Prof. Dr.-Ing. O. Sawodny
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Arbeitsblatt

Lösung der Vektor-Differentialgleichung $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$

Ziel: $\underline{x}(t)$ in Abhängigkeit von $\underline{u}(t)$ zu berechnen.

Ausgangspunkt:

$$e^{-\underline{A}t}\,\Big|\quad \dot{\underline{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$e^{-\underline{A}t}\cdot\dot{\underline{x}} = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{A}\cdot\underline{x} + e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$e^{-\underline{A}t}\cdot\dot{\underline{x}} - \underline{A}\cdot e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{x} = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{x}) = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

Integration:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}(e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{x}(\tau))\,d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$e^{\underline{A}t}\,\Big|\quad e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t) - e^{-\underline{A}t_0}\,\underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau}_{\text{durch } \underline{u}(t) \text{ determinierter Teil der Lösung}}}$$

Allgemeine Lösung der Zustandsgleichung

$$\underline{u} = \underline{0}:\quad \underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t-t_0)}}_{\text{Transitionsmatrix}}\,\underline{x}(t_0)$$

Ausgangsgrößen

$$\underline{y}(t) = ?$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\cdot e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\underline{C}\cdot e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau\,;\quad \underline{D} = \underline{0}$$

Berechnung der Transitionsmatrix $e^{\underline{A}t}$ durch Ähnlichkeitstransformation

Ziel: Transformation der Systemmatrix $\underline{A}$, so dass neue Systemmatrix $\underline{\tilde{A}}$ Diagonalgestalt hat:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \underline{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Von $\underline{\tilde{A}}$ kann die Transitionsmatrix leicht berechnet werden.

1. Schritt: Transformation auf Diagonalform

Voraussetzungen: Eigenwerte λ_i einfach; homogenes System: $\underline{u} = 0$;

gesucht:

Transformation $\underline{x} = \underline{V}\,\underline{\tilde{x}}$, so dass $\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{u}$ mit $\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$;

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{V}^{-1}\underline{A}\,\underline{V}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$$

$$[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n] = \underline{V} \qquad \underline{v}_i: \text{ Spaltenvektoren der Dimension } (n,1)$$

$$\underset{(n,n)}{\underline{A}} \; \underset{(n,n)}{[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]} = \underset{(n,n)}{[\underline{A}\underline{v}_1, \underline{A}\underline{v}_2, \ldots, \underline{A}\underline{v}_n]}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = [\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \underline{v}_1, \ldots, \lambda_n \underline{v}_n]$$

aus $\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$:

$$[\lambda_1 \underline{v}_1, \ldots, \lambda_n \underline{v}_n] = [\underline{A}\,\underline{v}_1, \ldots, \underline{A}\,\underline{v}_n]$$

spaltenweise geschrieben:

$$\underline{A}\,\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i; \quad i = 1 \ldots n; \qquad \text{oder: } (\lambda_i \underline{I} - \underline{A})\underline{v}_i = \underline{0}; \quad i = 1 \ldots n;$$

$\underline{v}_i$ nennt man Eigenvektoren (EV) von $\underline{A}$.

Damit hat man auch die Lösung für die gesuchte Transformationsmatrix $\underline{V}$.

Das System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}; \quad \underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}$ kann dargestellt werden als

$$\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{u}; \quad \underline{y} = \underline{\tilde{C}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{D} \cdot \underline{u}$$

mit

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}; \qquad \underline{\tilde{B}} = \underline{V}^{-1} \underline{B}; \qquad \underline{\tilde{C}} = \underline{C}\,\underline{V};$$

wobei $\underline{V}$ Matrix der Eigenvektoren $\underline{v}_i$ und λ_i einfach.

2. Schritt: Berechnung der Transitionsmatrix

$$\underline{A} = \underline{V}\ \underline{\tilde{A}}\ \underline{V}^{-1}$$

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \underline{A}^l \cdot \frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} (\underline{V}\ \underline{\tilde{A}}\ \underline{V}^{-1})^l \cdot \frac{t^l}{l!}$$

dabei: $$(\underline{V}\ \underline{\tilde{A}}\ \underline{V}^{-1})^l = \underbrace{\underline{V}\ \underline{\tilde{A}}\ \overbrace{\underline{V}^{-1} \cdot \underline{V}}^{=\mathrm{I}}\ \underline{\tilde{A}}\ \underline{V}^{-1} \cdots \underline{V}\ \underline{\tilde{A}}\ \underline{V}^{-1}}_{\text{l-mal}} = \underline{V}\ \underline{\tilde{A}}^l\ \underline{V}^{-1}$$

$$\rightarrow \quad e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} \underline{\tilde{A}}^l \cdot \frac{t^l}{l!} \right)}_{e^{\underline{\tilde{A}}t}} \cdot \underline{V}^{-1}$$

$e^{\underline{\tilde{A}}t}$ einfach zu berechnen, weil:

$$e^{\underline{\tilde{A}}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}^l \cdot \frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^l & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n^l \end{bmatrix} \cdot \frac{t^l}{l!} = \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_1^l \cdot \frac{t^l}{l!} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_n^l \cdot \frac{t^l}{l!} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\underline{\tilde{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h. } e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot \underline{V}^{-1}$$

mit λ_i Eigenwerte von $\underline{A}$, $\underline{v}_i$ Eigenvektoren von $\underline{A}$; $\quad \underline{V} = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n]$.
Eigenwerte λ_i einfach;