Euler vs. Lagrange

Wie kann man in der Fluidmechanik einen Vorgang beschreiben? Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Sei $\vec{R}$ der Ortsvektor eines Fluidelements zur <u>Referenzzeit</u> t_0. Wenn ich mich auf t_0 festgelegt habe (z.B. $t_0 = 0$), identifiziert $\vec{R}$ eindeutig ein Fluidelement. Ich beschreibe eine Eigenschaft der Strömung dann als $\boxed{F = F(\vec{R}, t)}$ (bzw., wenn man ganz exakt sein möchte $F = F(\vec{R}, t, t_0)$).

Das ist nichts Neues, das ist klassische Mechanik; denn ich fixiere durch meine Wahl von $\vec{R}$ ein bestimmtes Element und verfolge, wie sich mit der Zeit t die Eigenschaft F dieses Elementes verändert (klassische Mechanik: z.B. Geschwindigkeit eines springenden Balls). Wichtig ist, dass die Variablen $\vec{R}$ und t <u>unabhängig</u> sind. Ich bleibe immer bei demselben Fluidelement.

b) Auch hier kein neues Konzept. Sei $\vec{r}$ ein beliebiger <u>fester</u> Punkt im Raum. Das heißt, jetzt sollen die Variablen $\vec{r}$ und t <u>unabhängig</u> sein. Dann kann ich die Strömung so beschreiben: $\boxed{F = F(\vec{r}, t)}$.

Das ist eine eulersche bzw. <u>Feldbeschreibung</u>. Analog dazu ist z.B. die Beschreibung des elektrischen Feldes $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$. Indem ich die Feldbeschreibung in der Fluidmechanik anwende, <u>löse</u> ich mich von der Geschichte jedes einzelnen Fluidelementes (ich fixiere einen Raumpunkt, an dem zu verschiedenen Zeiten auch verschiedene Fluidelemente sich "aufhalten"). Der Vorteil der Feldbeschreibung liegt also in einem reduzierten Beschreibungsaufwand, und oft ist nur diese Herangehensweise praktikabel.

Mit diesen zwei Betrachtungsweisen gehen auch zwei Zeitableitungen mit unterschiedlicher Bedeutung einher.

$$\text{I)}\ \left.\frac{\partial F(\vec{R},t)}{\partial t}\right|_{\vec{R}=\text{const}} \quad \text{und} \quad \text{II)}\ \left.\frac{\partial F(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\text{const}}.$$

Interpretation:

I) zeitliche Änderungsrate d. Größe F bei einem bestimmten Fluidelement $\vec{R}$ (das sich beliebig durch den Raum bewegen kann). Ich "befestige" also sozusagen mein Messinstrument für F an einem festen Partikel.

II) zeitliche Änderungsrate der Größe F in einem bestimmten Raumpunkt. Das Messinstrument ist an einem Punkt fixiert.

Geschwindigkeit und Beschleunigung:

Ich kann die Geschwindigkeit als Zeitableitung der Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(\vec{R},t)$ beschreiben $\Rightarrow$ $\vec{V} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{R}=\text{const}}$

(Geschw. des Partikels, das sich zur Referenzzeit t_0 in $\vec{R}$ befand $\Rightarrow$ Lagrange).

$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$

Oder als Geschwindigkeitsfeld $\cancel{\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)}$ $\Rightarrow$ Euler

(Geschw. des Partikels, das sich zur Zeit t im Raumpunkt $\vec{r}$ befindet).

Analog dazu kann ich die Beschleunigung darstellen gemäß:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{R},t) \qquad \text{Lagrange}$$
$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r},t) \qquad \text{Euler}$$

Jede für die Strömung relevante Größe lässt sich so prinzipiell als Verlauf für ein bestimmtes Teilchen oder als Eigenschaft eines Teilchens, das sich zur ~~bestimmten~~ Zeit t jeweils in einem bestimmten Raumpunkt befindet, beschreiben.

Die Materielle / Substantielle Ableitung

Frage: Wie bekomme ich aus den zwei Darstellungen für die Geschwindigkeit die Beschleunigung in der jew. Darstellung? (also $\vec{V}(\vec{R},t) \to \vec{A}(\vec{R},t)$ und $\vec{v}(\vec{r},t) \to \vec{a}(\vec{r},t)$)

Definition: Die Beschleunigung ist die zeitl. Änderung der Geschwindigkeit <u>eines bestimmten Teilchens.</u>

$\Rightarrow$ Lagrange: $\vec{A}(\vec{R},t) = \left.\frac{\partial \vec{V}(\vec{R},t)}{\partial t}\right|_{\vec{R}=\text{const.}}$

<u>ABER:</u>

$$\vec{a}(\vec{r},t) \neq \left.\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\text{const.}}$$

dies ist <u>NICHT</u> die Beschleunigung des Teilchens, das sich zur Zeit t in $\vec{r}$ befindet!

Vielmehr:

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{v}(\vec{r}(t),t) = \underline{\underline{\frac{D}{Dt}\vec{v}}}$$

mit dem Operator $\frac{D}{Dt}$, der nichts anderes bedeutet als $\frac{d}{dt}$ ($\Rightarrow$ totale Ableitung, alle Variablen hängen von t ab) und uns "warnen" will: bei der Ableitung muss die Teilchenbewegung im Raum berücksichtigt werden. $\frac{D}{Dt}$ steht also immer für eine Ableitung, die <u>der Bewegung folgt</u> $\Rightarrow$ materielle Ableitung.

Die materielle Ableitung beschreibt, wie sich eine Eigenschaft <u>für ein Teilchen</u> ändert, das sich zur Zeit t im Punkt $\vec{r}$ befindet.

<u>Kettenregel:</u>

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}F = \frac{D}{Dt}F(\vec{r}(t),t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}F := (\vec{v}\cdot\nabla)F + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

Der Operator $\frac{D}{Dt}$ kann auf ein Feld wirken (Skalar- oder Vektorfeld) und produziert genauso ein entsprechendes Feld. Ist eine Größe in der Felddarstellung (Euler) gegeben, und möchte man wissen, wie sich diese Größe für ein Fluidelement ändert, das sich durch das Feld bewegt, benutzt man $\frac{D}{Dt}$. Man erhält dabei wieder eine Felddarstellung.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

lokaler Anteil: Änderung d. Feldes mit der Zeit

konvektiver Anteil aufgrund der Teilchenbewegung (man braucht ja $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$, also das Geschwindigkeitsfeld)

Stationarität

... liegt vor, wenn der lokale Anteil von $\frac{D}{Dt}$ verschwindet bzw. die Felder der Strömungsgrößen zeitlich konstant sind. Stationarität bezieht sich also immer auf die Darstellung nach Euler:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\text{const}} = 0$$