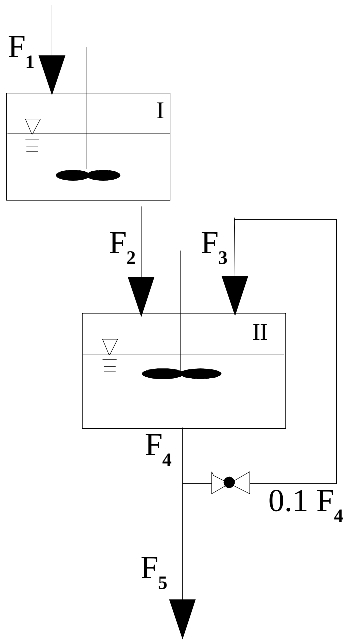
Wiederholungsklausur Prozessdynamik I
WS 2002/2003

Aufgabe 1 (Bilanzierung, 8 Pkt.)

Gegeben sei ein Prozess aus idealen Rührkesselreaktoren (CSTRs) mit folgendem Aufbau:



Allgemein:

Die Volumenströme sind so gewählt, dass in allen Reaktoren eine konstanter Füllstand beibehalten wird. Es ist weiterhin davon auszugehen, dass die Dichte in allen Zuflüssen und Reaktoren konstant ist: ρ = const. Zur Zeit t=0 s befindet sich nur Lösungsmittel in Reaktor I, in Reaktor II jedoch neben Lösungsmittel auch eine geringe Menge an C, die ausreicht, um als Katalysator zu fungieren.

Zusammensetzung des zugeführten Volumenstromes:

F_1 enthält nur Komponente A

Folgende autokatalytische Reaktion soll mit der o.g. Anlage durchgeführt werden:

1. $A \xrightarrow{k_1} 2B$
2. $A + 2B \xrightarrow{k_2,\, Kat. = C} C$

Reaktion 2 ist eine homogen katalysierte Reaktion, d.h. sie läuft nur ab, wenn der Katalysator C zugegen ist. Der Katalysator wird dabei NICHT verbraucht und die Reaktionsrate ist nicht abhängig von der Menge an Stoff C.

Die Reaktionsgeschwindigkeiten werden über Potenzansätze beschrieben.

a) Wie groß sind F_2, F_3, F_4 und F_5 in Abhängigkeit von F_1? *(1 Pkt.)*

b) Welche Reaktionen *j* treten in welchen Reaktoren *n* auf?

Stellen Sie die Matrix der stöchiometischen Koeffizienten sowie die Reaktionsgeschwindigkeitsansätze (allg., d.h. unabhängig von den Reaktoren) auf. *(3 Pkt.)*

c) Formulieren Sie eine allgemeine Massenbilanz für Komponente *i* in Reaktor *n*. Formen Sie diese zu einer dynamischen Gleichung für die Konzentration um und stellen Sie diese für die Komponenten A und B in jedem Reaktor auf. *(3 Pkt.)*

d) Für Reaktor I werden jetzt folgende Parameter angenommen:

$$F_1 = 1\ l/s,\ \ c_{A,ein,I} = 1\ mol/l,\ \ V_I = 10\ l.$$

Für Reaktion 1 gilt folgende Reaktionsgeschwindigkeitskonstante: $k_1 = 0.25\ s^{-1}$. Berechnen Sie die Konzentration $c_{A,I,ss}$ für den sich einstellenden stationären Zustand (ss = steady state) im Reaktor I. *(1 Pkt.)*

Aufgabe 2 (Numerische Verfahren, 6 Pkt.)

In einem isothermen chemischen Reaktor findet die Umsetzung eines Stoffes A durch eine Reaktion 3. Ordnung statt. Als Differentialgleichung für die Konzentration von A im Reaktor erhält man:

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{F_{ein}}{V} \cdot c_{A,ein} - \frac{F_{ein}}{V} \cdot c_A - 3 \cdot k \cdot c_A^3 \quad , \quad c_A(t=0) = 0.1\, mol/m^3$$

Das Volumen im Reaktor sei konstant und es sind folgende Werte gegeben:

$$F_{ein} = 0.1\, m^3/s \quad , \quad V = 1\, m^3 \quad , \quad c_{A,ein} = 1\, mol/m^3 \quad , \quad k = 0.5\, m^6/(mol^2 \cdot s)$$

a) Die Konzentration $c_{A,SS}$ soll für den stationären Zustand numerisch berechnet werden. Nennen Sie dafür ein geeignetes Verfahren und erläutern Sie kurz dessen Prinzip (Grafik oder Stichpunkte). Führen Sie mit Hilfe des von Ihnen gewählten Verfahrens zwei Iterationsschritte durch. Geben Sie die Zahlenwerte mit einer Genauigkeit von 4 Nachkommastellen an. *(3 Pkt.)*
Hinweis: $0.2\, mol/m^3 < c_{A,SS} < 0.8\, mol/m^3$

b) Angenommen im oben genannten Reaktor laufen mehrere Reaktionen parallel ab, bei denen mehr als eine Komponente beteiligt sind. Welches numerische Verfahren eignet sich in diesem Fall zur Berechnung der Konzentrationen im stationären Zustand?
(1 Pkt.)

c) Berechnen Sie ausgehend vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Werte von c_A durch numerischer Integration mittels Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung für einen Zeitschritt von $\Delta t = 1\, s$. Geben Sie die Zahlenwerte mit einer Genauigkeit von 4 Nachkommastellen an. *(1 Pkt.)*

d) Nennen Sie ein weiteres Verfahren zur numerischen Integration und dessen Iterationsvorschrift. *(1 Pkt.)*

Aufgabe 3 (Laplace-Transformation, 3 Pkt.)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels Laplace-Transformation:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6\, y = 0 \quad , \quad y(t=0) = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1$$

Aufgabe 4 (Systemverhalten, 5 Pkt.)

a) Welche Eigenschaften hinsichtlich Stabilität, Oszillation und inversem Verhalten weisen folgende Übertragungsfunktionen auf? *(2 Pkt.)*

$$g_1(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+11} \quad , \qquad g_2(s) = \frac{5}{\frac{1}{3} - \frac{2s}{(3s-3)(s+1)}}$$

b) Es sollen ein Prozess untersucht werden, bei dem es sich um ein System erster Ordnung handelt:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = k \cdot u(t) \quad , \qquad y(t=0) = 0$$

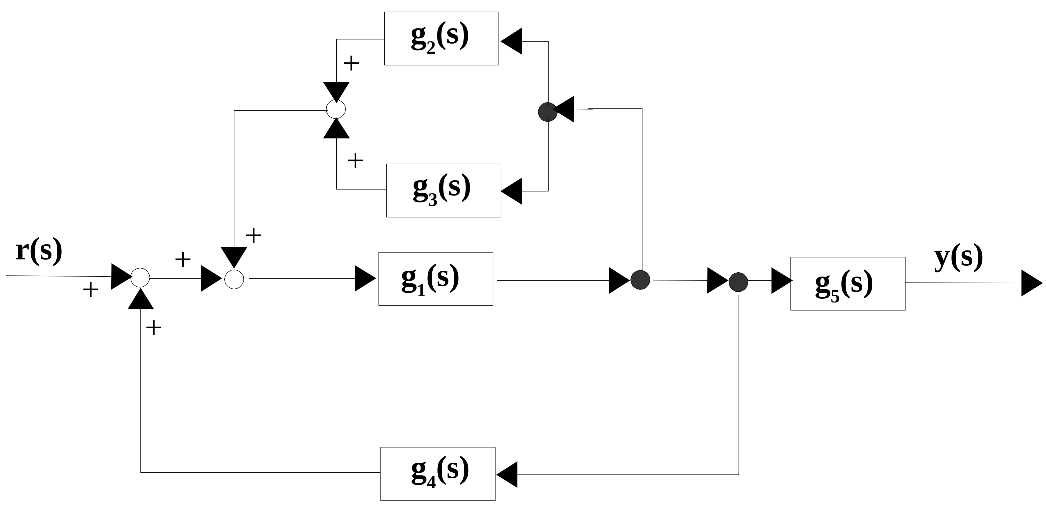
Dazu wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Sprungbefragung durchgeführt:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für } t < 0 \\ \Delta u & \text{für } t \geq 0 \end{Bmatrix}$$

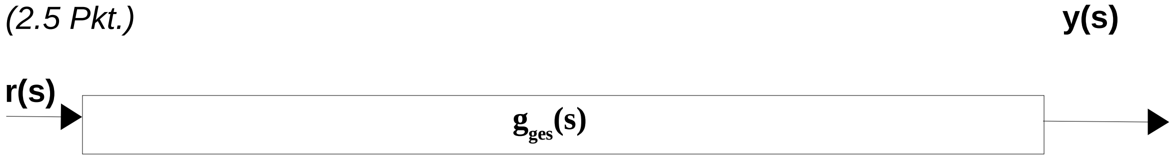
Nach zwei Stunden hat die Ausgangsgröße bereits 90% des zu erwartenden Endwertes erreicht. Wie groß ist die Zeitkonstante τ des Prozesses? *(3 Pkt.)*

Aufgabe 5 (Blockschaltbilder, 4 Pkt.)

Ein dynamischer Prozess sei aus mehreren Teilprozessen zusammengesetzt:



a) Leiten Sie die allgemeine Formel für die Gesamtübertragungsfunktion $g_{ges}(s)$ in Abhängigkeit der gegebenen Übertragungsfunktionen her. *(2.5 Pkt.)*



b) Untersuchen Sie das System auf Stabilität für folgende Übertragungsfunktionen: *(1.5 Pkt.)*

$$g_1(s)=\frac{1}{s+1} \quad g_2(s)=-1 \quad g_3(s)=1 \quad g_4(s)=2 \quad g_5(s)=2$$

Aufgabe 6 (Linearisierung, Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion , 5 Pkt.)

Gegeben sei ein CSTR, in dem folgende autokatalytische Reaktion abläuft:

$$A \xrightarrow{k_1} 2B \qquad A+B \xrightarrow{k_2,\, Kat.C} C$$

Aus den Materialbilanzen der Komponenten A und B erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{d\,c_A}{dt}=\frac{F}{V}(c_{A,\,feed}-c_A)-2k_1c_A^2-k_2c_Ac_B$$
$$\frac{d\,c_B}{dt}=\frac{F}{V}(-c_B)+2k_1c_A^2-k_2c_Ac_B$$

mit den Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten

$$k_1=1\frac{l}{mol\,min} \quad k_2=\frac{2}{3}\frac{l}{mol\,min}$$

und dem stationären Zustand:

$$c_{A,\,feed,\,ss}=3\,mol/l \quad c_{A,ss}=1\,mol/l \quad c_{B,ss}=1\,mol/l \quad \frac{F}{V}=4/3\,min^{-1}$$

a) Linearisieren Sie das Gleichungssystem um den stationären Arbeitspunkt und bringen sie das lineare System in die Zustandsraumdarstellung (3 Pkt.):

$$\Delta\dot{x}(t)=A\,\Delta x(t)+B\,\Delta u(t)$$
$$\Delta y(t)=C\,\Delta x(t)+D\,\Delta u(t)$$

Dabei sei $c_{A,feed}$ die Eingangsgröße u(t) und c_B die Ausgangsgröße y(t).

b) Überführen Sie das Gleichungssystem in den Laplaceraum und bestimmen Sie die Übertragungsfunktion, die die Ausgangsgröße mit der Eingangsgröße verknüpft (2 Pkt.).