2. Übungsklausur Prozessdynamik I

WS 2006/2007

***Aufgabe 1* (11 P)**

Gegeben sei folgende Differentialgleichung mit x als Zustands- und u als Eingangsgröße:

$$\frac{dx}{dt} = a\,x^2 + b\,x + c\,u \;=:\; f(x,u)$$

a) Geben Sie für eine konstante Eingangsgröße u = 0 alle stationären Punkte an!

b) Führen Sie alle folgenden Teilaufgaben für jede der erhaltenen Ruhelagen einzeln aus!

1. Linearisieren Sie die DGL mittels Taylor-Entwicklung um die gefundenen Ruhelagen unter Zuhilfenahme von Distanzvariablen und geben Sie ihre Ergebnisse in der Form

   $$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u \qquad \text{an !}$$

   Taylorreihenentwicklung von f(x,u) :

   $$f(x,u) = f(x_S,u_S) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_S}(x-x_S) + \frac{df}{du}\Big|_{u=u_S}(u-u_S) + THO\,;$$

2. Unterziehen Sie die erhaltenen Gleichungen einer Laplace-Transformation und geben Sie für jede Ruhelage die Übertragungsfunktion G(s) des linearisierten Systems an! (Zur Zeit t = 0 befindet sich das System im jeweiligen stationären Zustand.)

3. Wie reagiert das jeweilige linearisierte System auf eine kurze Störung in Form eines Dirac-Impulses und wie auf einen Einheitssprung im Eingangssignal? Geben Sie hierzu die entsprechenden Systemantworten x(t) an!

***Aufgabe 2* (7 P)**

Ein verfahrenstechnischer Prozess wird durch das folgende lineare System beschrieben:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}x_1(0)&=c\\ x_2(0)&=0\end{aligned}$$

a) Welche Art von Ruhelage (Knoten oder Sattelpunkt oder ... ?) liegt vor und welche Stabilität weist sie auf? Skizzieren Sie grob(!) das Phasenportrait um die Ruhelage!

b) Führen Sie für das linearisierte System eine Laplace-Transformation durch, transformieren Sie dazu jede Zeile des Differentialgleichungssystem einzeln!

c) Lösen Sie das erhaltene algebraische Gleichungssystem auf, führen Sie eine Rücktransformation durch und geben Sie das Zeitverhalten $x_1(t)$ an!

Aufgabe 3: Übertragungsverhalten und Systemanalyse (8 P)

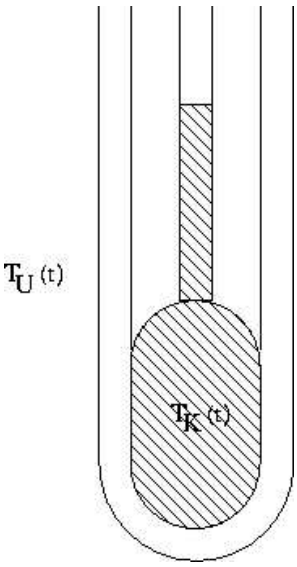
Ein System wird durch die folgende Übertragungsfunktion G(s) beschrieben:

$$G(s) = \frac{s^2+(3-a)s-3a}{(s^2+2s+2b)(s+b)} \quad \text{, mit} \quad a,b\in\mathbb{R} \quad \text{-Parameter}$$

a) Bestimmen Sie die Pole und die Nullstellen des Systems.

b) Untersuchen Sie das Verhalten des System in Abhängigkeit von a und b bezüglich Stabilität, Oszillation und inverses Verhalten.

<u>Aufgabe 4:</u> Energiebilanz und Signalverhalten eines Thermometers (15P)



Das abgebildete Quecksilberthermometer soll auf sein dynamisches Verhalten hin untersucht werden. Das Quecksilber im Kopf K des Thermometers ist von einer Glashülle umgeben, durch die der Wärmetransport maßgeblich bestimmt wird. Dieser ist gegeben durch

$$Q(t) = k \cdot A \cdot \left(T_U(t) - T_K(t)\right)$$

m sei die Gesamtmasse an Quecksilber im Thermometer,

c_v [J / (kg K)] = const. die spezifische Wärmekapazität.

$T_U(t)$ und $T_K(t)$ seien örtlich (nicht zeitlich!) konstant, d.h. es existieren keine Temperaturprofile innerhalb der jeweiligen Phasen (ideal gemischtes System).

m, c_v und $k \cdot A$ können als bekannt vorausgesetzt werden.

a) Bilanzieren Sie die innere Energie des Quecksilbers (geschlossenes System!) unter Vernachlässigung der Volumenausdehnung des Quecksilbers und formen Sie die Bilanz in eine dT/dt - Form um! Treffen Sie dazu geeignete Annahmen!

b) Leiten Sie aus der Bilanz der Distanzvariablen die Übertragungsfunktion G(s) ab und bestimmen Sie die Zeitkonstante! Anfangs befindet sich das System in thermodynamischem Gleichgewicht, d.h. $T_K(0)=T_U(0)$.

c) Bestimmen Sie aus der Bilanz mittels der Laplace-Transformation $T_K(t)$ bei sprunghafter Änderung der Umgebungstemperatur um n Grad! Nutzen Sie bei der Rücktransformation explizit die Partialbruchzerlegung!

d) Tragen Sie Eingangssignal, Übertragungsfunktion und Ausgangssignal in ein Blockschaltbild ein!

e) Welche Ordnung hat das System? Kann die Quecksilbertemperatur oszillieren, und warum ist dies aus thermodynamischer Sicht möglich/ausgeschlossen?

<u>Zusatzaufgabe 2</u> (5 P)

Ein Prozess kann durch folgende DGL 2. Ordnung beschrieben werden:

$$\frac{d^2 y}{dt} - \left(\frac{dy}{dt} + 1\right)\cos(y) = 0$$

a) Bestimmen Sie <u>alle</u> Ruhelagen der nichtlinearen Gleichung!

b) Formen Sie die DGL durch geeignete Substitution in zwei DGLen ersten Grades um!

Geben Sie auch die Ruhelagen dieses mehrdimensionalen Systems an!

c) Linearisieren Sie dieses DGL-System mittels Taylorreihenentwicklung um eine Ruhelage Ihrer Wahl und geben Sie die Systemmatrix A an!