Steffen Hermann & Christian Müller

Systemverfahrenstechnik SS2013 1. Projektübung

Projektübung

Studiengang: Systemtechnik und Technische Kybernetik
Institut für Automatisierungstechnik
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Betreuung/Übungsleiter

Benjamin Hentschel
Nicolas Kaiser
Alexander Zinser

April/Mai 2013

Kapitel 1

Allgemeines

1.1 Indizierte Schreibweise (Tensornotation)

a)

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

b)

$$A_{jk} = \alpha\left(\frac{\partial b_j}{\partial c_k} - \frac{\partial b_k}{\partial c_j}\right) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial b_1}{\partial c_2} - \frac{\partial b_2}{\partial c_1} & \frac{\partial b_1}{\partial c_3} - \frac{\partial b_3}{\partial c_1} \\ \frac{\partial b_2}{\partial c_1} - \frac{\partial b_1}{\partial c_2} & 0 & \frac{\partial b_2}{\partial c_3} - \frac{\partial b_3}{\partial c_2} \\ \frac{\partial b_3}{\partial c_1} - \frac{\partial b_1}{\partial c_3} & \frac{\partial b_3}{\partial c_2} - \frac{\partial b_2}{\partial c_3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) es seien: $a \in \mathbb{R}^{1\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

i) $a\mathbf{B}c = a_m\mathbf{B}_{mn}c_n = d \in \mathbb{R}^1$

ii) $ca\mathbf{B} = c_n a_m \mathbf{B}_{mn}$

iii) $c\mathbf{B}a$ ist keine zulässige Operation

1.2 Grundlagen der Modellierung

a) i) **Impulsbilanz** (Navier-Stokes)
ableitbare Zustandsfelder: Geschwindigkeit, Beschleunigung

ii) **Energiebilanz**
ableitbare Zustandsfelder: Temperatur, Enthalpie

iii) **Massenbilanz**
ableitbare Zustandsfelder: Konzentration, Dichte

b) i) **intensive Größen** sind Größen, welche sich bei einer Skalierung des betrachteten Systems nicht ändern. Hierbei unterscheidet man zwischen **systemeigenen** intensive Größen wie zum Beispiel Temperatur oder Druck und **stoffeigenen** intensive Größen wie Molmasse oder Oxzidationszahl.

ii) **extensive Größen** sind Größen, welche von der tatsächlichen Größe des betrachteten Systems abhängen. Hierzu gehört beispielsweise das Volumen oder die Teilchenanzahl.

c) Molare Schwerpunktsgeschwindigkeit:

$$v_k^m = \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha v_{k,\alpha} \tag{1.1}$$

Molarer Diffusionsstrom:

$$J_{k,\alpha} = c_\alpha (v_{k,\alpha} - v_k^m) \tag{1.2}$$

Die Summe aller molaren Diffusionsströme berechnet sich mit:

$$J_k = \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha (v_{k,\alpha} - v_k^m) \tag{1.3}$$

Setzen wir nun (1.1) in (1.3) ein, so erhalten wir:

$$J_k = \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha (v_{k,\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha v_{k,\alpha}) \tag{1.4}$$

Nach der Summation über alle α, stellen wir $x = 1$ fest, sodass folgt:

$$J_k = c_\alpha \sum_{\alpha=1}^{N} v_{k,\alpha} - v_{k,\alpha} = 0 \tag{1.5}$$

d)

$$\sigma_\alpha = M_\alpha \sum_m \nu_{\alpha,m} r_m \tag{1.6}$$

$$\left[\frac{kg}{m^3 s}\right] = \left[\frac{kg}{mol}\right] \left[\frac{mol}{m^3 s}\right] \tag{1.7}$$

e) Die kinetischen Ansätze (= konstitutive Gleichungen) verknüpfen die in den Bilanzen auftretenden Flussgrößen mit den thermodynamischen Zustandsgrößen.

f) **Lagrange** betrachtet ein Finites Element (FE) einer Strömung. Da hier stets das gleiche FE betrachtet wird, nennt man diese Betrachtungsweise auch materiebezogen oder materiell (in dieser LV substantiell). **Euler** betrachtet stets ein anderes FE. Er betrachtet eine Strömung quasi aus der Ferne.

Die mathematische Verknüpfung zwischen beiden Betrachtungsweisen ist die Folgende:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{1.8}$$

g) Akkumulation = Zuflüsse − Abflüsse ± Quellen/Senken

h) (1) extensiv, (2) bilanzierbar, (3) echte Erhaltungsgröße, (4) Zustandsgröße im Sinne der Thermo-(Fluid-)Dynamik

   i) Geschwindigkeit v_j: (4)
   ii) Gesamte Stoffmenge n: (1), (2)
   iii) Gesamtmasse m: (1), (2), (3)
   iv) Temperatur T: (4)
   v) Entropie S: (1), (4)
   vi) Impuls $p_j = mv_j$: (1), (2), (3), (4)
   vii) Energiestromdichte $q_j^{'}$: (4)
   viii) Konzentration der Komponente A c_A: (2)
   ix) Masse der Komponente A m_A: (1), (2)
   x) Reaktionsgeschwindigkeit r_m: -
   xi) An einem Wärmeübertrager ausgetauschte Wärmemenge Q: (1), (3), (4)
   xii) Gesamtladung Q_{el}: (3), (1)

1.3 Mathematische Eigenschaften von Modellgleichungen

a) ODE, Linear, Ordnung 1

b) AE, Nichtlinear, Ordnung 2

c) PDE, Linearitätseigenschaft ist von $\lambda(T)$ abhängig, Ordnung 2

Kapitel 2

Bilanzierung

2.1 Massenbilanz

a) i) Die integrale Massenbilanz für eine Komponente α:

$$\int_V \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}V = -\oint_A \rho_\alpha v_{k,\alpha} n_k \mathrm{d}A + \int_V \sigma_\alpha \mathrm{d}V \tag{2.1}$$

Unter zu Hilfenahme des Integralsatzes von Gauss können wir das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführen:

$$\oint_A \rho_\alpha v_{k,\alpha} n_k \mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial}{\partial z_k} \rho_\alpha v_{k,\alpha} \mathrm{d}V \tag{2.2}$$

Fassen wir nun alle Terme unter einem Volumenintegral zusammen, so folgt:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_k} \rho_\alpha v_{k,\alpha} - \sigma_\alpha \right] \mathrm{d}V = 0. \tag{2.3}$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird, muss der Integrand null werden und wir erhalten schliesslich und endlich die gesuchte **lokale Massenbilanz einer Komponente**:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k} \rho_\alpha v_{k,\alpha} + \sigma_\alpha} \tag{2.4}$$

ii) Aus der Definition für die Diffusion J_α folgt:

$$\rho_\alpha v_\alpha = \rho_\alpha v + J_\alpha \quad \text{mit} \quad v = \sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha v_\alpha \tag{2.5}$$

Setzen wir nun (2.5) in (2.4) ein, so erhalten wir die gesuchte Beziehung:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t}}_{\text{Akkumulation}} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\rho_\alpha v}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{J_\alpha}_{\text{Diffusion}} \right) + \underbrace{\sigma_\alpha}_{\text{Quelldichte}} \tag{2.6}$$

iii) Wir gehen wieder von der lokalen, eindimensionalen Massenbilanz einer Komponente α aus:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_\alpha v_\alpha\right) + \sigma_\alpha \tag{2.7}$$

mit dem Zusammenhang $\rho_\alpha = M_\alpha c_\alpha$ ergibt sich:

$$M_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -M_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(c_\alpha v_\alpha\right) + \sigma_\alpha. \tag{2.8}$$

Nun können wir die zwei Beziehungen $c_\alpha v_\alpha = c_\alpha v^m + J_\alpha^m$ und $\sigma_\alpha = M_\alpha \sum_m v_{\alpha,m} r_m$ verwenden, um

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(c_\alpha v^m + J_\alpha^m\right) + \sum_{m=1}^{R} v_{\alpha,m} r_m \tag{2.9}$$

zu erhalten. Anschließend überführen wir das erhaltene Ergebnis mit Hilfe von $c_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{M_\alpha}$ wieder in die Form der Partialdichte:

$$\boxed{\frac{1}{M_\alpha}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{M_\alpha}\rho_\alpha v^m + J_\alpha^m\right) + \sum_{m=1}^{R} v_{\alpha,m} r_m} \tag{2.10}$$

b) Als Ausgangsgleichung dient uns hier wieder (2.4). Aus den Beziehungen $\rho_\alpha = M_\alpha c_\alpha$ und der Folgerung, dass $M_\alpha = \text{const.}$, folgt:

$$M_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = M_\alpha \frac{\partial}{\partial z_k}\left(c_\alpha v_{k,\alpha}\right) - \sigma_\alpha \tag{2.11}$$

Durch anschließende Division durch M_α und verwenden von $\sigma_\alpha^m = \frac{\sigma_\alpha}{M_\alpha}$ folgt:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(c_\alpha v_{k,\alpha}\right) - \sigma_\alpha^m. \tag{2.12}$$

Aus dem idealen Gasgesetz folgt nun $c_\alpha = \frac{n_\alpha}{V} = \frac{\rho_\alpha}{RT}$, was unter der Annahme $R, T = \text{const.}$ in obige Gleichung eingesetzt wird:

$$\frac{1}{RT}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{RT}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho_\alpha v_{k,\alpha}\right) + \sigma_\alpha^m \tag{2.13}$$

woraus wir schließlich die gesuchte Gleichung ableiten:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho_\alpha v_{k,\alpha}\right) + RT\sigma_\alpha^m} \tag{2.14}$$

c) Um das Ergebnis der obigen Aufgabe in die substantielle Form zu überführen, wenden wir zunächst auf (2.14) die Kettenregel an:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\rho_\alpha \frac{\partial v_{k,\alpha}}{\partial z_k} - v_{k,\alpha}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial z_k} + RT\sigma_\alpha^m. \tag{2.15}$$

Nach kleineren Umsortierungen, erhalten wir bereits die gewünschte Darstellung:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + v_{k,\alpha}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial z_k} = -\rho_\alpha \frac{\partial v_{k,\alpha}}{\partial z_k} + RT\sigma_\alpha^m \tag{2.16}$$

welche wiederum identisch zu

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho_\alpha}{\mathrm{D}t} = -\rho_\alpha \frac{\partial v_{k,\alpha}}{\partial z_k} + RT\sigma_\alpha^m} \tag{2.17}$$

ist.

d) Als Ausgangsgleichung dient uns nun (2.12). Mit der Vorschrift $c_\alpha v_{k,\alpha} = c_\alpha v_k^m + J_{k,\alpha}^m$ ergibt sich:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(c_\alpha v_k^m + \underbrace{J_{k,\alpha}^m}_{=0}\right) + \underbrace{\sigma_\alpha^m}_{=0}. \tag{2.18}$$

Aus dem idealen Gasgesetz $pv = nRT$ ergibt sich $c_\alpha = \frac{p_\alpha}{RT}$. Da $R = \text{const.}$ folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p_\alpha}{T}\right) = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{p_\alpha}{T}v_k^m\right) \tag{2.19}$$

Nach Anwenden der Quotientenregel folgt:

$$\frac{1}{T^2}\left(T\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} - p_\alpha\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{1}{T^2}\left(-T\frac{\partial}{\partial z_k}\left(p_\alpha v_k^m\right) + p_\alpha v_k^m \frac{\partial T}{\partial z_k}\right) \tag{2.20}$$

und nach der Produktregel:

$$T\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} - p_\alpha\frac{\partial T}{\partial t} = T\left(-p_\alpha\frac{\partial v_k^m}{\partial z_k} - v_k^m\frac{\partial p_\alpha}{\partial z_k}\right) + p_\alpha v_k^m\frac{\partial T}{\partial z_k}. \tag{2.21}$$

Diese Gleichung führt uns nun zu der gesuchten Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} = -p_\alpha\frac{\partial v_k^m}{\partial z_k} - v_k^m\frac{\partial p_\alpha}{\partial z_k} + \frac{p_\alpha v_k^m}{T}\frac{\partial T}{\partial z_k} + \frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial t}.} \tag{2.22}$$

Wie im Umformungsschritt (2.16) nach (2.17) zu sehen war, können wir nun auch hier die gesuchte substantielle Formulierung hinschreiben:

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}p_\alpha}{\mathrm{D}t} = p_\alpha\left(-\frac{\partial v_k^m}{\partial z_k} + \frac{1}{T}\left(v_k^m\frac{\partial T}{\partial z_k} + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\right)} \tag{2.23}$$

2.2 Impulsbilanz

a)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j)}_{\text{Akkumulation}} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\underbrace{\rho v_k v_j}_{\text{konvektive Kräfte}} + \underbrace{P_{jk}}_{\text{Oberflächenkräfte}}\right) + \underbrace{\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}}_{\text{Volumenkräfte}} \tag{2.24}$$

b) Drucktensor allgemein:

$$P_{jk} = p\delta_{jk} + \Pi_{jk} \tag{2.25}$$

Bei reibungsfreien Fluiden entfällt der viskose Drucktensor und es bleibt der hydrostatische Druck:

$$P_{jk} = p\delta_{jk} \tag{2.26}$$

c)

$$\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \sum_\alpha \rho_\alpha \tag{2.27}$$

mit $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$

d) In dieser Aufgabe leiten wir aus der Impulsbilanz in lokaler Formulierung einen mathematischen Zusammenhang für den Schweredruck in Abhängigkeit der Höhe in einer Flüssigkeit her. Dazu betrachten wir zunächst folgende Skizze.

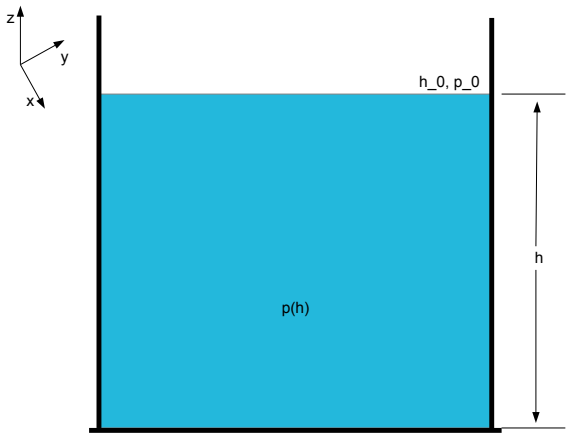

Abbildung 2.1: Skizze zum Schweredruck

Nun wird ersichtlich, dass der Schweredruck von der Höhe des Wasserspiegels über dem betrachteten Punkt abhängt. Den funktionalen Zusammenhang ermitteln wir nun, ausgehend von oben genannter Beziehung:

$$\int_V \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}V = -\oint_A \rho_\alpha v_{k,\alpha} n_k \mathrm{d}A + \int_V \sigma_\alpha \mathrm{d}V \tag{2.28}$$

Dazu werden zunächst einige Vereinfachungen getroffen und mathematisch korrekt ausgedrückt:

- ruhend: $v_j = v_k = \Pi_{jk} = 0$
- reibungsfrei: $\Pi_{jk} = 0$
- Stationarität: $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$
- Inkompressibilität: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial \rho}{\partial z_k} = 0.$

Diese Vereinfachungen wirken sich auf (2.13) in der Art aus, dass diese zu:

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(P_{jk}) = \sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} \tag{2.29}$$

zerfällt. Mit den Ergänzungen $f_{j,k} = g_j$ sowie $P_{jk} = p(z_k)\delta_{jk}$ ergibt sich ein Zusammenhang, mit welchem wir die geforderten Untersuchungen durchführen können:

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(p(z_k)\delta_{jk}) = \sum_\alpha \rho_\alpha g_j \tag{2.30}$$

mit $g_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,81\mathrm{ms}^{-2} \end{pmatrix}$. Wir betrachten nun die Druckänderung in den drei Raumrichtungen, abhängig von der Höhe h:

- $k = 1$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(p(z_1)) = 0 \tag{2.31}$$

- $k = 2$

$$\frac{\partial}{\partial z_2}(p(z_2)) = 0 \tag{2.32}$$

- $k = 3$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}(p(z_3)) = \sum_\alpha \rho_\alpha g_3. \tag{2.33}$$

Mit der Annahme, dass die Flüssigkeit inhomogen mit N Spezies ist und wir anschließend über z_3 integrieren, erhalten wir unter Verwendung von (2.33):

$$\int_h^{h_0} \frac{\partial}{\partial z_3}(p(z_3))\,\mathrm{d}z_3 = g_3 \sum_\alpha^N \rho_\alpha \int_h^{h_0} \mathrm{d}z_3 \tag{2.34}$$

was uns zu unserer gesuchten Beziehung führt:

$$\boxed{p(h) = p_0 - g_3(h_0 - h)\sum_{\alpha}^{N} \rho_\alpha} \tag{2.35}$$

Da wir $g_3 = -9,81\mathrm{ms}^{-2}$ definiert haben, sehen wir, dass der Schweredruck mit zunehmender Tauchtiefe linear ansteigt, was auch zu erwarten war.

Institut für Verfahrenstechnik
Lehrstuhl für Systemverfahrenstechnik
Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Sundmacher

Titel der Arbeit:

Systemverfahrenstechnik SS2013
1. Projektübung

Art der Arbeit und Datum:

Projektübung, April/Mai 2013

Betreuung:

Benjamin Hentschel
Nicolas Kaiser
Alexander Zinser

Studenten:

Name:	Steffen Hermann
E-Mail:	steffen.hermann@st.ovgu.de
Matr.-Nr.:	191475

Name:	Christian Müller
E-mail:	wushuchris@gmail.com
Matr.-Nr.:	191467

Erklärung betreffend Plagiaten:

Wir erklären hiermit mit unserer Unterschrift, das Merkblatt Plagiat zur Kenntnis genommen, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und die im betroffenen Fachgebiet üblichen Zitiervorschriften eingehalten zu haben.

Merkblatt Plagiat:

`http://www.ethz.ch/students/semester/plagiarism_s_de.pdf`

Magdeburg, 7. 5. 2013: _____