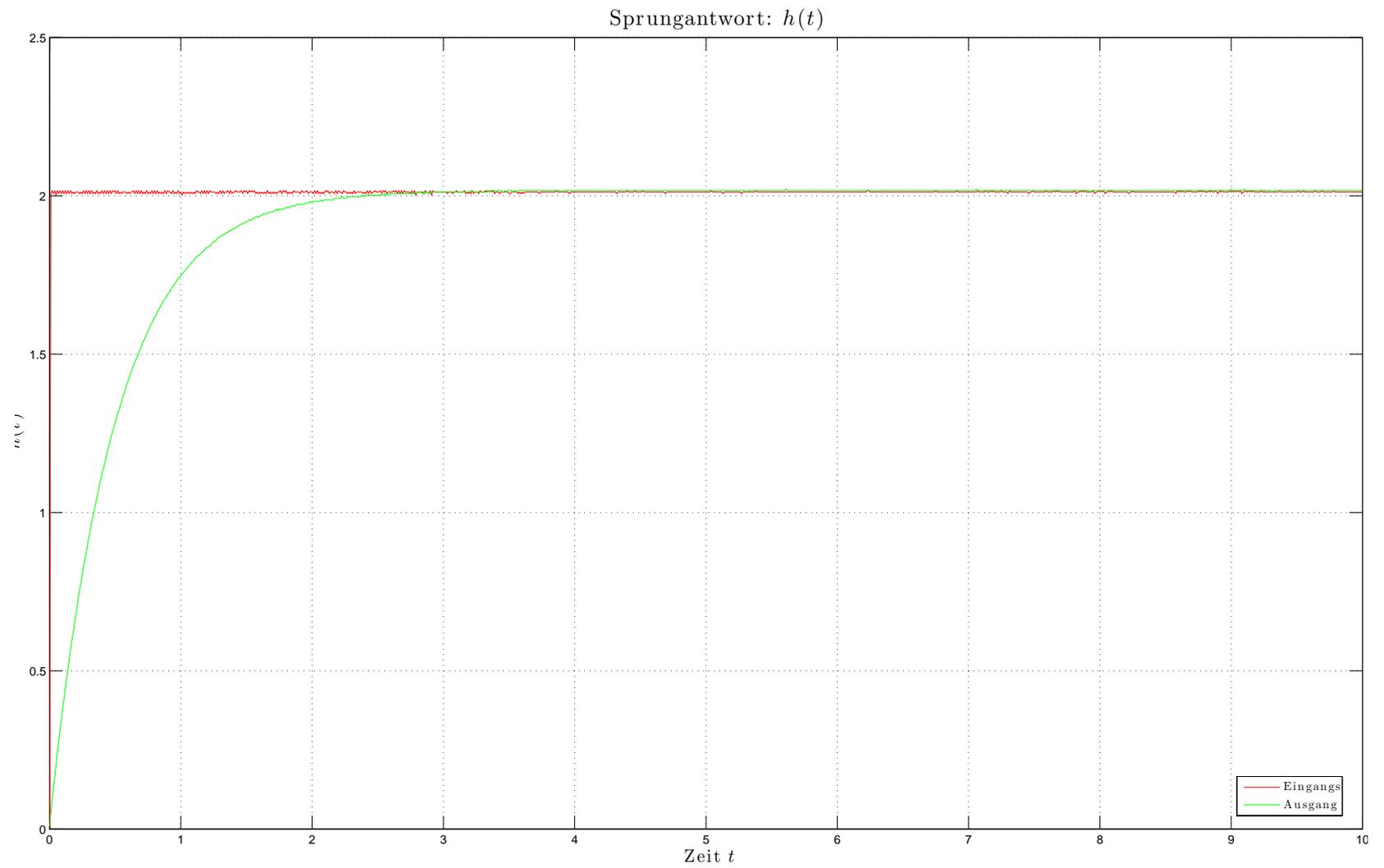
Die Zeitkonstante T legt die Zeitdauer fest, die es braucht bis die Sprungantwort in einen Bereich mit konstanter Steigung übergeht. Je größer T , desto größer die Zeitdauer. Die Verstärkung K bestimmt dabei die Steigung des konstanten Anstieges. Hierbei gilt: Je größer K , desto größer die Steigung.

3 Zusammenfassung

Aufgabe	Eingestellte Parameter	ermittelte Parameter
4.1: PT_1 -Glieder a)	$K = 1, T = 0, 1$	$K = 1, T = 0, 1030$
4.1: PT_1 -Glieder b)	$K = 1, T = 0, 5$	$K = 0, 9975, T = 0, 4579$
4.1: PT_1 -Glieder c)	$K = 0, 5, T = 0, 1$	$K = 0, 4926, T = 0, 1353$
4.2: I -Glieder a)	$T_I = 0, 1$	$T_I = 0, 0910$
4.2: I -Glieder b)	$T_I = 1$	$T_I = 0, 9115$
4.3: DT_1 -Glieder a)	$K_D = 0, 1$	$K_D = 0, 1037$
4.3: DT_1 -Glieder b)	$K_D = 1$	$K_D = 1, 1201$
4.4: PT_2 -Glieder a)	$T_1 = 0, 1, T_1 = 0, 1$	$T_1 = 0, 2523, T_1 = 0, 0757$
4.5: PT_2 -Glieder c)	$D = 0, 1, T_0 = 1$	$D = 0, 1199, T_0 = 1, 0705$
4.5: PT_2 -Glieder d)	$D = 0, 1, T_0 = 2$	$D = 0, 1210, T_0 = 2, 0459$
4.6: IT_1 -Glieder a)	$K = 1, T = 0, 1$	$K = 1, 1110, T = 0, 1699$
4.6: IT_1 -Glieder b)	$K = 1, T = 1$	$K = 1, 2406, T = 1, 5127$
4.6: IT_1 -Glieder c)	$K = 0, 5, T = 1$	$K = 0, 5199, T = 1, 564$

4 ANHANG

Abbildung PA1-1: PT_1 -Glieder a)

Abbildung PA1-2: PT_1 -Glieder b)

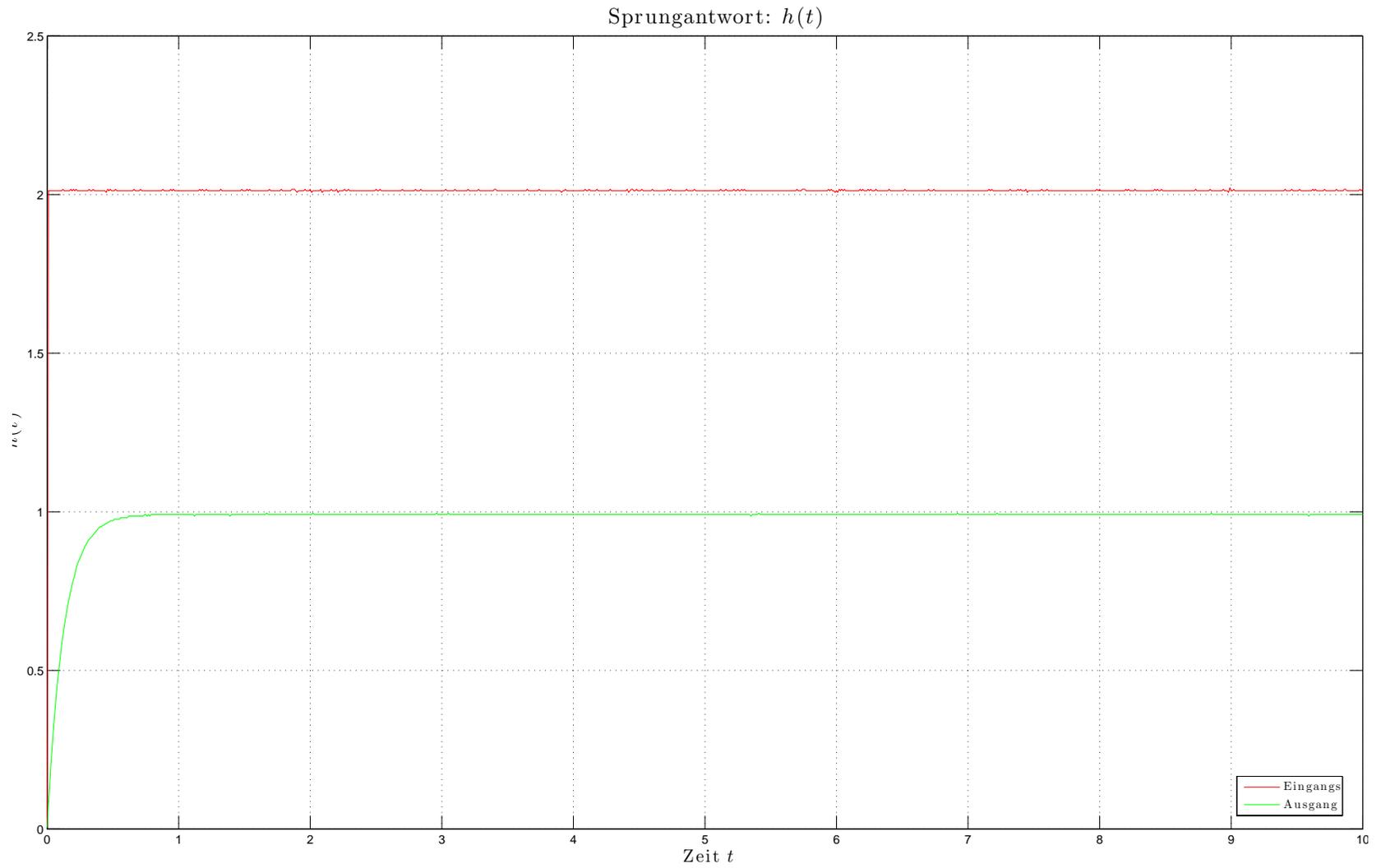
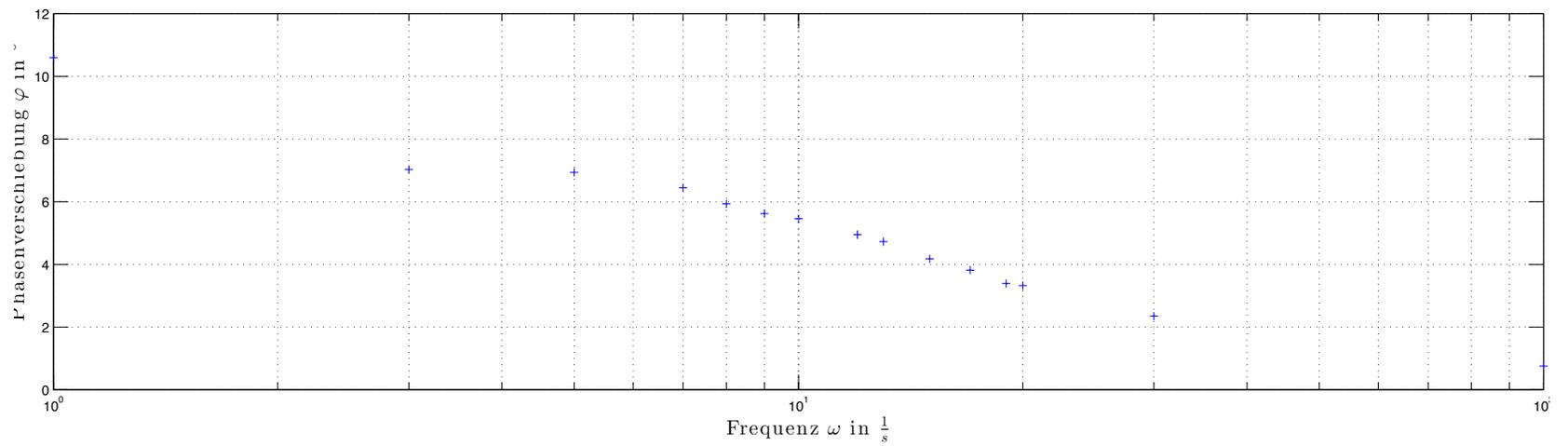
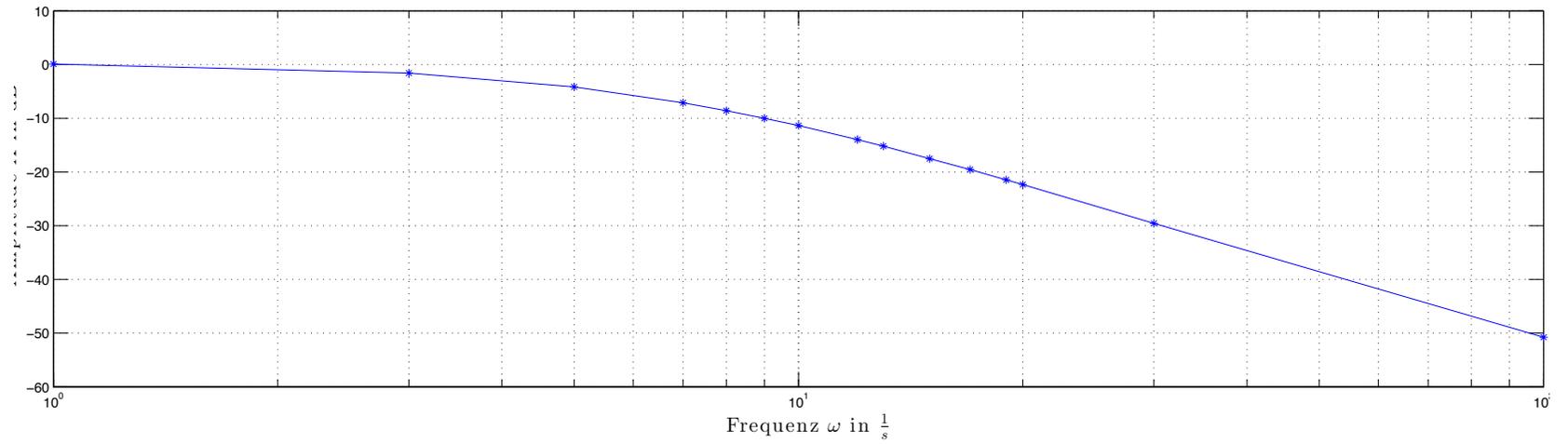
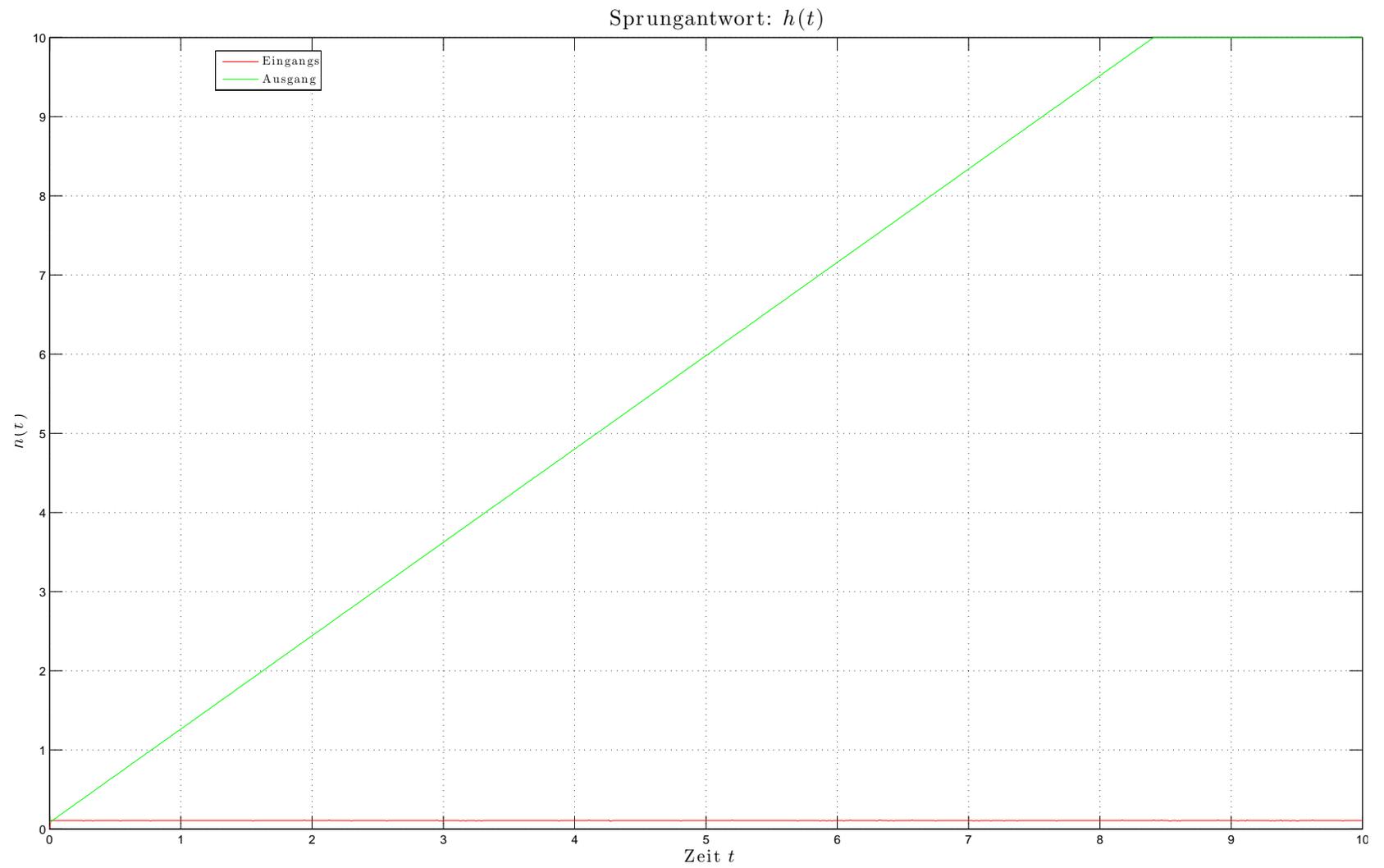


Abbildung PA1-3: PT_1 -Glieder c)

Abbildung PA1-4: BODE-Diagramm des PT_1 -Gliedes

Abbildung PA1-5: I -Glieder a)

35

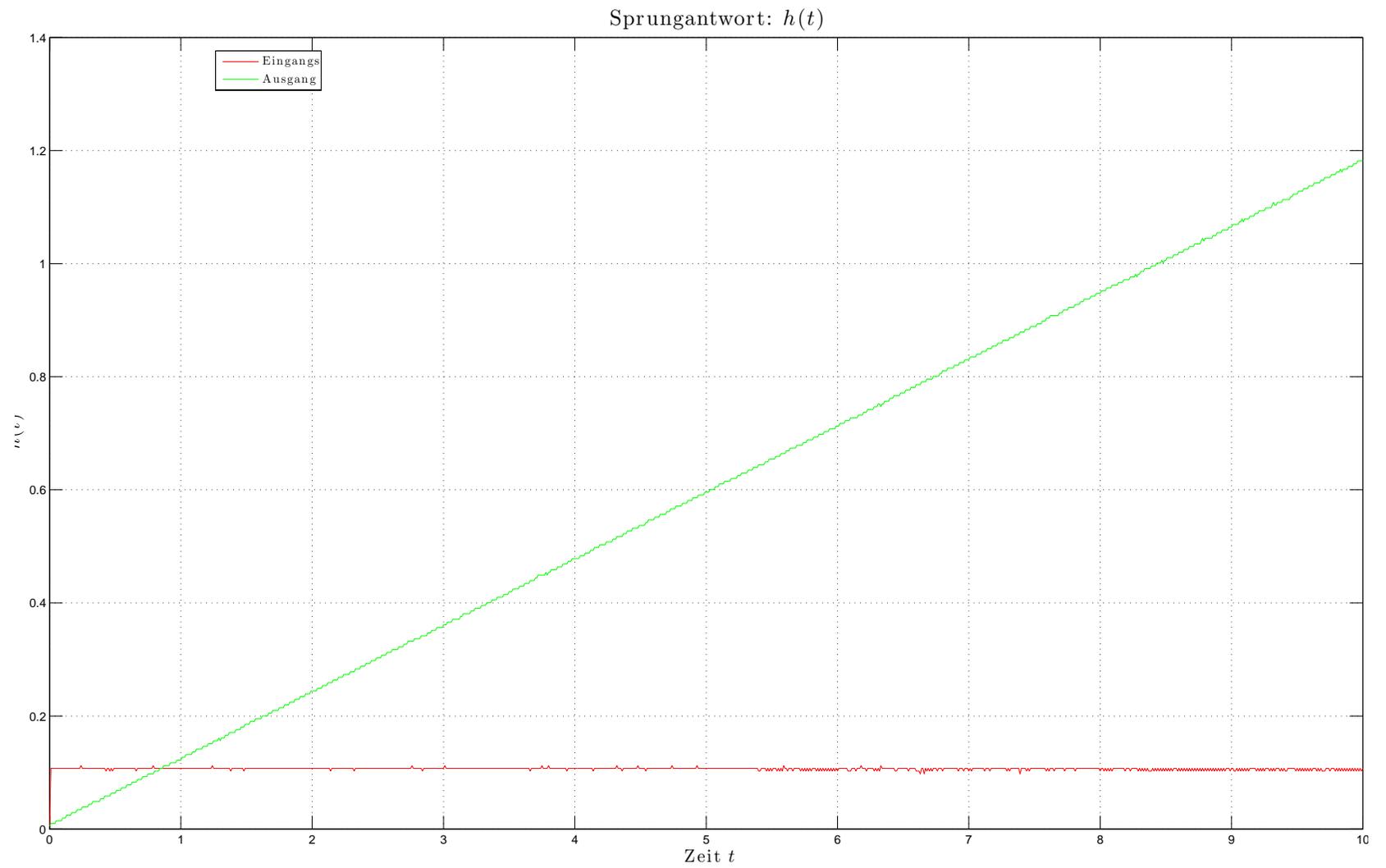
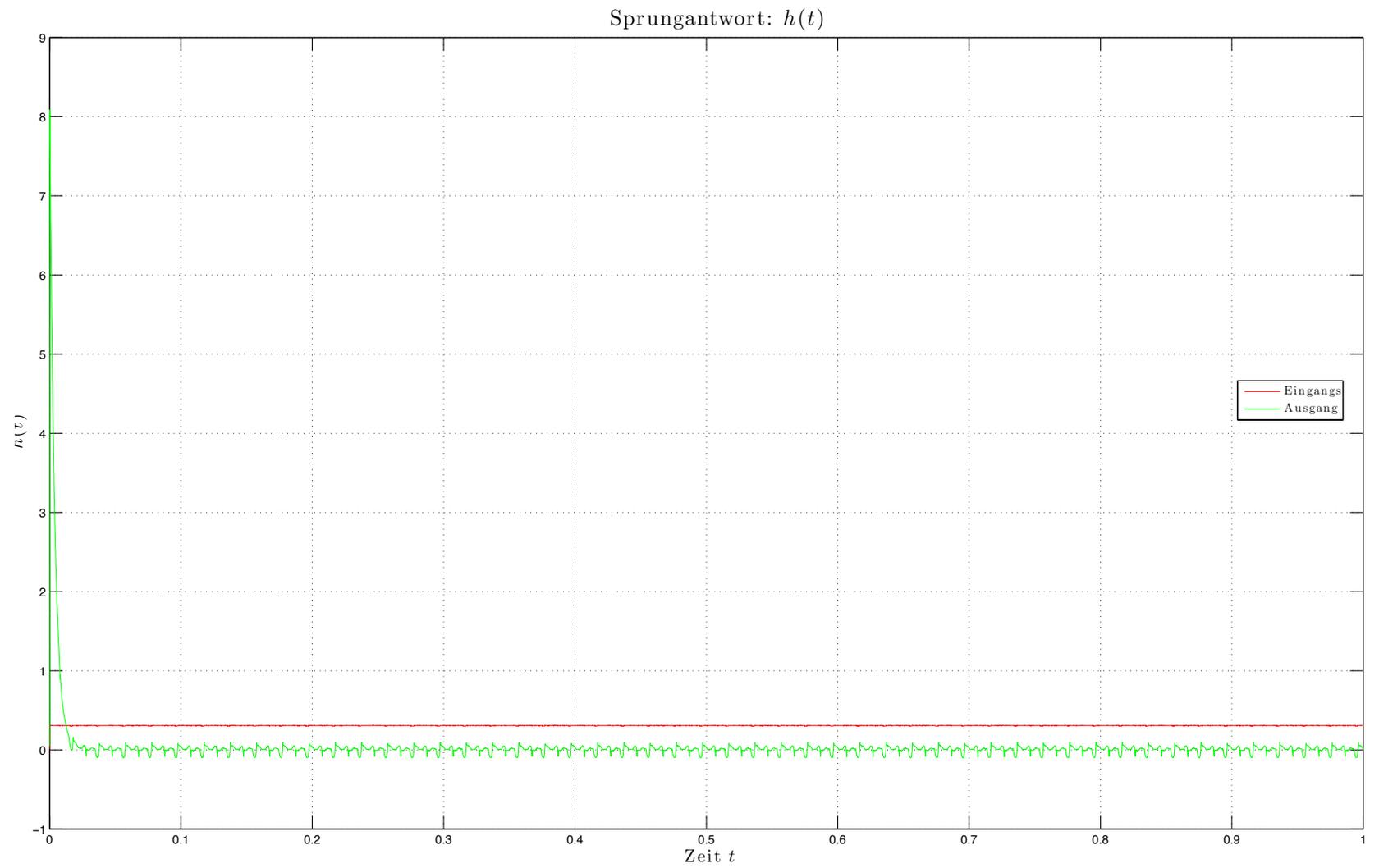
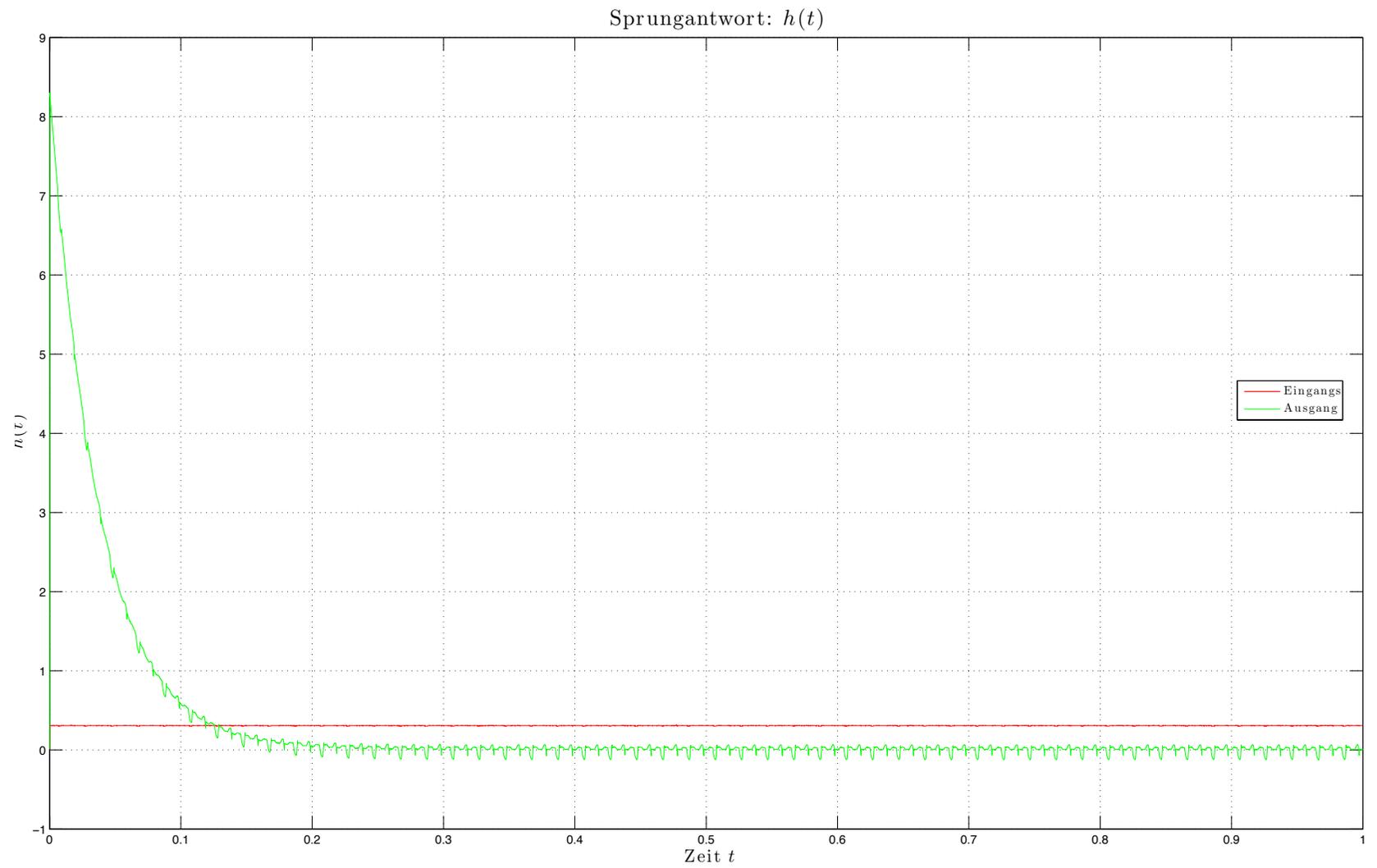
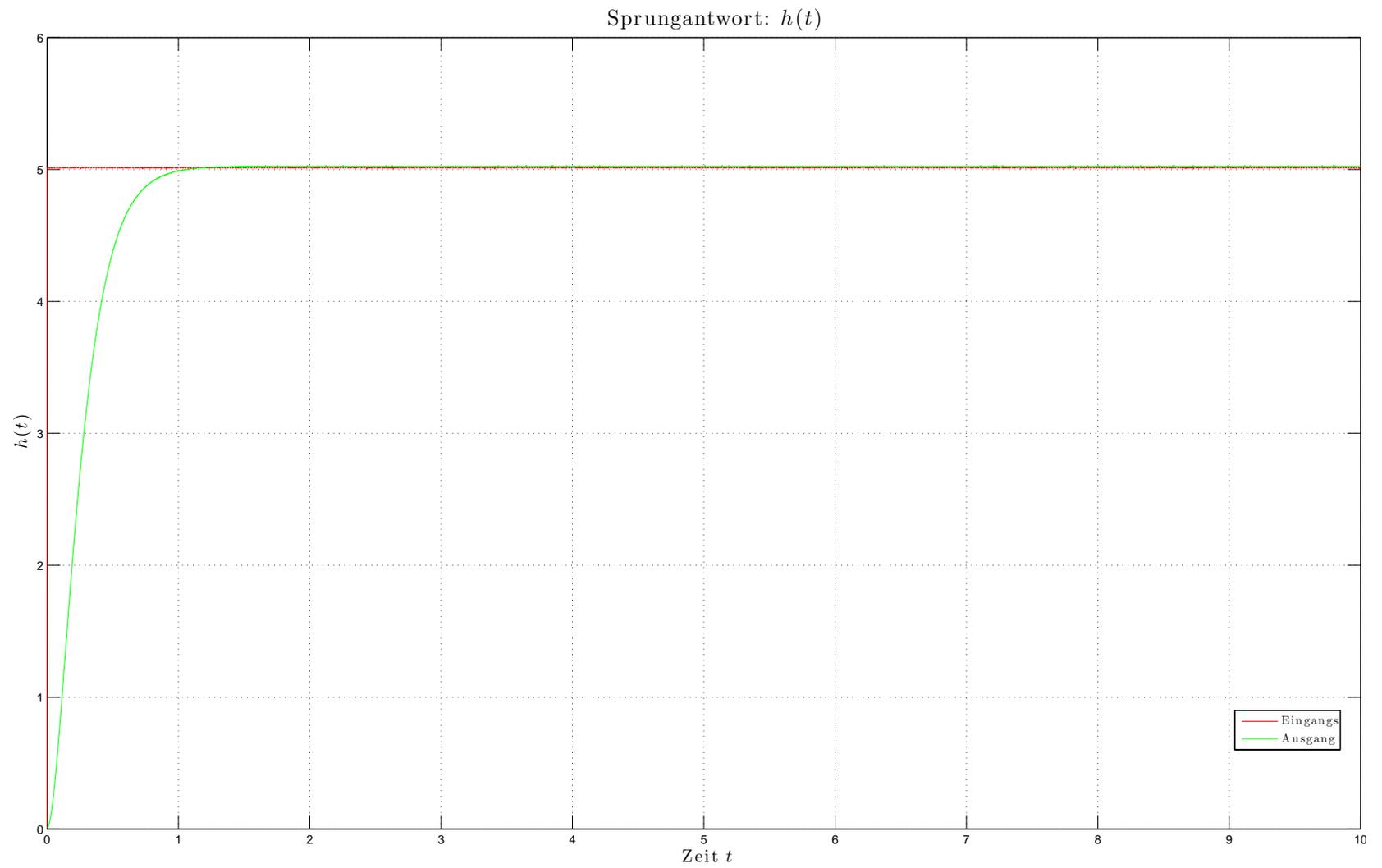


Abbildung PA1-6: I -Glieder b)

Abbildung PA1-7: DT_1 -Glieder a)

Abbildung PA1-8: DT_1 -Glieder b)

Abbildung PA1-9: PT_2 -Glieder (aperiodischer Grenzfall) a)

39

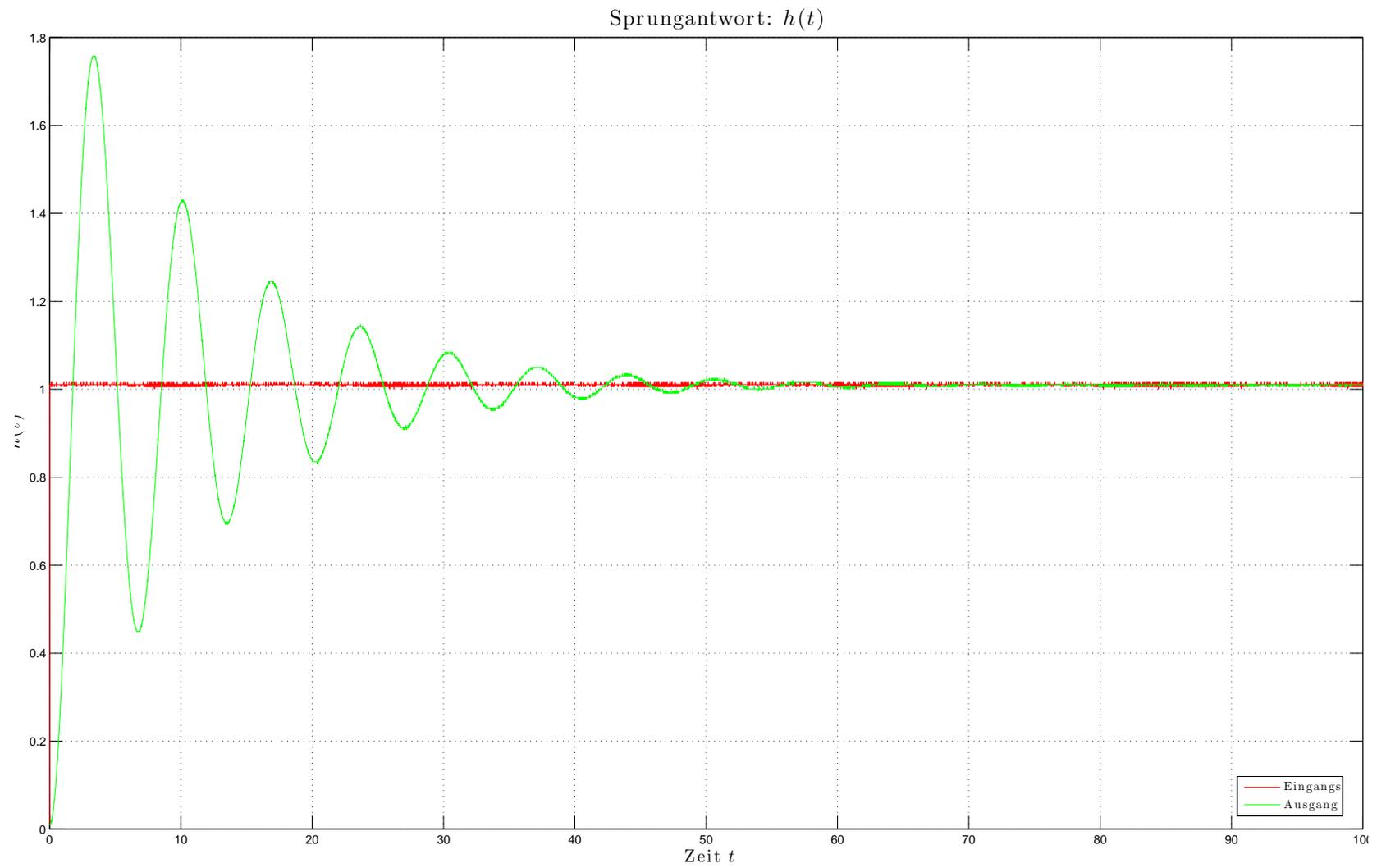


Abbildung PA1-10: PT_2 -Glieder (Schwingungsfall) c)

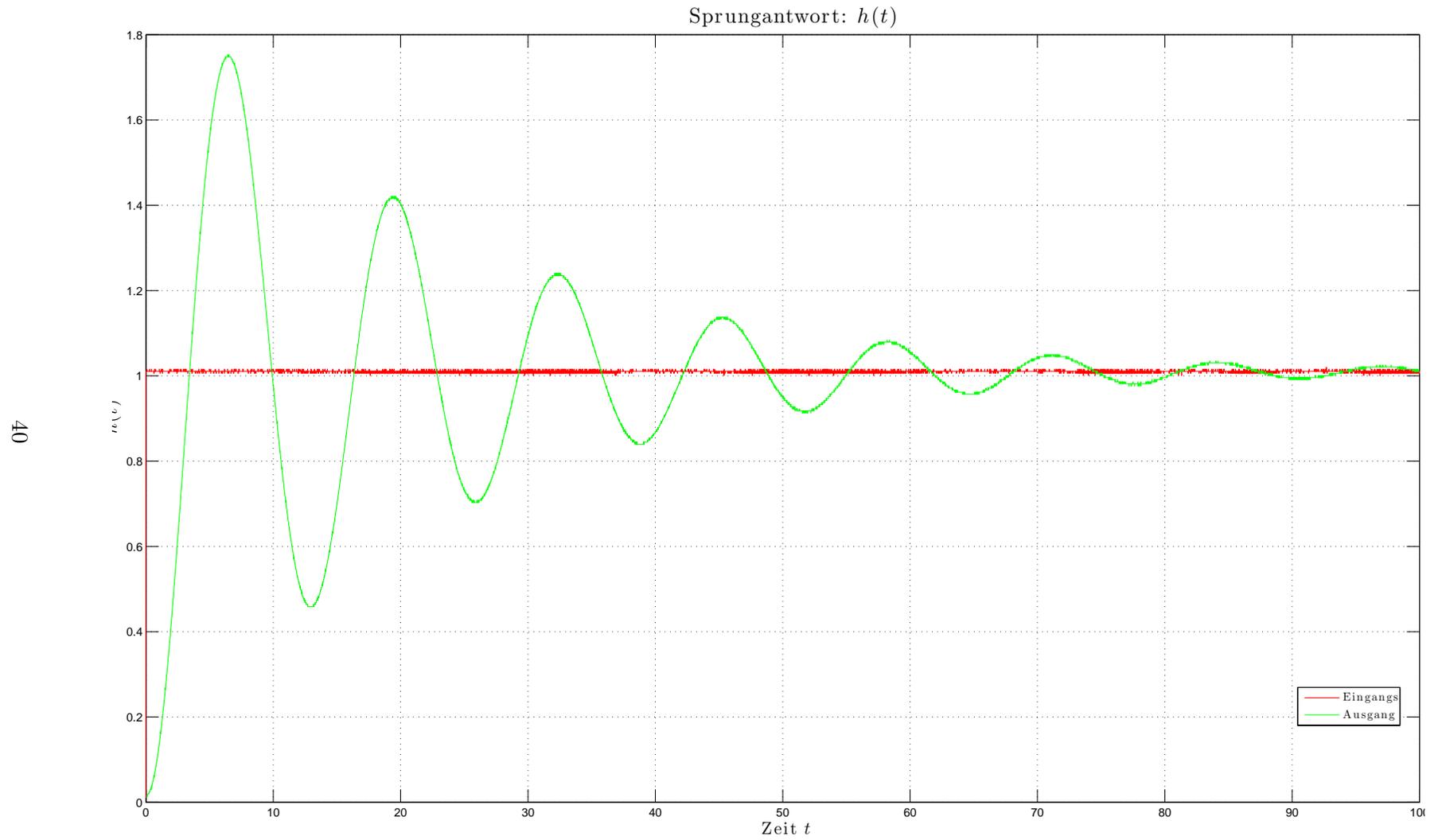
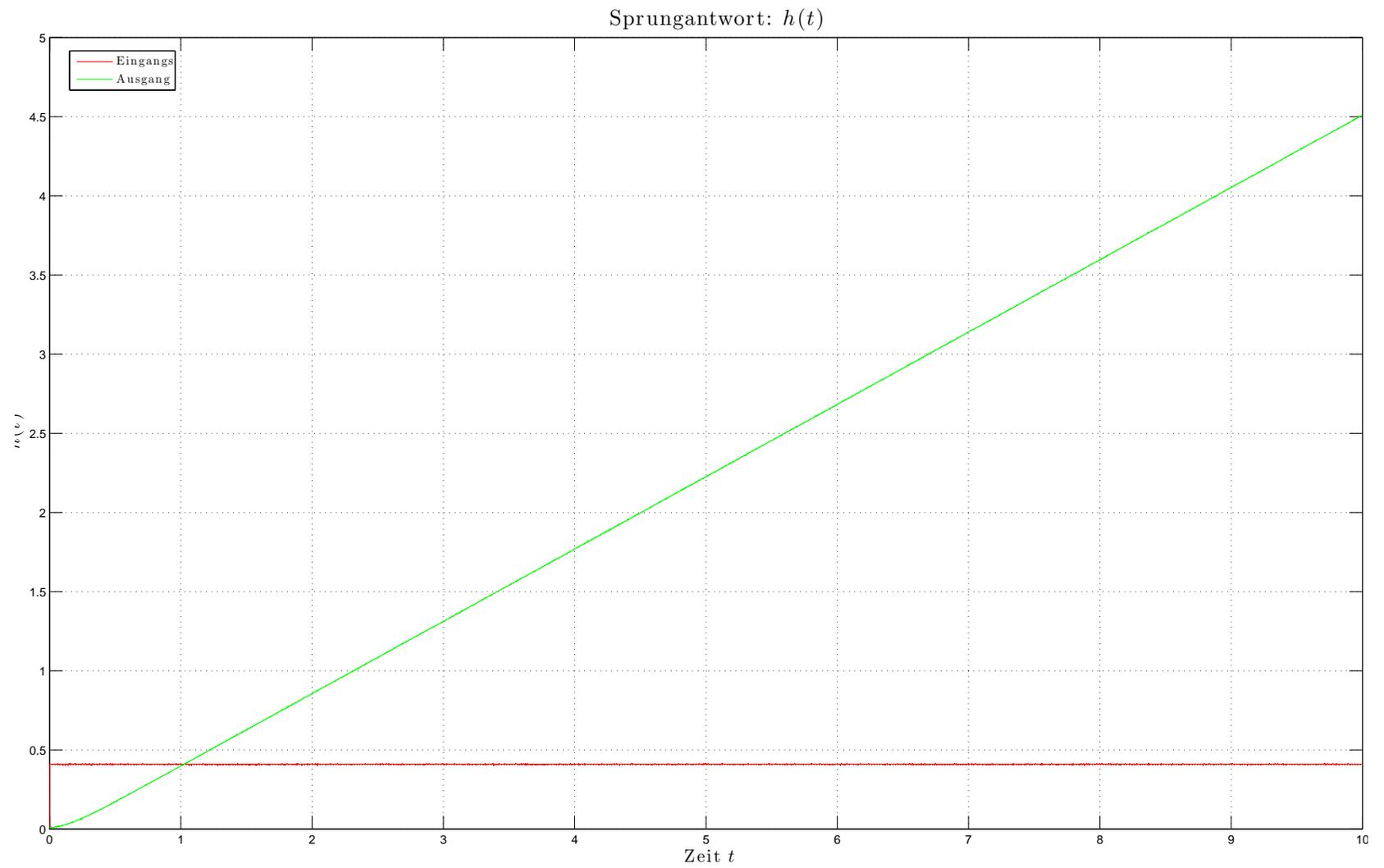
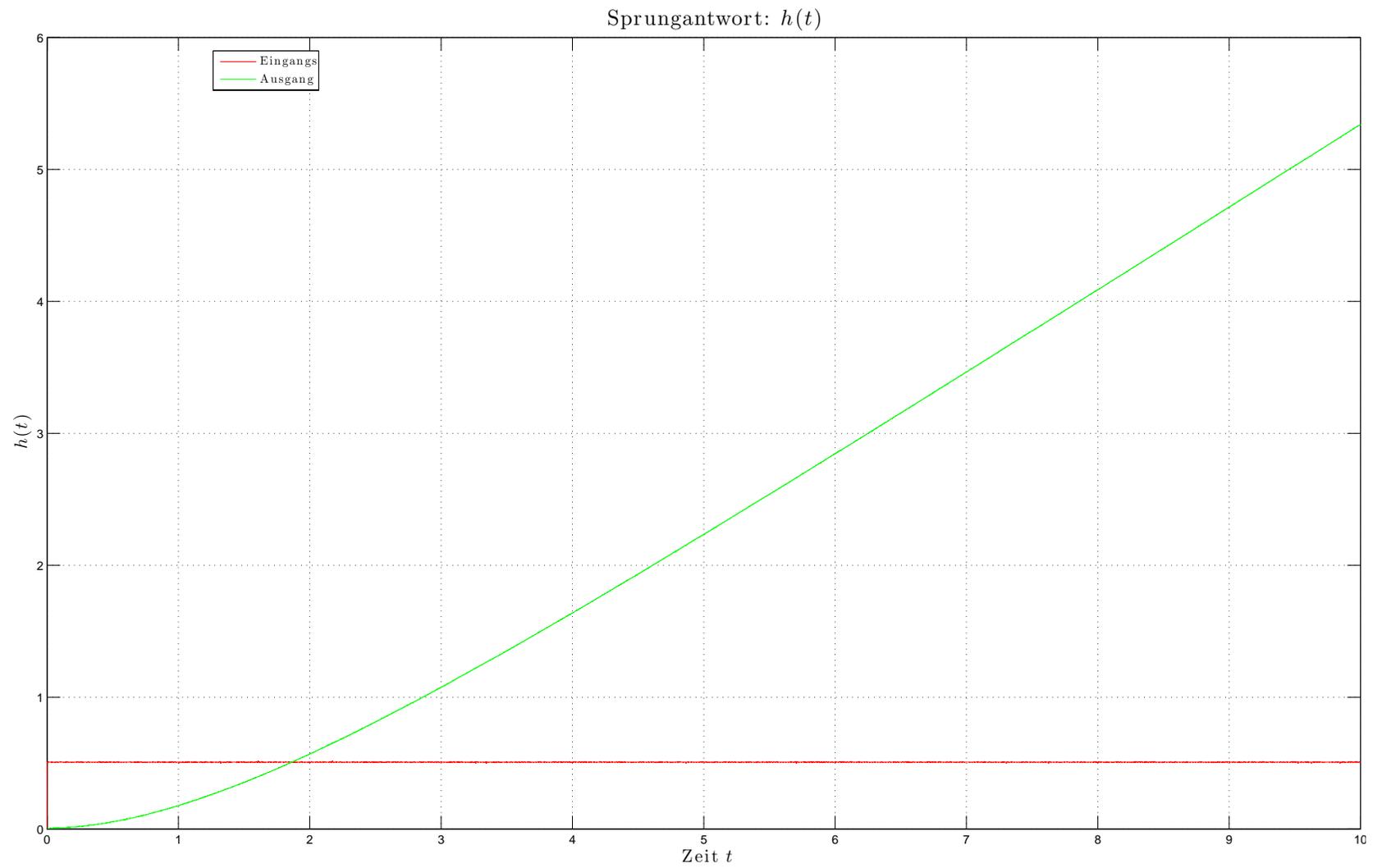
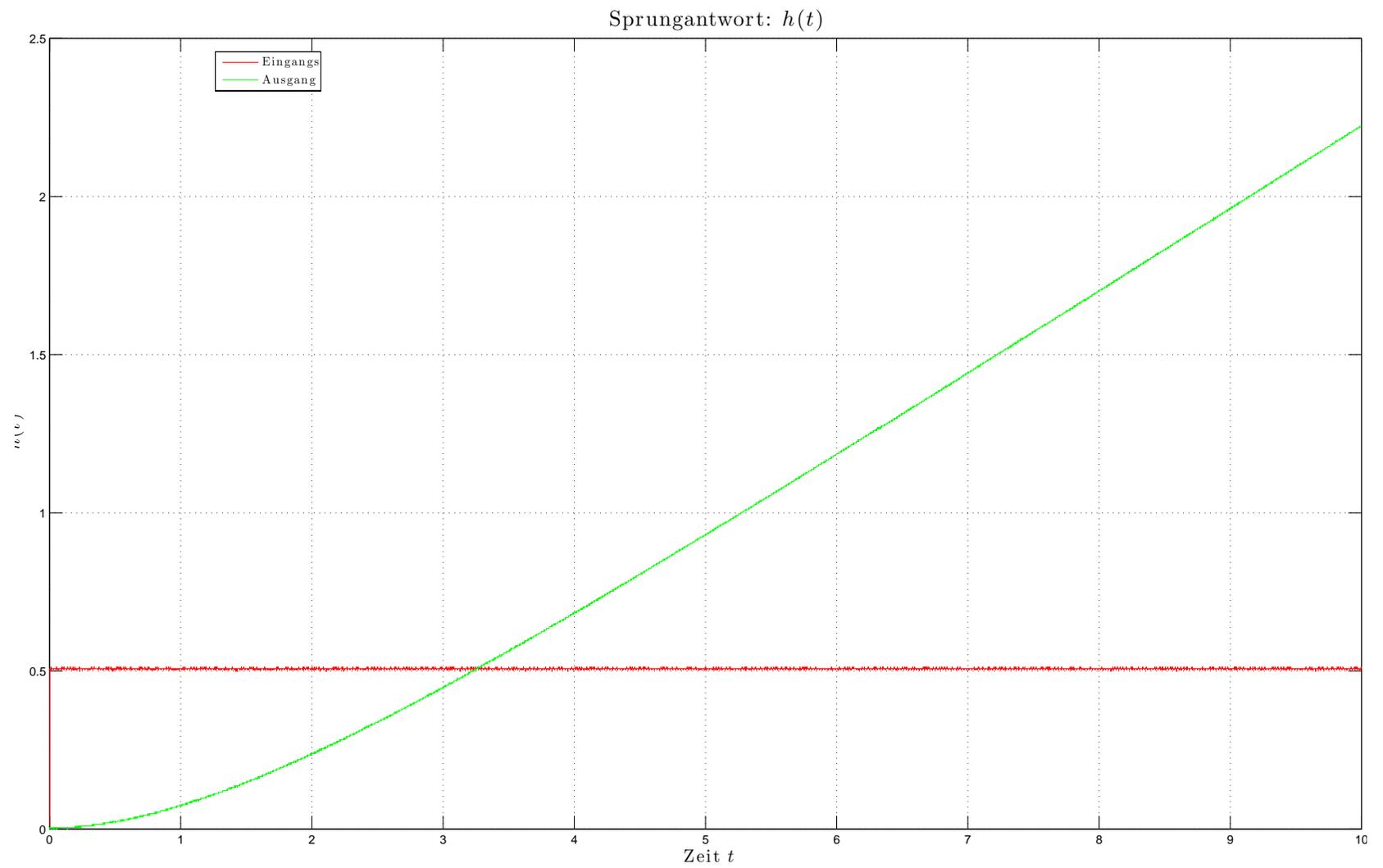


Abbildung PA1-11: PT_2 -Glieder (Schwingungsfall) d)

Abbildung PA1-12: IT_1 -Glieder a)

Abbildung PA1-13: IT_1 -Glieder b)

Abbildung PA1-14: IT_1 -Glieder c)

Abbildungsverzeichnis

PA1-1	Sprungantworten von P - und I -Glied	4
PA1-2	Sprungantworten von D - und T_t -Glied	4
PA1-3	Näherungsamplitudenfrequenzgang von PT_1 - und PT_2 -Glied	6
PA1-4	Näherungsamplitudenfrequenzgang von IT - und DT -Glied	6
PA1-5	Ortskurve und Übergangsfunktion eines PT_1 -Glieds	7
PA1-6	Ortskurve und Übergangsfunktion eines PT_2 -Glieds	7
PA1-7	Ortskurve und Übergangsfunktion eines IT -Glieds	7
PA1-8	Ortskurve und Übergangsfunktion eines DT_1 -Glieds	7
PA1-9	Anwendung der KÜPFMÜLLER-Methode erweitert durch STREJC nach [2, S. 300]	11
PA1-10	Blockschaltbild eines Regelkreises aus I -Regler und PT_1 -Strecke . . .	12
PA1-11	Blockschaltbild eines Regelkreises aus P -Regler und PT_2 -Strecke . . .	13
PA1-1	PT_1 -Glied a)	22
PA1-2	PT_1 -Glied b)	22
PA1-3	PT_1 -Glied c)	22
PA1-4	BODE-Diagramm des PT_1 -Gliedes	22
PA1-5	I -Glied a)	22
PA1-6	I -Glied b)	22
PA1-7	DT_1 -Glied a)	22
PA1-8	DT_1 -Glied b)	22
PA1-9	PT_2 -Glied (aperiodischer Grenzfall) a)	22
PA1-10	PT_2 -Glied (Schwingungsfall) c)	22
PA1-11	PT_2 -Glied (Schwingungsfall) d)	22
PA1-12	IT_1 -Glied a)	23
PA1-13	IT_1 -Glied b)	23
PA1-14	IT_1 -Glied c)	23

Tabellenverzeichnis

Literatur

- [1] Prof. Dr. Ing. Joachim Kienle. experimentelle prozessanalyse. Handout: 'Tabellenwerte zur Bestimmung von Parametern mittels Wendetangete', 2015.
- [2] Prof. Dr. Ing. Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik 1*. viewg, Bockum, 10. Auflage edition, 2000.
- [3] Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft. Systemtheorie ONLINE. <http://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/uebertragungsglieder-der-regelungstechnik/zusammengesetzte-uebertragungsglieder/bezeichnung-von-uebertragungsgliedern.html>.