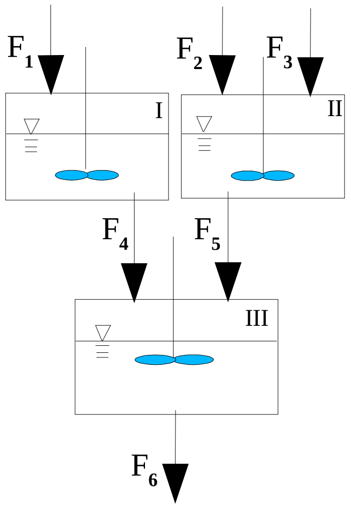
Klausur Prozessdynamik I
WS 2002/2003

Aufgabe 1 (Bilanzierung, 12 Pkt.)

Gegeben sei ein Prozess aus idealen Rührkesselreaktoren (CSTRs) mit folgendem Aufbau:



Allgemein:

Die Volumenströme sind so gewählt, dass in allen Reaktoren eine konstanter Füllstand beibehalten wird. Es ist weiterhin davon auszugehen, dass die Dichte in allen Zuflüssen und Reaktoren konstant ist: ρ = const. Zur Zeit t=0 s befindet sich nur Lösungsmittel in den Reaktoren.

Zusammensetzung der zugeführten Volumenströme:

F_1 enthält nur Komponente A
F_2 enthält nur Komponente A
F_3 enthält nur Komponente B

Temperatur in den Reaktoren (und den jeweils ihnen zugeführten Volumenströmen):

Reaktor I wird auf 400 K geregelt.
Reaktor II wird auf 330 K geregelt.
Reaktor III wird auf 320 K geregelt.

Allgemein können folgende Reaktionen auftreten:

1. $2A \rightarrow C \quad \textit{für } T \geq 380\,K$
2. $A + B \rightarrow 2D \quad \textit{für } T \geq 318\,K$
3. $C + D \Leftrightarrow E \quad \textit{für } T \geq 280\,K$

Die Reaktionsgeschwindigkeiten werden über Potenzansätze beschrieben.

a) Wie groß sind F_4, F_5 und F_6 ? *(1,5 Pkt.)*

b) Welche Reaktionen treten in welchen Reaktoren auf? *(1,5 Pkt.)*

c) Stellen Sie die Matrix der stöchiometischen Koeffizienten sowie die Reaktionsgeschwindigkeitsansätze (allg., d.h. unabhängig von den Reaktoren) auf. *(2 Pkt.)*

d) Formulieren Sie eine allgemeine Massenbilanz für Komponente *i* in Reaktor *j*. Formen Sie diese zu einer dynamischen Gleichung für die Konzentration um und stellen Sie diese für die Komponenten A und C in jedem Reaktor auf. *(5 Pkt.)*

e) Für Reaktor I werden jetzt folgende Parameter angenommen:
$F_1 = 1$ l/s, $c_{A,ein,I} = 1$ mol/l, $V_I = 10$ l.
Für Reaktion 1 gilt folgende Reaktionsgeschwindigkeitskonstante: $k_1 = 0.25$ l/(mol s). Berechnen Sie die Konzentrationen $c_{A,I,ss}$ und $c_{C,I,ss}$ für den sich einstellenden stationären Zustand (ss = steady state) im Reaktor I. *(2 Pkt.)*

Aufgabe 2 (algebraische Gleichungen, 4 Pkt.)

a) Welche numerischen Methoden zur Lösung von algebraischen Gleichungen einer Variable kennen Sie? *(2 Pkt.)*

b) Illustrieren Sie graphisch anhand von zwei Iterationsschritten die Funktionsweise für zwei beliebige Verfahren. *(2 Pkt.)*

Aufgabe 3 (Numerische Integration, 5 Pkt.)

a) Wie lautet die allgemeine Iterationsvorschrift zur numerischen Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad , \qquad x(t=0) = x_0$$

mittels: - explizitem Eulerverfahren
- impliziten Eulerverfahren
- Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

(3 Pkt.)

b) Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2} e^{-t} \quad , \qquad x(t=0) = 2$$

Berechnen Sie ausgehend vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Werte von x nach einem der in Aufgabe a) genannten Verfahren für zwei Zeitschritte von $\Delta t = 0{,}2\,s$. Geben Sie die Zahlenwerte mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen an.

(2 Pkt.)

Aufgabe 4 (Laplace-Transformation, 6 Pkt.)

a) Lösen Sie die folgende DGL mittels Laplace-Transformation: *(3 Pkt.)*

$$2\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} \quad , \qquad y(t=0) = 2$$

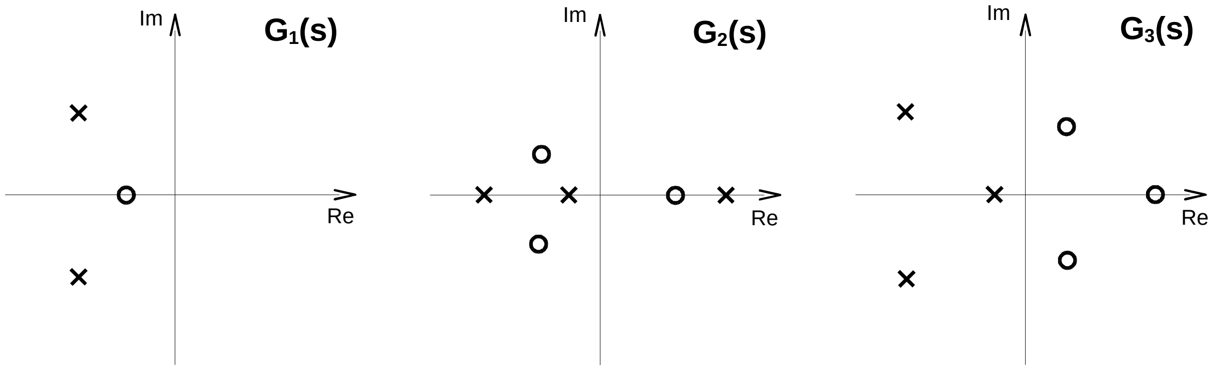
b) Wie lautet die Definition der Laplacetransformation? *(1 Pkt.)*

c) Leiten Sie die Laplace-Transformierte für folgende Funktion her: *(2 Pkt.)*

$$f(t) = b \cdot t \qquad \textit{(Rampe)}$$

Aufgabe 5 (Systemverhalten, 5 Pkt.)

a) Die folgenden Diagramme zeigen jeweils die Lage der Polstellen (×) und Nullstellen (O) einer Übertragungsfunktion. Welches Verhalten weisen die Systeme hinsichtlich Stabilität, Oszillation und inversem Verhalten auf? *(3 Pkt.)*

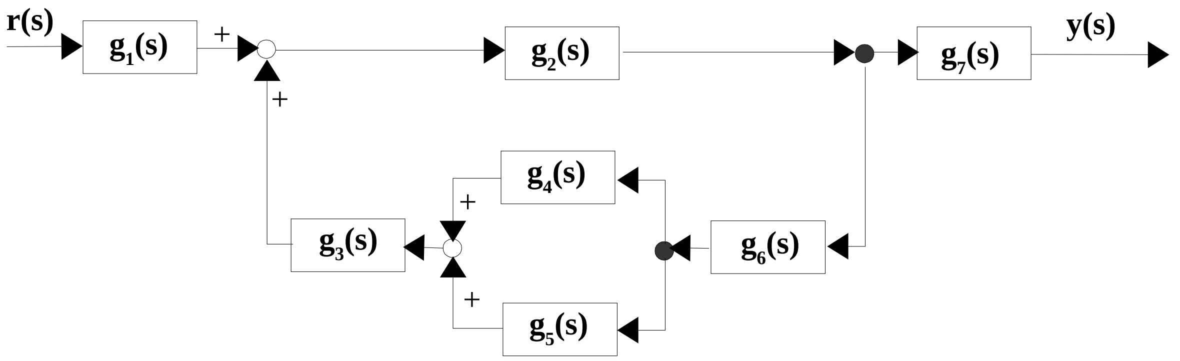


b) Skizzieren Sie qualitativ die Systemantwort auf eine Sprungbefragung für folgende Übertragungsfunktion im Zeitbereich: *(2 Pkt.)*

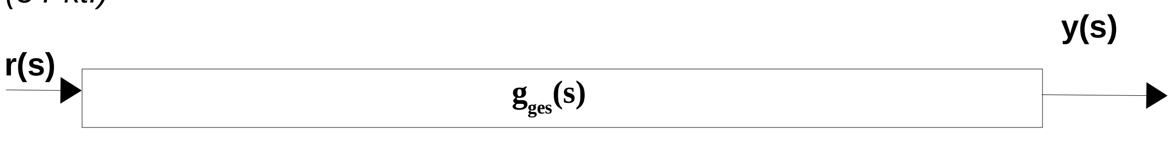
$$g(s)=\frac{s-5}{2s^2+5s+26}$$

Aufgabe 6 (Blockschaltbilder, 5 Pkt.)

Ein dynamischer Prozess sei aus mehreren Teilprozessen zusammengesetzt:



a) Leiten Sie die allgemeine Formel für die Gesamtübertragungsfunktion $g_{ges}(s)$ her. *(3 Pkt.)*



b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von K das System auf Stabilität, inverses und oszillierendes Verhalten für folgende Übertragungsfunktionen: *(2 Pkt.)*

$$g_1(s)=4 \quad g_2(s)=\frac{2}{s} \quad g_3(s)=5 \quad g_4(s)=\frac{1}{(s+2)} \quad g_5(s)=\frac{1}{(s-2)}$$

$$g_6(s)=K \quad g_7(s)=0.5 \quad mit\, K\in\mathbb{R}$$

Aufgabe 7 (Linearisierung, Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion , 5 Pkt.)

Gegeben sei ein CSTR, in dem parallel folgende Reaktionen ablaufen:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \qquad A + A \xrightarrow{k_3} D$$

Aus den Materialbilanzen der Komponenten A und B erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{d\,c_A}{dt} = \frac{F}{V}\left(c_{A,\,feed} - c_A\right) + \left(-k_1 c_A - 2 k_3 c_A^2\right)$$

$$\frac{d\,c_B}{dt} = \frac{F}{V}\left(-c_B\right) + \left(k_1 c_A - k_2 c_B\right)$$

mit den Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten

$$k_1 = \frac{5}{6} min^{-1} \quad k_2 = \frac{5}{3} min^{-1} \quad k_3 = \frac{1}{12}\frac{l}{mol\ min}$$

und dem stationären Zustand:

$$c_{A,\,feed,ss} = 10\, mol/l \quad c_{A,ss} = 3\, mol/l \quad c_{B,ss} = \frac{105}{94}\frac{mol}{l} \quad \frac{F}{V} = \frac{4}{7} min^{-1}$$

a) Linearisieren Sie das Gleichungssystem um den stationären Arbeitspunkt und bringen sie das lineare System in die Zustandsraumdarstellung:

$$\Delta\,\dot{x}(t) = A\,\Delta\,x(t) + B\,\Delta\,u(t)$$

$$\Delta\,y(t) = C\,\Delta\,x(t) + D\,\Delta\,u(t)$$

Dabei sei $c_{A,feed}$ die Eingangsgröße u(t) und c_B die Ausgangsgröße y(t).

b) Überführen Sie das Gleichungssystem in den Laplaceraum und bestimmen Sie die Übertragungsfunktion, die die Ausgangsgröße mit der Eingangsgröße verknüpft.