Prozessdynamik
Hausaufgabe zur 6. Übung

Steffi Klinge
STK 03
[redacted]

1. Februar 2005

1. Laplace–Transformation

Aufgabe ist es die Laplace–Transformierte der Funktion $h_1(t) = b \cdot t$ (Rampe) herzuleiten. Ausgangspunkt ist die Definition der Laplace–Transformierten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h_1(t)] &= \int_0^\infty h_1(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty bt \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration und anschließendem Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h_1(t)] &= -\frac{bt}{s}\mathrm{e}^{-st}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{b}{s} \cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\left(\frac{bt}{s} + \frac{b}{s^2}\right)\mathrm{e}^{-st}\bigg|_0^\infty \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(-\underbrace{\left(\frac{bR}{s} + \frac{b}{s^2}\right)\mathrm{e}^{-sR}}_{\to 0} + \left(\frac{b \cdot 0}{s} + \frac{b}{s^2}\right)\mathrm{e}^{-s\cdot 0}\right) \\ &= \frac{b}{s^2}\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Exponentialfunktion dominiert die lineare Funktion; es gilt

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\frac{bR}{s}}{e^{sR}} = 0$$

Beweis: z.B. mit dem Satz von l´Hospital,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\frac{bR}{s}}{e^{sR}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{b}{s}}{s \cdot e^{sR}} = \lim_{\xi\to\infty} \frac{const.}{\xi} = 0$$

2. DGL lösen mittels Laplace–Transformation

Es sollen folgende Anfangswertprobleme mittels der Laplace–Transformation gelöst werden:

a.) $2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \mathrm{e}^{-t}$ mit $x(t=0) = 2$

Dazu werden die Laplace–Transformierten der einzelnen Terme gebildet.

$$\begin{aligned}2 \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + 3 \cdot \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-1}\right] &= 0 \\ 2sX(s) - 2x(0) + 3X(s) - \frac{1}{s+1} &= 0\end{aligned}$$

Umstellen nach $X(s)$ liefert

$$\begin{aligned}X(s) &= \left(\frac{1}{s+1} + 4\right) / (2s+3) \\ &= \frac{1}{(s+1)(2s+3)} + \frac{4}{2s+3} \\ &= \frac{1/2}{(s+1)(s+3/2)} + \frac{2}{s+3/2}\end{aligned}$$

Nach Rücktransformation in den Zeitbereich anhand einer Korrespondenztabelle ergibt sich

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-3/2}\right)\left(\mathrm{e}^{-(3/2)t} - \mathrm{e}^{-t}\right) + 2\mathrm{e}^{-(3/2)t} \\ &= \mathrm{e}^{-(3/2)t} + \mathrm{e}^{-t}\end{aligned}$$

b.) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 5\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = 0 \quad \text{mit} \quad x(t=0) = 1 \quad \text{und} \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 1$

Zunächst bildet man die Laplace–Transformierten der einzelnen Terme.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] + 5\cdot\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + 6\cdot\mathcal{L}\left[x\right] = 0$$

$$s^2X(s) - sx(0) - \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = 0$$

$$s^2X(s) - s - 1 + 5sX(s) - 5 + 6X(s) = 0$$

Umstellen nach $X(s)$ liefert

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+6}{s^2+5s+6} \\ &= \frac{s+6}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Nach Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe einer Korrespondenztabelle ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{6-2}{3-2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{6-3}{2-3}\mathrm{e}^{-3t} \\ &= 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} \end{aligned}$$

3. Systeme 1. Ordnung

Es soll ein System mit folgender Eingangsgröße $u(t)$ und Übertragungsfuntion $G(s)$ betrachtet werden.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad , \qquad G(s) = \frac{2.5}{12s+1}$$

Zunächst muss die Laplace–Transformierte der Eingangsgröße mit Hilfe der Korrespondenztabelle ermittelt werden.

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s(s+1)}$$

Anschließend erhält man die Ausgangsfunktion im Laplace–Bereich $Y(s)$ durch die Beziehung $Y(s) = G(s)\cdot U(s)$.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2.5}{12s+1}\cdot\frac{1}{s(s+1)} \\ &= \frac{2.5}{s(12s+1)(s+1)} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenztabelle liefert schließlich die Ausgangsfunktion im Zeitbereich $y(t)$.

$$\begin{aligned} y(t) &= 2.5\left[1 + \frac{1}{1-12}\left(12\mathrm{e}^{-t/12} - \mathrm{e}^{-t}\right)\right] \\ &= 2.5 - \frac{30}{11}\mathrm{e}^{-t/12} + \frac{5}{22}\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

4. Systeme 1. Ordnung mit Totzeit

Es soll ein System 1. Ordnung mit Totzeit der Form $\tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = k\cdot u(t-t_d)$ untersucht werden. Zu ermitteln sind die Totzeit t_d, die Zeitkonstante τ und der Verstärkungsfaktor k des Prozesses.

Da erst 10 Minuten nach der Änderung der Eingangsgröße sich eine Änderung der Ausgangsgröße beobachten lässt, kann man unmittelbar darauf schließen, dass die Totzeit 10 min beträgt.

Um τ und k zu bestimmen bietet es sich an Abstandsvariablen einzuführen.

$$y^* = y - y_0 \quad \text{mit} \quad y_0 = y(t=0) = 300\ \text{K} \quad \text{und somit} \quad y^*(t=0) = 0$$

Nun führt man die Laplace–Transformation durch.

$$\begin{aligned}
\tau \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right] + \mathcal{L}\left[y^*\right] - k \cdot \mathcal{L}\left[u(t-t_d)\right] &= 0 \\
\tau s Y^*(s) - \tau y^*(0) + Y^*(s) - kU(s) \cdot \mathrm{e}^{-st_d} &= 0 \\
\tau s Y^*(s) + Y^*(s) - kU(s) \cdot \mathrm{e}^{-st_d} &= 0
\end{aligned}$$

Einsetzen von $U(s) = \frac{\Delta u}{s}$ und Umstellen nach $Y^*(s)$ liefert

$$Y^*(s) = \frac{k\Delta u}{s(\tau s + 1)} \mathrm{e}^{-st_d}$$

Mittels der Korrespondenztabelle lässt sich nun die Rücktransformation durchführen.

$$y^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < t_d \\ k\Delta u \left(1 - \mathrm{e}^{-(t-t_d)/\tau}\right) & \text{für} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

Für $t \to \infty$ stellt sich der Wert $y^*_{ss} = -30$ K ein.

$$y^*_{ss} = \lim_{t\to\infty} \left(k\Delta u \left(1 - \mathrm{e}^{-(t-t_d)/\tau}\right)\right) = k\Delta u$$

Stellt man diese Gleichung um, so ergibt sich der Verstärkungsfaktor k des Prozesses.

$$k = \frac{y^*_{ss}}{\Delta u} = \frac{-30\ \text{K}}{25\ \text{kg/h}} = -1.2\ \text{K h kg}^{-1}$$

Mit der Information, dass nach 45 min die Änderung der Ausgangsgröße gegenüber dem späteren stationären Zustand 90% beträgt lässt sich nun τ bestimmen.

$$\begin{aligned}
y^*(t = 45\ \text{min}) = 0.9 \cdot y^*_{ss} &= k\Delta u \left(1 - \mathrm{e}^{-(45\ \text{min} - t_d)/\tau}\right) \\
0.9 k\Delta u &= k\Delta u \left(1 - \mathrm{e}^{-35\ \text{min}/\tau}\right)
\end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich schließlich

$$0.1 = \mathrm{e}^{-35\ \text{min}/\tau}$$

$$\ln(0.1) = -\frac{35\ \text{min}}{\tau}$$

$$\tau = -\frac{35\ \text{min}}{\ln(0.1)} = 15.2\ \text{min}$$

Abschließend erhält man

$$y^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 10\ \text{min} \\ -30\ \text{K} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(t-10\ \text{min})}{15.2\ \text{min}}}\right) & \text{für} \quad t \geq 10\ \text{min} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 300\ \text{K} & \text{für} \quad t < 10\ \text{min} \\ 300\ \text{K} - 30\ \text{K} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(t-10\ \text{min})}{15.2\ \text{min}}}\right) & \text{für} \quad t \geq 10\ \text{min} \end{cases}$$

dessen Verlauf in Abb. 1 dargestellt ist.

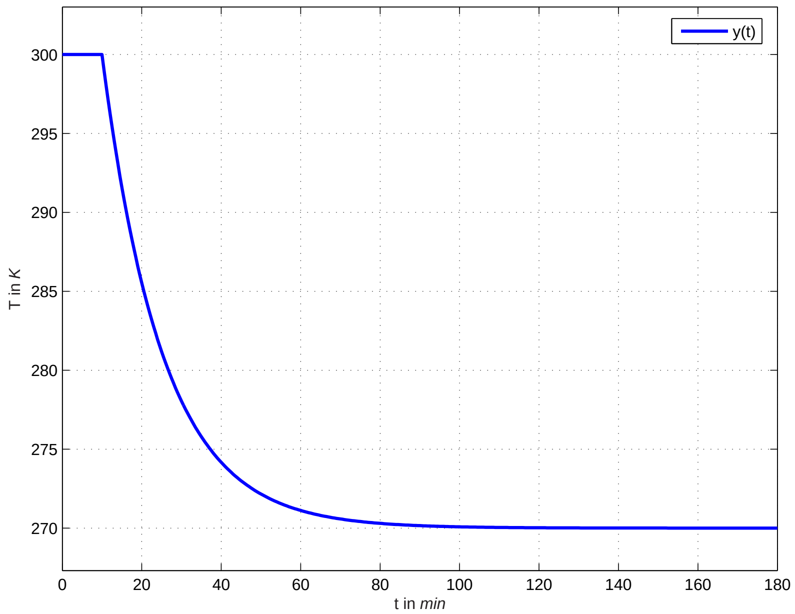

Abbildung 1: Verlauf der Ausgangsgröße für $k = -1.2$ K h kg^{-1}, $\tau = 15.2$ min und $t_d = 10$ min