Lösungen für die Zusatzaufgabe

1 Berechnung des dynamischen Verhaltens

1.1

expl. Euler für $\Delta t = 3$
$x_1(1) = x_1(0) + 3(0 + 3 \cdot 0) = 0$
$x_2(1) = x_2(0) + 3(0 + 2 \cdot 0 + 2) = 6$

expl. Euler für $\Delta t_1 = 1$ und $\Delta t_2 = 2$
$x_1(1) = x_1(0) + 1(0) = 0$
$x_2(1) = x_2(0) + 1(2) = 2$
$x_1(2) = x_1(1) + 2(3 \cdot 2) = 12$
$x_2(2) = x_2(1) + 2(2 \cdot 2 + 2) = 18$

Wie wir sehen, kann die durchgeführte Abschätzung durch kleinere Zeitschritte Δt verbessert werden. In diesem Fall ist der Unterschied gravierend, da wir die Anzahl der Zeitschritte verdoppelt haben.

1.2

Wie oben genannt, kann man die Abschätzung beim expliziten Eulerverfahren durch eine entsprechende Erhöhung der Zeitschritte weiter verfeinern. Andere Verfahren wie das implizite Eulerverfahren(Interationsvorschrift auf Seite 38, Skript) oder das Runge-Kutta-Verfahren(S. 40) liefern auch bei größeren Zeitschritten, also der Schwachstelle des exlpliziten Eulerverfahrens, besser angenäherte Werte.

2 Linearisierung, Zustandsraumdarst. und Übertragungsfkt.

2.1 stationärer Zustand

$0 = 1 - 4 \cdot \sqrt{x_1 - x_2}$
$0 = 12 - \sqrt{x_1 - x_2} - 6\sqrt{x_2}$
$x_{1s} = \frac{5}{16}$
$x_{2s} = \frac{1}{4}$

2.2 Linearisierung, Zustandsdarstellung

$$J = \begin{pmatrix} -2(x_{1s} - x_{2s})^{-\frac{1}{2}} & -2(x_{1s} - x_{2s})^{-\frac{1}{2}} \\ 6(x_{1s} - x_{2s})^{-\frac{1}{2}} & 6(x_{1s} - x_{2s})^{-\frac{1}{2}} - 3(x_{2s})^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 24 & -30 \end{pmatrix} \overset{EW}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -8 - \lambda & 8 \\ 24 & -30 - \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 + 38\lambda + 48$

$\lambda_1 = -1,3083$
$\lambda_2 = -36,6918$

$\hookrightarrow$ asymptotisch stabiler Knoten

2.3 Übertragungsfunktionen

$\Delta\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 24 & -30 \end{pmatrix} \Delta\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a$

$\Delta\dot{x_1} = -8\Delta x_1 + 8\Delta x_2 + a$
$sX_1(s) - \dot{x_1}(0) = -8X_1(s) + 8X_2(s) + A(s)$

$\Delta\dot{x_2} = 24\Delta x_1 - 30\Delta x_2$
$sX_2(s) - \dot{x_1}(0) = 24X_1(s) - 30X_2(s)$

$\Rightarrow X_2(s) = \frac{24}{s+30} X_1(s)$

$\hookrightarrow X_2(s)$ in $\Delta\dot{x_1}$

$sX_1(s) - \dot{x_1}(0) = -8X_1(s) + 8\frac{24}{s+30} X_1(s) + A(s)$
$X_1(s + 8 - 8 \cdot \frac{24}{s+30}) = A(s)$

$$X_1(s) = \underbrace{\frac{1}{s + 8 - 8\frac{24}{s+30}}}_{G_1(s)} A(s)$$

$$X_2(s) = \frac{24}{s+30} X_1(s) = \underbrace{\frac{24}{s+30} \cdot \frac{1}{s + 8 - 8\frac{24}{s+30}}}_{G_2(s)} A(s)$$

2.4 dynamisches Verhalten des Systems

$G_1 = \frac{s+30}{(s+8)(s+30)-192} = \frac{s+30}{s^2+38s+48}$

$\hookrightarrow$
Nst=-30 $\rightarrow$ nicht invers
Polstellen: $\lambda_{1/2} < 0 \rightarrow$ keine Oszillation, asymp. stabil

$G_2 = \frac{24}{(s+30)s+8(s+30)-192} = \frac{24}{s^2+38s+48}$

$\hookrightarrow$
keine Nullstellen $\rightarrow$ nicht invers
Polstellen: $\lambda_{1/2} < 0 \rightarrow$ keine Oszillation, asymp. stabil