

**Institut für Strömungsmaschinen
der Universität Hannover**
Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Skript zur Vorlesung

Strömungsmechanik II

SS 2005

12. April 2005

S. Kanzer
J. Seume
I.M. Wang

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	v
Verwendete Abkürzungen	vi
1 Kontinuumshypothese und Kinematik	1
1.1 Kinematik der Fluide	2
1.2 Zeitliche Ableitungen	3
1.2.1 Die substantielle Ableitung	3
1.2.2 Zeitliche Ableitung materieller Integrale	4
2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	6
2.1 Erhaltung der Masse	6
2.2 Erhaltung des Impulses	7
2.3 Erhaltung des Drehimpulses	10
2.4 Energieerhaltung	12
2.5 Newton'sche Fluide	14
3 Grenzschichttheorie	16
4 Vereinfachte Formen der Navier-Stokes Gleichungen	24
4.1 Isotherme Strömung	24
4.2 Isotherme und inkompressible Strömung	25
4.3 Rotationsfreie Strömung	25
4.4 Euler- und Bernoullische Gleichung	26
4.5 Kriechende Strömung eines inkompressiblen Fluids	28
4.6 Strömung in porösen Medien	29
5 Ähnlichkeitsparameter und Dimensionsanalyse	31
5.1 Grenzschichtähnlichkeit	31
5.2 Dimensionsanalyse	35
6 Lösungen der Bewegungsgleichungen	38
6.1 Hydrostatik	38
6.1.1 Atmosphäre	38
6.1.2 Auftrieb	40
6.1.3 Freie Oberflächen	40
6.2 1. Stokes'sches Problem	40
6.3 2. Stokes'sches Problem	42
6.4 Oszillierende Strömung zwischen Platten	44

7	Turbulente Strömungen	46
7.1	Grundlagen	46
7.2	Reynolds-Averaged Navier-Stokes	49
7.3	Turbulente Maße	52
7.4	Prandtl'scher Mischungsweg	55
8	Materialgesetze	57
9	Stromfadentheorie - kompressible Strömung	61
9.1	Stationäre Strömung	61
9.1.1	Strömung in Stromröhren	61
9.1.2	Gleichung des senkrechten Verdichtungsstoßes	66
9.1.3	Schräger Verdichtungsstoß	71
9.2	Instationäre Strömung	74
9.2.1	Methode der Charakteristiken	74
9.2.2	Kolben im Rohr	77
9.3	Stoßrohr	78
	Literatur	79

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

d	Durchmesser	m
e	Innere Energie pro Masseneinheit	J/kg
h	Spezifische Enthalpie	J/kg
\vec{k}	Volumenkraft	N/m ³
m	Masse	kg
n	Stoffmenge	mol
\vec{n}, n_i	Normalenvektor einer Oberfläche	—
p	Druck	Pa
\vec{q}, q_i	Wärmestrom pro Flächeneinheit	J/m ²
\vec{x}, x_i	Ortsvektor	m
\vec{u}, u_i	Geschwindigkeitsvektor	m/s
t	Zeit	s
\vec{t}, t_i	Vektor der Oberflächenspannungen	N/m ²
\vec{D}	Drehimpuls	Nm/s
E	Innere Energie	J
$\vec{\dot{E}} = e_{ij}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor	1/s
\vec{F}	Kraft	N
\vec{I}	Impuls	N s
K	Kinetische Energie	J
Kn	Knudsen-Zahl	—
L	Länge	m
P	Leistung	W
\vec{P}, P_{ij}	Reibspannungstensor	N/m ²
\dot{Q}	Wärmestrom	J
S	Fläche	m ²
T	Temperatur	K
\vec{T}	Spannungstensor	
V	Volumen	m ³

Griechische Formelzeichen

δ	Kronecker-Delta	—
ϵ_{ijk}	Epsilon-Tensor	—
η	Dynamische Viskosität	—
λ	Mittlere freie Weglänge	m
λ^*	Zweite Viskosität	m
ξ	Ortsvektor	m

ρ	Dichte	kg/m^3
τ_{ij}	Komponenten des Spannungstensors	
Φ	Dissipationsfunktion	W/m^3
Indizes		
Konstanten		
\vec{g}	Erdbeschleunigung	9.81 m/s^2
N_A	Avogadrokonstante	$6 \cdot 10^{23} \frac{\text{Moleküle}}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante	8.314 J/(mol K)

Verwendete Abkürzungen

1 Kontinuumshypothese und Kinematik

Mittlere freie Weglänge = λ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \frac{n}{V} N_A} \quad (1)$$

Avogadro-Konst. = $6 \cdot 10^{26} \frac{\text{Moleküle}}{\text{mol}}$; $pV = nRT$; d : Effektiver Moleküldurchmesser

Beispiel: O_2 bei $20^\circ C$, 1 atm

Die Annahme des Kontinuums ist nur dann gerechtfertigt, wenn die charakteristischen Abmessungen der Strömung größer sind, als die mittlere freie Weglänge λ

$$\frac{n}{V} = \frac{p}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{8314 \frac{\text{W}}{\text{kmolK}} \cdot 293 \text{ K}} = 41 \times 10^{-3} \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} \quad (2)$$

$$\frac{n}{V} \cdot N_A = 41 \times 10^{-3} \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} \cdot 6 \times 10^{26} \frac{\text{Moleküle}}{\text{kmol}} = 25 \times 10^{24} \frac{\text{Moleküle}}{\text{m}^3} \quad (3)$$

$$O_2 \implies d = 3 \text{ \AA}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi (3 \times 10^{-3} \text{ m})^2 25 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}} = 100 \text{ nm} \quad (4)$$

Ein Maß zur Beurteilung der Strömung ist die Knudsen-Zahl. Diese dimensionslose Kennzahl ist definiert als das Verhältnis von mittlerer freier Weglänge zur charakteristischen Länge der Strömung

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (5)$$

Damit die Annahme des Kontinuums für eine Strömung gerechtfertigt ist, muss das betrachtete Problem der Bedingung $Kn \ll 1$ genügen, in der Praxis $Kn < 0.01$.

$$L = 1 \text{ mm} : \\ Kn = \frac{\lambda}{L} = \frac{100 \times 10^{-9}}{10^{-3}} = 100 \times 10^{-6} = 0,0001 < 0,01 \quad (6)$$

\implies Kontinuum

$$L = 1 \mu \text{ m} : \\ Kn = 0,1 > 0,01 \quad (7)$$

\implies Übergangsbereich / verdünnte Gase

$$L = 1 \text{ nm} : \\ Kn = 100 \gg 0,01 \quad (8)$$

$$\implies \text{freie Molekülströmung} \quad (9)$$

- Gase: Impulsaustausch der Moleküle
hohe Temperaturen \rightarrow zäh $\mu \propto T^{0,4}$

- Flüssigkeiten: Anziehungskräfte -> Widerstand bei Deformation
niedrige Temperaturen -> zäh

1.1 Kinematik der Fluide

=Betrachtung der Bewegungen ohne Berücksichtigung der Kräfte

1. Materielle Beschreibung

$$\vec{x} = (\vec{\xi}, t), \vec{x}_0 = \vec{\xi} \quad (10)$$

$$\vec{u} = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} \right]_{\vec{\xi}} \quad (11)$$

"Lagrange"-Beschreibung

2. Ortsfeste Betrachtung

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t) \quad (12)$$

Zeit t variabel, Ort \vec{x} fest

"Euler'sche" oder Feldbetrachtung

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t); \quad \frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j, t) \quad (13)$$

$$u_i(\vec{x} + d\vec{x}, t) = u_i(\vec{x}, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}}_{e_{ij}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}}_{\Omega_{ij}} \quad (15)$$

$$u_i(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \underbrace{u_i(\vec{x}, t)}_A + \underbrace{e_{ij} dx_j}_B + \underbrace{\Omega_{ij} dx_j}_C \quad (16)$$

A : lineare Bewegung = Translation

B : Verformung

C : Drehung

(17)

Beschreibung der Bewegung durch Linien:

- Bahnlinie Tangentenkurve zu Geschwindigkeiten eines materiellen Punktes über die Zeit (Bewegungsgeschichte).
- Stromlinie s.o., aber zu einem Zeitpunkt, Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes.
- Streichlinie Kurve durch alle materiellen Punkte, die bis zur Zeit t einen Ort y passiert haben.

Bestimmung einer Bahnlinie:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{x}(t_0) = \vec{\xi}$ lösen.

Bestimmung einer Stromlinie

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}(\vec{x}, t)}{|\vec{u}|}$$

mit $ds = |d\vec{x}|$ lösen.

1.2 Zeitliche Ableitungen

1.2.1 Die substantielle Ableitung

Feldbeschreibung, Vorgänge bei \vec{x} zur Zeit t .

z.B. Skalarfeld

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i, \quad i = 1 \dots 3 \quad \bigwedge \frac{dx_i}{dt} = u_i \quad (18)$$

$$\implies \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \quad (19)$$

z.B. Geschwindigkeit

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \quad (20)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (21)$$

”Substantielle Ableitung”

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (22)$$

1.2.2 Zeitliche Ableitung materieller Integrale

Beispiel:

$$m = \int_M dm = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (23)$$

allgemein:

$$\int_M \varphi dm = \iiint_{V(t)} \varphi \rho(\vec{x}, t) dV \quad (24)$$

Massenerhaltung:

$$\frac{DM}{Dt} = 0, \quad \frac{D}{Dt}(dm) = 0 \quad (25)$$

Leibnitz'sche Regel

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \varphi dV = \iiint_V \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] dV \quad (26)$$

wenn φ und $d\varphi/dt$ stetig in V .

$$\frac{D}{Dt} \int_M \varphi dm = \frac{D}{Dt} \iiint_V \varphi \rho dV \quad (27)$$

$$= \iiint_V \frac{D\varphi}{Dt} \rho dV \quad (28)$$

$$= \int_M \frac{D\varphi}{Dt} dm \quad (29)$$

V : Volumen, das zum Zeitpunkt t als konstant betrachtet werden kann. Im folgenden wird das Volumenintegral aus dem Massenintegral abgeleitet. Dabei wird φ durch φ/ρ ersetzt.

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \varphi dV = \frac{D}{Dt} \int_M \varphi \frac{1}{\rho} dm = \int_M \frac{D}{Dt} \left(\varphi \frac{1}{\rho} \right) dm \quad (30)$$

$$\text{mit } \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) dm = \frac{D}{Dt} dV$$

$$\text{weil } \frac{1}{\rho} dm = dV$$

$$= \iiint_V \frac{D\varphi}{Dt} dV + \iiint_V \varphi \cdot \frac{D(dV)}{Dt} \quad (31)$$

$$\frac{\partial dV}{\partial t} = 0, \text{ weil } V = \text{const}$$

Die substantielle Ableitung von dV kann umgeformt werden:

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \frac{D(dV)}{Dt} = dx_2 dx_3 \frac{D(dx_1)}{Dt} + dx_1 dx_3 \frac{D(dx_2)}{Dt} + dx_1 dx_2 \frac{D(dx_3)}{Dt} \quad (33)$$

$$= \frac{dx_1}{dx_1} dx_2 dx_3 \frac{D(dx_1)}{Dt} + \frac{dx_2}{dx_2} dx_1 dx_3 \frac{D(dx_2)}{Dt} + \frac{dx_3}{dx_3} dx_1 dx_2 \frac{D(dx_3)}{Dt} \quad (34)$$

$$\Rightarrow \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{dV}{dx_i} \frac{D(dx_i)}{Dt} \quad (35)$$

Reihenfolge der Differenzierung vertauschen:

$$\frac{D}{Dt}(d\vec{x}) = d \left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right] = d\vec{u} \quad (36)$$

$$\frac{D}{Dt}(dx_i) = du_i \quad (37)$$

Wird jetzt eine Bewegung mit reiner Verformung betrachtet, gilt nach Gleichung (16)

$$\frac{du_i}{dx_i} = u_i(\vec{x} + d\vec{x}, t) - u_i(\vec{x}, t) \quad (38)$$

$$= e_{ii} + \underbrace{\Omega_{ii}}_{=0, \text{ für } i=j} \quad (39)$$

$$\Rightarrow du_i = e_{ii} dx_i \quad (40)$$

Mit Gleichung (37) kann Gleichung (40) umgeformt werden.

$$\frac{D}{Dt}(dx_i) = e_{ii} dx_i \quad (41)$$

$$\Rightarrow e_{ii} = \frac{1}{dx_i} \frac{D}{Dt}(dx_i) \quad (42)$$

$$(43)$$

Ergänzen mit dV

$$e_{ii} dV = \frac{dV}{dx_i} \frac{D}{Dt}(dx_i) \quad (44)$$

und Anwenden von Gleichung (37) führt auf

$$\frac{D(dV)}{Dt} = e_{ii} dV \quad (45)$$

Diese Gleichung (45) wird in Gleichung (31) eingesetzt.

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \varphi dV = \iiint_V \left[\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV \quad (46)$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV \quad (47)$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_i \varphi}{\partial x_i} \right] dV \quad (48)$$

$$\text{Gau\ss}'\text{scher Integralsatz: } \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dV = \iint_S \varphi n_i dS \quad (49)$$

Reynolds'sches Transporttheorem :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \varphi dV = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \iint_S \varphi u_i n_i dS \quad (50)$$

Zeitliche Änderung des materiellen Volumenintegrals=zeitl. Änderung im ortsfesten Volumen zur Zeit t + Fluss über die Oberfläche.

2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

2.1 Erhaltung der Masse

Wird in den vorherigen Betrachtungen die Variable φ durch die Dichte ρ ersetzt, folgt aus dem Reynold'schen Transporttheorem

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right]}_0 dV = 0 \quad (51)$$

Da das Volumen konstant ist, resultiert aus dem Grenzübergang $V \rightarrow 0$ die differentielle Form der Massenerhaltung

$$\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (52)$$

Wenn in Gleichung (52) die substantielle Ableitung der Dichte mit

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (53)$$

eingeführt wird, resultiert eine andere Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (54)$$

In inkompressibler Strömung ist die Dichte konstant und alle Ableitungen der Dichte sind gleich null. Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich für den inkompressiblen Fall mit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (55)$$

zu

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{u} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (56)$$

d.h. das Fluid kann sich nicht ausdehnen oder zusammenziehen.

Betrachtet man die allgemeingültige integrale Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \iint_S \rho u_i n_i \, dS = 0 \quad (57)$$

so ist das Integral über die zeitliche Änderung im Volumen gleich dem Fluss über die Berandung.

2.2 Erhaltung des Impulses

Die Änderung des Impulses ist gleich der Summe aller an dem Fluidelement angreifenden Kräfte

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \sum \vec{F} \quad (58)$$

$$\vec{I} = \iiint_V \rho \vec{u} \, dV \quad \text{Impuls} \quad (59)$$

Dabei werden folgende Arten von Kräften unterschieden :

1. Massen - / Volumen - Kräfte \longrightarrow z.B. Gravitation Kraftfelder
2. Oberflächen - / Kontakt - Kräfte \longrightarrow z.B. Spannungen

Ein Beispiel für die Volumenkräften ist die Massenkraft infolge Gravitation

$$\vec{k} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = \vec{g} \quad (60)$$

mit \vec{g} als spezifischer Massenkraft. Volumenkräfte können aber auch aus elektrischen Feldern resultieren und müssen dann entsprechend berücksichtigt werden.

Auf die Oberflächen des Fluidvolumens wirken die Spannungen (Normal- und Scherspannungen)

$$\vec{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta s}. \quad (61)$$

Werden die Gleichungen (60) und (61) in die Impulsbilanz nach Gleichung (58) eingesetzt ergibt sich

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \vec{u} dV = \iiint_V \rho \vec{k} dV + \iint_S \vec{t} dS \quad (62)$$

bzw. unter Zuhilfenahme der Leibnitz'schen Regel und der Massenerhaltung (Gleichung (51): $\iiint_V \frac{D\rho}{Dt} dV = 0$)

$$\iiint_V \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho dV = \iiint_V \rho \vec{k} dV + \iint_S \vec{t} dS \quad (63)$$

Führt man eine Größenordnungsbetrachtung der Oberflächenkräfte durch, so gilt

$$V \propto L^3, S \propto L^2. \quad (64)$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \left[\iiint_V = \iiint_V + \iint_S \right] \small\swarrow_{\text{Volumen-Integrale gehen gegen } 0} \quad (65)$$

$$= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \iint_S \vec{t} dS = 0 \small\swarrow_{\text{Impulssatz}} \quad (66)$$

Daraus folgt, dass die Oberflächenkräfte untereinander im lokalen Gleichgewicht stehen.

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{l^2} [\vec{t}^{(-\vec{e}_i)} n_i + \vec{t}^{(\vec{n})}] = 0 \quad (67)$$

Es wird nun die Tangentialkraft $\vec{t}^{(\vec{n})}$ der schrägen Fläche betrachtet, also mit dem Oberflächennormalenvektor \vec{n} . Die anderen Flächen seien normal zu den Koordinatenebenen und haben somit die Normalenvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 .

1.

$$\vec{t}^{(\vec{n})} = -\vec{t}^{(-\vec{n})} = -\vec{t}^{(-\vec{e}_1)} n_1 - \vec{t}^{(-\vec{e}_2)} n_2 - \vec{t}^{(-\vec{e}_3)} n_3 \quad (68)$$

2.

$$\vec{t}^{(\vec{e}_i)} = -\vec{t}^{(-\vec{e}_i)} \quad (69)$$

Aus Gleichung (68) und Gleichung (69) folgt

$$\vec{t}^{(\vec{n})} = \vec{t}^{(\vec{e}_1)} n_1 + \vec{t}^{(\vec{e}_2)} n_2 + \vec{t}^{(\vec{e}_3)} n_3 \quad (70)$$

bzw.

$$\vec{t}^{(\vec{e}_1)} = \tau_{11} \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 + \tau_{13} \vec{e}_3. \quad (71)$$

Definition: Dabei bedeuten erste und zweite tiefstehenden Indizes der Variablen τ_{11} , τ_{12} und τ_{13} jeweils den Normalvektor der betrachteten Fläche und die Richtung der Kraftkomponente.

Dieses bedeutet also, dass sich jede Oberflächenkraft in drei Komponenten zerlegen lässt.

Jede Spannung wird über den Normalvektor der Fläche in der die Spannung wirkt und die Richtung der Kraftkomponente definiert.

$$\vec{t}^{(\vec{n})} = \begin{array}{l} t_1 \vec{e}_1 \\ + t_2 \vec{e}_2 \\ + t_3 \vec{e}_3 \end{array} = \begin{array}{l} n_1 \\ + n_2 \\ + n_3 \end{array} \begin{array}{l} (\tau_{11} \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 + \tau_{13} \vec{e}_3) \\ (\tau_{21} \vec{e}_1 + \tau_{22} \vec{e}_2 + \tau_{23} \vec{e}_3) \\ (\tau_{31} \vec{e}_1 + \tau_{32} \vec{e}_2 + \tau_{33} \vec{e}_3) \end{array} \quad (72)$$

$= t_i(\vec{x}, \vec{n}, t) = \tau_{ji}(\vec{x}, t)n_j \implies i$ -te von t_i Komponente des Spannungsvektor
 $\implies n_j$ Fläche mit Normal in j -Richtung

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{n} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Die Diagonalelemente des Spannungstensors sind die Normalspannungen und die restlichen Elemente sind die Scherspannungen. Einsetzen des Spannungstensors nach Gleichung (73) in den Impulssatz nach Gleichung (63) liefert

$$\iiint_V \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho dV = \iiint_V \rho \vec{k} dV + \iint_S \vec{n} \cdot \vec{T} dS \quad (74)$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz nach Gleichung (49) lässt sich das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführen und nach Zusammenfassen der Integrale ergibt sich für die Impulsbilanz

$$\iiint_V \left(\rho \frac{D u_i}{Dt} - \rho k_i - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = 0 \quad (75)$$

oder, wenn die Funktionen im Volumen definiert und stetig sind, in differenzieller Form

$$\rho \frac{D \vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \vec{T}. \quad (76)$$

Diese Gleichung ist die **Erste Cauchy'sche Bewegungsgleichung** und ist allgemeingültig, solange die Kontinuumshypothese ebenfalls gültig ist.

2.3 Erhaltung des Drehimpulses

Die zeitliche Änderung des Dralls \vec{D} ist gleich dem auf den Körper wirkenden Moment \vec{M} .

$$\frac{D}{Dt} \vec{D} = \vec{M} \quad (77)$$

$$\text{und mit } \vec{D} = \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{u}) dV \quad (78)$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{u}) dV = \vec{M} \quad (79)$$

berechnet sich der Drall des von dem flüssigen Körper eingenommenen Bereichs. Eine Änderung des Dralls kann nur durch die Volumen- oder die Oberflächenkräfte erfolgen. Für das Moment lässt sich schreiben

$$\vec{M} = \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{k}) dV + \iint_S \vec{x} \times \vec{t} dS, \quad (80)$$

so dass sich für die Bilanz des Drehimpulses

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{u}) dV = \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{k}) dV + \iint_S \vec{x} \times \vec{t} dS \quad (81)$$

ergibt. Für den Spannungsvektor lässt sich schreiben

$$t_i = \tau_{ji} n_j \longrightarrow \iint_S \vec{x} \times \vec{t} dS = \iint_S \epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l dS. \quad (82)$$

Der *Epsilon-Tensor* ϵ_{ijk} ist folgendermaßen definiert

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } ijk \text{ gerade (123 oder 231);} \\ 0 & , \text{ wenn zwei Indices gleich (112 oder 133);} \\ -1 & , \text{ wenn } ijk \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (83)$$

Für das Moment gilt somit

- kein Moment, wenn Ortsvektor gleiche Richtung wie \vec{u}
- Je größer Ortsvektor desto größer Moment.
- Je größer Oberflächenspannung desto größer Moment.

Überführt man das Oberflächenintegral mit Hilfe des Gauß'schen Satzes in ein Volumenintegral

$$\iint_S \vec{x} \times \vec{t} \, dS = \iiint_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \tau_{lh}) \, dV \quad (84)$$

und setzt das Ergebnis in den Drehimpulssatz nach Gleichung (81) ein und wendet auf die linke Seite der Gleichung die Leibnitzregel

$$\frac{D}{Dt} \int_M \varphi \, dm = \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \varphi \, dV = \iiint_V \frac{D\varphi}{Dt} \rho \, dV \quad (85)$$

an, so ergibt sich

$$\implies \iiint_V \epsilon_{ijk} \left(\rho \frac{D}{Dt} (x_j u_u) - \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \tau_{lk}) - x_j \rho k_k \right) \, dV = 0 \quad (86)$$

Umformen liefert

$$\iiint_V \left[\epsilon_{ijk} x_j \underbrace{\left(\rho \frac{D u_k}{Dt} - \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} - \rho k_k \right)}_{=0 \text{ (nach Impulssatz)}} + \rho \underbrace{\epsilon_{ijk} u_j u_k}_{\vec{u} \times \vec{u} = 0} - \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] \, dV = 0 \quad (87)$$

$$\implies \iiint_V \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \, dV = 0 \implies \epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad (88)$$

$$\implies \tau_{jk} = \tau_{kj} \quad (89)$$

Der Spannungstensor ist also symmetrisch, d.h. $\tau_{12} = \tau_{21}$. Eine integrale Form des Drehimpulserhalts ergibt sich aus dem Reynolds'schen Transporttheorem für stationäre Probleme.

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \vec{x} \times (\rho \vec{u}) \, dV = \iiint_V \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0, \text{ stationär}} \, dV + \iint_S \vec{x} \times (\rho \vec{u}) u_i n_i \, dS \quad (90)$$

$$\implies \iint_S \epsilon_{ijk} x_j u_k \rho u_l n_l \, dS = \iint_S \epsilon_{ijk} x_j t_k \, dS \quad (91)$$

In dieser Form bedeutet der Drallsatz, dass für stationäre Bedingungen der Drallfluss über die Berandung S (linke Seite der Gleichung) gleich dem anliegenden Moment (rechte Seite der Gleichung) ist.

2.4 Energieerhaltung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet

$$\frac{D}{Dt}(K + E) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (92)$$

und beschreibt das Gleichgewicht zwischen der kinetischen Energie K , der inneren Energie E , der Arbeit \dot{W} und der Wärme \dot{Q} . Ist e die innere Energie pro Masseneinheit, so ist die innere Energie eines einzelnen materiellen Teilchens durch $e \, d m$ gegeben. Für die innere Energie eines Körpers, d.h. die eines abgegrenzten Teils der Flüssigkeit, ist

$$E = \iiint_{(V(t))} e \rho \, dV. \quad (93)$$

Die kinetische Energie eines materiellen Teilchens ist $(u^2/2) \, d m$ und dementsprechend die kinetische Energie K eines Körpers

$$K = \iiint_{(V(t))} \frac{u_i u_i}{2} \rho \, dV. \quad (94)$$

Arbeit wird auf das Fluid durch die an den Körper angreifenden Volumen- und Oberflächenkräfte ausgeübt. Die Leistung der Oberflächenkraft $\vec{t} \, d S$ ist $\vec{u} \cdot \vec{t} \, d S$ und die der Volumenkraft $\rho \vec{k} \, d V$ ist $\vec{u} \cdot \rho \vec{k} \, d V$, so dass für die Arbeit gilt

$$\dot{W} = \iiint_{(V(t))} \rho u_i k_i \, dV + \iint_{(S(t))} u_i t_i \, dS. \quad (95)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Wärmestromvektor \vec{q} und dem Temperaturfeld hängt vom Material ab. (Materialabhängigkeit)

$$\dot{Q} = \iint_{(S(t))} q_i n_i \, dS. \quad (96)$$

Einsetzen der Gleichungen (93) bis (96) in die Bilanz der Energie nach Gleichung (92) führt auf

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \left[\frac{u_i u_i}{2} + e \right] \rho \, dV = \iiint_V \rho u_i k_i \, dV + \iint_S u_i t_i \, dS - \iint_S q_i n_i \, dS. \quad (97)$$

Unter Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes werden die Oberflächen- in Volumenintegrale überführt und die Integrale zusammengefasst.

$$\iiint_V \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u_i u_i}{2} + e \right) - \rho k_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} u_i) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right\} dV = 0 \quad (98)$$

Da der Integrand als stetig vorausgesetzt wurde und der Integrationsbereich beliebig gewählt werden kann, muss der Integrand verschwinden und es gilt

$$\rho u_i \frac{D u_i}{Dt} + \rho \frac{D e}{Dt} = \rho k_i u_i + u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (99)$$

Gleichung (99) lässt sich umformen

$$u_i \underbrace{\left[\rho \frac{D u_i}{Dt} - \rho_i k_i - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right]}_{=0} + \rho \frac{D e}{Dt} = \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (100)$$

Der Term in Klammern ist die erste Cauchy'schen Bewegungsgleichung und somit gleich null. Somit ergibt sich die Energiebilanz

$$\frac{D e}{Dt} = \frac{\tau_{ji}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad (101)$$

die das kontinuumsmechanische Analogon des ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist.

$$\frac{D e}{Dt} = \frac{d e}{d t} = \delta \dot{w} + \delta \dot{q} \quad (102)$$

In der Gleichung ist $\delta \dot{w}$ der mechanische und $\delta \dot{q}$ der thermische Anteil des Energietransfers. Der Spannungstensor des mechanischen Anteils lässt sich weiterhin in Druck- und Reibspannungen zerlegen

$$\delta \dot{w} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \underbrace{P_{ij} e_{ij}}_{\Phi} \quad (103)$$

Φ : Dissipationsfunktion

P_{ij} : Reibspannungstensor

e_{ij} : Deformationsgeschwindigkeitstensor

Deformationsgeschwindigkeitstensor :

$$\vec{E} = e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (104)$$

Mit der Definition der Enthalpie

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (105)$$

und einer Zerlegung des Spannungstensors in Normal- und Schubspannungen

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + P_{ij} \quad (106)$$

(die Normalspannungen sind der thermodynamische Druck und Reibspannungen (P_{ij} , $i = j$); die Schubspannungen sind Reibspannungen (P_{ij} , $i \neq j$)) sowie der Kontinuitätsgleichung lässt sich die Energiegleichung (99) in die Form

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{u_i u_i}{2} + h \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho k_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ji} u_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (107)$$

bringen.

2.5 Newton'sche Fluide

Die Gleichungen für Newton'sche Fluide sind eine Spezialisierung der allgemeingültigen Bilanzsätze, da die Materialgesetze für diese Fluide berücksichtigt werden. Für ein Newton'sches Fluid gilt

$$\tau_{ij} \propto e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (108)$$

d.h. der Schubspannungstensor hängt linear vom Deformationsgeschwindigkeitstensor ab. Mit der Materialtheorie kann gezeigt werden, dass die allgemeinste Form für ein Newton'sches Fluid

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* e_{kk} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}, \quad (109)$$

bzw. in symbolischer Schreibweise

$$\vec{T} = (-p + \lambda^* \nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\eta \vec{E} \quad (110)$$

ist. Diese Materialgleichung wird als *Cauchy-Poisson-Gesetz* bezeichnet. Der Tensor \vec{I} ist der Einheitstensor

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} e_{11} & & \\ & e_{22} & \\ & & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Die mittlere Normalspannung :

$$\bar{p} = \frac{1}{3} \tau_{ii} \longrightarrow \bar{p} + p = \frac{1}{3} \tau_{ii} + p = e_{ii} \underbrace{\left(\lambda^* + \frac{2}{3} \eta \right)}_{\text{Druckzähigkeit}} \quad (112)$$

λ^* : second viscosity entfällt bei inkompressibler Strömung, weil:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \implies \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = e_{ii} = 0 \quad (113)$$

\implies D.h. die Druckzähigkeit wird mit null multipliziert.

Mit Hilfe der

1. Stokes'schen Hypothese :

$$\eta_D = \lambda^* + \frac{2}{3}\eta = 0 \quad (114)$$

2. und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\vec{\vec{E}} = \vec{e}_i \vec{e}_j e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T] \quad (115)$$

lässt sich das Materialgesetz in die allgemeingültige erste Cauchy'sche Bewegungsgleichung (Gleichung (76)) einsetzen und man erhält mit

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -p + \lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (116)$$

bzw. in symbolischer Form

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p + \nabla(\lambda^* \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot (2\eta \vec{\vec{E}}) \quad (117)$$

die *Navier-Stokesschen Gleichungen*.

Die Stoffdaten λ^* und η sind temperaturabhängig. Für isotherme Strömungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} = \eta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \right) \quad (118)$$

Damit wird aus Gleichung (116)

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda^* + \eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right), \quad (119)$$

und aus Gleichung (117) in symbolischer Schreibweise

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \underbrace{\rho \vec{k}}_{\text{Volumenkräfte}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{Druckgradient}} + (\lambda^* + \eta) \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{u})}_{\text{Gradient der Divergenz von } \vec{u}} + \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (120)$$

Für inkompressible Strömungen gilt $\rho = \text{const}$ und Gleichung (120) vereinfacht sich zu

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (121)$$

3 Grenzschichttheorie

Die Navier-Stokes-Gleichung für isotherme inkompressible Strömungen lautet

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (122)$$

Zur universellen, dimensionsunabhängigen Betrachtung werden die Größen und Operatoren mit einer Bezugsgröße normalisiert, so dass sie von der Größenordnung 1 sind.

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \quad (123)$$

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{W} \quad (124)$$

$$\nabla^* = L \nabla \quad (125)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho W^2} \quad (126)$$

$$t^* = f t \quad (127)$$

Als Bezugsgrößen werden üblicherweise L die charakteristische Länge und W die Geschwindigkeit der Aussenströmung gewählt. Die normalisierten Größen werden in Gleichung (122) eingesetzt

$$f W \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + W^2 \vec{u}^* \cdot \frac{\nabla^*}{L} \vec{u}^* = -\frac{\nabla^* p^*}{L} \frac{\rho}{\rho} W^2 + \frac{\nu W \nabla^{*2} \vec{u}^*}{L^2} \Big| \cdot \frac{L}{W^2} \quad (128)$$

$$\implies \frac{f L}{W} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu}{W L} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (129)$$

$$\implies Str \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re_L} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (130)$$

Durch die Normalisierung der Differentialgleichung werden in die Gleichung zwei Ähnlichkeitsparameter eingebracht. Diese sind

1. Strouhalzahl

$$Str = \frac{f L}{W} \quad (131)$$

= normalisierte Frequenz

= normalisierte zeitliche Beschleunigung

= $\frac{\text{zeitliche Beschleunigung}}{\text{räumliche Beschleunigung}}$

2. Reynoldszahl

$$Re = \frac{W L}{\nu} = \frac{\text{räumliche Beschleunigung}}{\text{Reibung}} \quad (132)$$

= $\frac{\text{Impulsänderung durch Druckänderung}}{\text{Impulsänderung durch Reibung}}$

Bei sinnvoller Normalisierung sind alle Terme (z.B. $\nabla^* p^*$, $\partial \vec{u}^*/\partial t^*$) von der Größenordnung 1. Die Ähnlichkeitsparameter geben daher die relative Größe und damit die Bedeutung der Terme an. Werden z.B. Strömungen bei sehr hohen Re-Zahlen betrachtet (z.B. bei hoher Geschwindigkeit), so ist der Einfluss der Reibungsterme sehr gering. Bei sehr kleinen Re-Zahlen dagegen (z.B. kriechende Strömungen) ist der Einfluss dieser Terme sehr groß.

Im Bereich hoher Reynoldszahlen beschränkt sich der Einfluss der Reibung auf ein sehr kleines Gebiet in der Nähe von festen Oberflächen ("Grenzschicht"), wo die Haftbedingung erfüllt werden muss. Das Strömungsfeld wird in einen Bereich der Hauptströmung, der als reibungsfrei angesehen wird, und in einen Bereich der Grenzschichtströmung, der als reibungsbehaftet angesehen wird, aufgeteilt. Betrachtet man nun die Grenzschicht, so gilt für eine 2-dimensionale Betrachtung:

1. x -Richtung

Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\vec{u}^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} \quad (133)$$

Gleichung (130) gilt auch in der Grenzschicht. Die Komponente der Gleichung in x -Richtung lautet

$$Str \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (134)$$

Die Grenzschicht ist sehr viel dünner als sie lang ist, so dass gilt

$$\delta \ll L; \delta^* = \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (135)$$

und daraus folgt, dass mit $y \leq \delta$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial/\partial x}{\partial/\partial y} = \frac{\delta}{L} \quad (136)$$

räumliche Ableitungen in y -Richtung eine andere Größenordnung haben, als räumliche Ableitungen in die x -Richtung. Es gilt dann

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (137)$$

und der Term $\partial^2 u^*/\partial x^{*2}$ ist vernachlässigbar. Aus der Betrachtung der Größenordnung des Terms u^* ($\partial u^*/\partial x^*$), die bei sinnvoller Normalisierung 1 sein muss, und der Erkenntnis, dass

$$y^* = \frac{y}{L} = \frac{y \delta}{\delta L} = O(1) \cdot \frac{\delta}{L}$$

ist, resultiert dann

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = \text{Ordnung}(1) \implies Re \propto \frac{L^2}{\delta^2} \quad (138)$$

Betrachtet man die Kontinuitätsgleichung in der Grenzschicht, so gilt:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (139)$$

$$\iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (140)$$

$$\iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (141)$$

Bei geringer Änderung der Dichte gilt

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (142)$$

$$\longrightarrow \frac{W}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{W}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (143)$$

$$\delta \ll L \implies v \ll u \quad (144)$$

2. y -Richtung

Die Komponente von Gleichung (130) in y -Richtung lautet

$$\text{Str} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (145)$$

Es ergeben sich folgende Größenordnungen für die Grenzschicht:

$$u^* = \frac{u}{W} \propto O(1), \quad v^* = \frac{v}{W} \propto O(?), \quad (146)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \propto O(1), \quad y^* = \frac{y}{L} \propto O\left(\frac{\delta}{L}\right) \quad (147)$$

und zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (143)

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \rightarrow \frac{O(1)}{O(1)} + \frac{v^*}{\delta/L} = 0 \Rightarrow v^* \propto O\left(\frac{\delta}{L}\right). \quad (148)$$

Mit diesen Beziehungen kann eine Größenordnungsbetrachtung an Gleichung (145) durchgeführt werden. Die Größenordnungen der einzelnen Terme finden

sich unter den Termen.

$$\begin{aligned}
 Str \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\
 \frac{\delta}{L} & \quad \frac{\delta}{L} & \quad \frac{\delta}{L} & \quad ? \\
 & + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \\
 & \quad \left(\frac{L}{\delta} \right)^{-2} \frac{\delta}{L} & \quad \frac{\delta}{\left(\frac{\delta}{L} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Vergleicht man die Größenordnungen, so folgt

$$\frac{\delta}{L} + \frac{\delta}{L} + \frac{\delta}{L} = ? + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \cdot \left[\frac{\delta}{L} + \frac{1}{\frac{\delta}{L}} \right] \quad (149)$$

2 - D; stationär

$$\implies - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \propto \frac{\delta}{L} \implies \text{Druckgradient in } y\text{-Richtung klein} \quad (150)$$

Schlussfolgerungen :

$$1. \quad \frac{v}{u} \approx \frac{\delta}{L} \quad (151)$$

$$2. \quad Re \approx \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \quad (152)$$

$$3. \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (153)$$

Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (154)$$

Kontinuitätsgleichung :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (155)$$

Randbedingungen :

1. Haftbedingung: Aufgrund der Reibung ist die relative Strömungsgeschwindigkeit entlang der Wand an der Körperoberfläche gleich null.

$$u \Big|_{y=0} = 0; \quad (156)$$

2. Feste Oberfläche Die Oberfläche des Körpers ist für das Fluid undurchdringlich. Es tritt kein Fluid durch die Oberfläche des Körpers.

$$v \Big|_{y=0} = 0; \quad (157)$$

3. Hauptströmung: Am Rand der Grenzschicht zur Hauptströmung entspricht die Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht der der Hauptströmung.

$$u \Big|_{y=\infty} = W(x, t) \quad (158)$$

4. Der Druckgradient in der Grenzschicht wird von der reibungsfreien Außenströmung aufgeprägt. Die stationäre Impulsbilanz für die Außenströmung lautet

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (159)$$

Das Geschwindigkeitsfeld der Hauptströmung in y -Richtung ist homogen, so dass $du/dy = 0$ gilt. Weiterhin gilt Gleichung (158), so dass sich Gleichung (159) vereinfachen lässt.

$$u \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (160)$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{du^2}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (161)$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{dW_{(x)}^2}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (162)$$

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_L}} = \sqrt{\frac{\nu}{wL}} \quad (163)$$

Die vereinfachte Form der Grenzschichtgleichung lautet für den stationären Fall

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (164)$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (162)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{2} \frac{dW_{(x)}^2}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (165)$$

Durch Integration der Prandtl'schen Impulsgleichung über die Höhe h , die über die Grenzschichtdicke δ hinausgeht, ergibt sich die von Karman'sche Integralgleichung

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - W \frac{dW}{dx} \right) dy = \int_0^h \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy. \quad (166)$$

Das Integral auf der rechten Seite wird

$$\int_0^h \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^h = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_h - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = -\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \tau_w}_{\text{spez. Dissipation}} \quad (167)$$

und ist die spezifische Dissipation [W/kg]. Aus der Kontinuitätsgleichung (155) für die Grenzschicht folgt für die Geschwindigkeit v in y -Richtung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (168)$$

Einsetzen in Gleichung (167) eliminiert v und u verbleibt als einzige variable Geschwindigkeit

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - W \frac{dW}{dx} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \tau_w. \quad (169)$$

Das Doppelintegral wird mit Hilfe der partiellen Integration gelöst nach

$$\begin{aligned} \int_a^b f' g dy &= f g \Big|_a^b - \int_a^b f g' dy \quad (170) \\ \int_0^h \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{f'} \underbrace{\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)}_g dy &= u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \Big|_0^h - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= W \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (171) \end{aligned}$$

und ergibt eingesetzt in Gleichung (169)

$$\int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - W \frac{\partial u}{\partial x} - W \frac{dW}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}. \quad (172)$$

Zur Beschreibung der Verdrängungswirkung der Grenzschicht und des Impulsverlusts in der Grenzschicht werden folgende Grenzschichtkenngößen eingeführt:

1. Verdrängungsdicke

$$\delta_1 W = \int_0^\infty (W - u) dy \quad (173)$$

2. Impulsverlustdicke

$$\delta_2 W^2 = \int_0^\infty u(W - u) dy \quad (174)$$

Eine Übersicht über weitere Grenzschichtparameter findet sich im Anhang 3. Erweitert man das Integral auf der linken Seite mit $+u_1 (\partial U / \partial x_1) - u_1 (dU / dx_1) = 0$ so kann die Gleichung (172) in der folgenden Form geschrieben werden

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u(W - u)] dy + \frac{dW}{dx} \int_0^h (W - u) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (175)$$

Unter Anwendung der Leibnitz'schen Regel und der Definitionen der Verdrängungsdicke δ_1 nach Gleichung (173) und der Impulsverlustdicke δ_2 nach Gleichung (174) ergibt sich für Gleichung (175) eine Formulierung, in der nur noch Variablen der Außenströmung und Grenzschichtparameter vorkommen.

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (W^2 \delta_2) + \delta_1 W \frac{dW}{dx} \quad (176)$$

Wird die Gleichung mit $\delta_2 / (\nu W)$ erweitert, erlaubt dieses die dimensionslose Formulierung

$$\implies \frac{\tau_w \delta_2}{\eta W} = \underbrace{\frac{W \delta_2}{\nu}}_{Re \delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dW}{dx} \left(\frac{\delta_2^2 W}{\nu} \right) \quad (177)$$

$$\longrightarrow 2 \frac{\tau_w \delta_2}{\eta W} = \frac{d}{dx} \left(\frac{W \delta_2^2}{\nu} \right) + (3 + 2H_{12}) \frac{W \delta_2^2}{\nu} \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} \quad (178)$$

Der Parameter H_{12} wird als Formfaktor bezeichnet und ist ein Maß für die "Fülligkeit des Geschwindigkeitsprofils" (Siehe Anhang) Mit der Impulsverlustdicke δ_2 und der Geschwindigkeit W kann einer Reynoldszahl mit

$$\frac{W \delta_2^2}{\nu} \implies Re_{\delta_2} \delta_2 \quad (179)$$

definiert werden. Somit erhält man eine dimensionslose Form der Grenzschichtgleichung

$$\implies 2 \frac{\tau_w \delta_2}{\eta W} = \frac{d}{dx} (\delta_2 Re_{\delta_2}) + (3 + 2 H_{12}) Po. \quad (180)$$

Po ist der Pohlhausen-Parameter und ist ein dimensionsloses Maß für die Beschleunigung des Fluids in Strömungsrichtung – Eine Definition dieses Parameters findet sich ebenfalls im Anhang –

$$Po = \frac{W \delta_2^2}{\nu} \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} = Re_{\delta_2}^2 \underbrace{\frac{\nu}{W} \frac{dW^2}{dx}}_{=AC} \quad (181)$$

$$\text{mit} \quad (182)$$

$$AC = -\frac{\eta}{W} \frac{dp}{dx} \quad (183)$$

als Beschleunigungsparameter. Mit Hilfe der definierten Größen lassen sich allgemeingültige Kennfelder für Grenzschichten erstellen.

4 Vereinfachte Formen der Navier-Stokes Gleichungen

4.1 Isotherme Strömung

Die Impulsbilanz für ein Newton'sches Fluid in allgemeingültiger Form sind die Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p + \nabla (\lambda^* \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot 2 \eta \vec{E} \quad (184)$$

bzw.

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right) \quad (185)$$

mit \vec{E} als Deformationsgeschwindigkeits-Tensor. Für isotherme Strömungen gilt λ^* , $\nu = \text{const}$ und vereinfacht Gleichung (185) zu

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda^* \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (186)$$

Umbenennung der stummen Indizes ($k \rightarrow j$) und geänderte Reihenfolge der Differentiation ergibt:

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda^* + \eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (187)$$

Nach der Stokes-Hypothese (114), die nur bei rein translatorischen Bewegungen der Moleküle und daher streng genommen nur für ein-atomige Gase gilt, für mehratomige Gase und Flüssigkeiten aber eine gute Näherung darstellt, ist

$$\lambda^* = -\frac{2}{3} \eta \quad (188)$$

und damit

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (189)$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (190)$$

4.2 Isotherme und inkompressible Strömung

Wird zusätzlich die Annahme der Inkompressibilität getroffen, prinzipiell gültig wenn die Machzahl kleiner als 0.3 ist, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (56)

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \iff \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{u} = 0 \iff \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (191)$$

und die Navier-Stokes Gleichungen vereinfachen sich

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda^* + \eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)}_{=0, \text{ inkomp.}} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}}_{=0, \text{ inkomp.}} \quad (192)$$

Die Impulsbilanz für inkompressible, isotherme Strömungen ist somit

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (193)$$

bzw. in symbolischer Schreibweise

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (194)$$

4.3 Rotationsfreie Strömung

Für den Ausdruck $\nabla^2 \vec{u}$ kann auch geschrieben werden

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{u})}_{=0, \text{ inkompressibel}} - \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \vec{u})}_{2 \vec{\omega}}, \quad (195)$$

so dass für inkompressible Strömungen gilt

$$\nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (196)$$

Das Vektorprodukt aus Nabla-Operator und Geschwindigkeitsvektor ist die doppelte Winkelgeschwindigkeit ω der einzelnen materiellen Teilchen

$$\nabla \times \vec{u} = 2 \vec{\omega} \quad (197)$$

$$\omega = 2 \pi f \quad (198)$$

Somit kann für inkompressible Strömungen die Impulsbilanz umgeformt werden

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{k} - \nabla p - \eta \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (199)$$

$$= \rho \vec{k} - \nabla p - 2 \eta \nabla \times \vec{\omega} \quad (200)$$

Dieses bedeutet, dass bei inkompressibler Strömung der Reibungsterm verschwindet, wenn die Rotation der Geschwindigkeit gleich null ist, d.h. wenn die Teilchen keine Drehbewegung durchführen.

Die resultierende Gleichung für eine inkompressible, isotherme und rotationsfreie Strömung ist

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (201)$$

und wird als *Euler-Gleichung* bezeichnet. Für die Potentialströmung gilt:

- $\nabla \times \vec{u} = 0$ Rotationsfrei
- $k_i = \nabla \psi$ Körperkraft hat Potential
- $k_i = -g x_i$ Schwerkraft

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = \rho \nabla \psi - \nabla p + \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \end{array} \right]}_{=0} \quad (202)$$

Ist das Geschwindigkeitsfeld rotationsfrei, so ist es sinnvoll, für die Geschwindigkeit ein Potential einzuführen (S. 20 Spurk)

$$\vec{u} = \nabla \phi \text{ bzw. } u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (203)$$

Werden die Potentiale für Geschwindigkeit und Körperkraft in die Eulergleichung (202) eingesetzt, führt dies auf

$$\rho \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \phi = \rho \nabla \psi - \nabla p \longrightarrow \text{Daher der Name Potentialströmung} \quad (204)$$

4.4 Euler- und Bernoullische Gleichung

Die Eulergleichung kann auf zwei Wegen hergeleitet werden.

1. inkompressibel plus rotations-frei (sogenannte Potentialströmung, siehe Kap. 4.3)
2. reibungsfrei, aber durchaus kompressibel (z.B. Hochgeschwindigkeits-Strömungen). In diesem Fall können die Reibungsterme vernachlässigt werden (Re-Zahl $Re \rightarrow \infty$, siehe dimensionslose Form), so dass die letzten beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (187) entfallen.

Die Bernoullische Gleichung ist ein *erstes Integral* der Eulerschen Gleichung. Zur Herleitung müssen die Annahmen getroffen werden, dass

1. die Körperkraft ein Potential $\vec{k} = -\nabla \psi$, z.B. $\psi = -g_i x_i$, $\psi = -g x_3$ habe
2. und die Strömung als reibungsfrei angesehen werden kann.

Zunächst wird die Eulersche Gleichung mit u_i multipliziert, also das Innenprodukt (Skalarprodukt) mit \vec{u} gebildet

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (205)$$

Nach Umformung des zweiten Terms der linken Seite und der Umbenennung der stummen Indizes ergibt sich

$$u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{u_i u_i}{2} \right] = -\frac{1}{\rho} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (206)$$

Diese Gleichung könnte entlang jeder glatten Kurve integriert werden. Bei der Integration entlang einer Stromröhre ergibt sich aber ein besonderes Ergebnis.

Die Definition einer Stromlinie folgt mit $|\vec{u}| = u$

$$u_j = u \frac{dx_j}{ds} \quad (207)$$

für die Differentiation

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_j} = u \frac{dx_j}{ds} \frac{\partial}{\partial x_j} = u \frac{d}{ds}. \quad (208)$$

Somit kann für Gleichung (206) mit $u_j \partial u_j / \partial t = u \partial u / \partial t$ entlang Stromlinie mit

$$\frac{du}{dt} + \frac{d}{ds} \left[\frac{u^2}{2} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - \frac{d\psi}{ds} \quad (209)$$

eine allgemeine Form der Bernoulli-Gleichung erhalten werden. Wird eine Integration entlang des Stromfadens (ds) durchgeführt, ergibt sich aus Gleichung (209) mit

$$\int \frac{du}{dt} ds + \frac{u^2}{2} = - \int \frac{1}{\rho} dp - \int d\psi \quad (210)$$

eine andere allgemeine Form der Bernoulli-Gleichung. Für das Potential der Körperkraft wird die Gravitation angesetzt

$$\psi = -g x_i \quad (211)$$

Der Druckterm kann in Abhängigkeit von den Voraussetzungen unterschiedlich beschrieben werden

$\int 1/\rho \, dp$ inkompressibel, $\rho = \text{const.}$

$$\int 1/\rho \, dp = \Delta p / \rho$$

isotherm, ideales Gas, $\rho = p/RT$

$$\int 1/\rho \, dp = \int RT/p \, dp = RT \int 1/p \, dp = RT \Delta \ln p$$

homentrop (örtlich gleiche Entropie), $\rho = \rho(p, s) = \rho(p)$

$$\int 1/\rho \, dp = \int 1/\rho(p) \, dp$$

Typische Fälle:

1. Gewicht (Schwerkraft) als Massenkraft und inkompressibel

$$\rho \int \frac{\partial u}{\partial t} \, ds + \rho \frac{u^2}{2} + p + \rho g x_3 = \text{const.} \quad (212)$$

z.B. Flüssigkeitsströmungen (Hydraulik)

2. Kompressibel, Massenkraft $\rightarrow 0$, entlang eines Stromfadens (d s)

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} \, ds + \frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} \, dp = \text{const.} \quad (213)$$

$\rho = \rho(p)$ z.B. Gasdynamik

4.5 Kriechende Strömung eines inkompressiblen Fluids

Ausgehend von den inkompressiblen, isothermen Navier-Stokes-Gleichungen unter Vernachlässigung der Volumenkräfte

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (214)$$

kann mittels der Parameter

$$\vec{u} = U \vec{u}^*, \quad \vec{x} = L \vec{x}^*, \quad t = \frac{L^2}{\nu} t^* \quad (215)$$

die dimensionslose Form

$$\frac{\nu U}{L^2} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\frac{\nu U}{L^2} \nabla^* p^* + \frac{\nu U}{L^2} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad \left| \cdot \frac{L^2}{\nu U} \right. \quad (216)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + Re (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (217)$$

gewonnen werden. Es ist nun ersichtlich, dass für $Re \ll 1$, der Bedingung für kriechende Strömungen, der Einfluss des konvektiven Beschleunigungsterms so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann.

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{=0} \right] = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)}_{=0, \text{ wenn inkompressibel}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \right\} \quad (218)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] = \underbrace{\rho k_i}_{=0} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \right\} \quad (219)$$

Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass bei kriechenden Strömungen die Körperkräfte und die Druckkräfte im Gleichgewicht mit den Reibungskräften stehen.

Für inkompressible und stationäre Strömungen wird daraus:

$$\rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\} = 0 \quad \left| \vec{e}_j \right. \quad (220)$$

oder

$$\nabla \cdot (\eta \nabla \vec{u}) - \nabla p + \rho \vec{k} = 0 \quad (221)$$

Wird die Massenkraft vernachlässigt, so folgt die *Stokes'sche Gleichung*:

$$\nabla \cdot (\eta \nabla \vec{u}) = \nabla p \quad (222)$$

Bei konstanter Viskosität kann für Gleichung (222) geschrieben werden

$$\eta \nabla^2 \vec{u} - \nabla p = 0 \quad (223)$$

Diese Gleichung wird in der Tribologie (Theorie der Gleitlager) verwendet.

4.6 Strömung in porösen Medien

Isotherme Strömungen durch Poröse Medien gehorchen den gleichen Grundgleichungen wie bisher besprochen: Navier-Stokes-Gleichungen, Haftbedingung, Kontinuitätsgleichung. Da die Geometrie poröser Medien aber meist unregelmäßig, komplex und schwer beschreibbar ist, eignet sich eine solche Strömung nicht für die Berechnung mit o.g. Ansätzen.

Für langsame Strömungen (Stokes-Strömung) beobachtete Darcy (1856) die Proportionalität (Siehe Bear [11])

$$\Delta p \propto v, \quad (224)$$

wobei v die Volumen-gemittelte Geschwindigkeit in porösen Medien ist.

Verallgemeinert gilt (Bird, Stewart, Lightfoot [4])

1. Kontinuität

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (225)$$

2. Darcy

$$\vec{v} = -\frac{K}{\eta} (\nabla p - \rho \vec{g}) \quad (226)$$

wobei ϵ die gemessene Porosität und K [m²] die empirisch ermittelte Permeabilität ist.

Für höhere Geschwindigkeiten in porösen Medien wird die empirische Erweiterung der Darcy-Gleichung von Brinkmann (Bird, Stewart, Lightfoot [4], Kap. 4) empfohlen:

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K} \vec{v} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (227)$$

5 Ähnlichkeitsparameter und Dimensionsanalyse

5.1 Grenzschichtähnlichkeit

Die bisher hauptsächlich verwendeten Ähnlichkeitsparameter Reynolds- und Strouhalzahl wurden durch Normalisierung der Variablen in den Differentialgleichungen gewonnen. Im folgenden wenden wir die gleiche Vorgehensweise an, um die Analogie von Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung in den Grenzschichten zu zeigen.

1. Annahme: $\eta, \rho = \text{const}$

Damit lauten die zutreffenden Differentialgleichungen:

Impulsbilanz

$$\rho \frac{D \vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (228)$$

Stoffgesetz = Newton'sches Fluid:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* e_{kk} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (229)$$

Stokes'sche Hypothese:

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\eta \quad (230)$$

Energiegleichung

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (231)$$

Stoffgesetz = Fourier'sche Wärmeleitung:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (232)$$

Die Differentialgleichungen für die Hauptkomponente (x -Richtung) einer zweidimensionalen Grenzschicht lauten dann.

Impuls:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (233)$$

Energie:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} &= -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &+ \eta \Phi + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (234)$$

mit der Dissipationsfunktion:

$$\eta \Phi = \eta \left[\underbrace{\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^2}_* + 2 \underbrace{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]}_{**} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (235)$$

* Viskose Reibungsbehaftete Dissipation durch Scherspannungen

** Viskose Dissipation durch Normalspannungen,

wird bei inkompressibler Strömung zu Null

dissipative Wärmeerzeugung durch Scherung:

$$h = e + p v, \quad \text{mit } v = \frac{1}{\rho} \quad (236)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &+ u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Phi \end{aligned} \quad (237)$$

2. Annahme: ideales Gas oder inkompressibel

3. Annahme: konstante spezifische Wärme

$$d h = d e + p d v + v d p \rightarrow c_p d T = c_v d T + p d v + v d p, \quad \text{mit } v = \frac{1}{\rho} \quad (238)$$

Grenzschichtgleichung für Impuls

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (239)$$

Grenzschichtgleichung für Energie:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \eta \Phi \quad (240)$$

Grenzschichtgleichung für Stofftransport (Spezies / Konzentration)

$$u \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right) \quad (241)$$

ρ_A : partielle Dichte oder c_A : molare Konzentration

Stoffgesetz: Das 1. Fick'sche Gesetz beschreibt die Ausbreitung einer Spezies A für niedrige Konzentration von A

$$\dot{m}_{A,i}'' = -D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial x_i} \quad (242)$$

bzw.

$$\dot{n}_{A,i}'' = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x_i} \quad (243)$$

$\dot{m}_{A,i}''$: Flächenbezogener Massenstrom der Spezies A , $\dot{n}_{A,i}''$: Flussdichte an Molen der Spezies A

Analogie der Differentialgleichungen

Grenzschicht Näherungen :

$$u \gg v \implies \frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} \quad (244)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x} \quad (245)$$

analog zum Impuls:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\eta}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (246)$$

- konvektiver Transport der Temperatur: $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$
- Wärmeleitung normal zur Oberfläche: $\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$
- Dissipation (Reibungswärme): $\frac{\eta}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$
- Vereinfachung von Φ : $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$

Normalisieren der Bilanzen für Impuls, Thermische Energie und Konzentration:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U}, \quad T^* = \frac{T - T_N}{T_H - T_N}, \quad \rho_A^* = \frac{\rho_A - \rho_{A,W}}{\rho_{A,\infty} - \rho_{A,W}} \quad (247)$$

Ziel der Normalisierung: Die dimensionslosen Größen \vec{u}^* , T^* , ρ_A^* haben maximal den Wert 1.

Impuls:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\nu}{U L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (248)$$

$\implies Re - \text{Zahl} : Re = \frac{uL}{\nu}$

Thermische Energie:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\lambda}{\rho c_p U L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \underbrace{\frac{\nu}{c_p} \frac{U^2}{L^2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2}_{\Phi^*, \text{ inkompressibel}} \quad (249)$$

$$\frac{\lambda}{\rho c_p U L} \frac{\nu}{\nu} = \frac{\nu}{U L} \frac{\lambda \rho}{\rho c_p \eta} = Re^{-1} Pr^{-1} \quad (250)$$

⇒ Prandtl-Zahl:

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} \left(= \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} \right) \quad (251)$$

Konzentration:

$$u^* \frac{\partial c_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial c_A^*}{\partial y^*} = - \frac{D_{AB}}{U L} \frac{\partial^2 c_A^*}{\partial y^{*2}} \quad (252)$$

$$\frac{D_{AB}}{U L} \frac{\nu}{\nu} = \frac{D_{AB}}{\nu} \frac{1}{Re} = \frac{1}{Sc} \frac{1}{Re} \quad (253)$$

⇒ Schmidt-Zahl :

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} \quad (254)$$

Die Ähnlichkeit beschränkt sich nicht nur auf Differentialgleichungen. Auch die Randbedingungen müssen ähnlich sein.

Randbedingungen:

Impuls:

$$\tau_w = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad | : p_{\text{Dyn}} \quad (255)$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U^2} = \frac{2}{Re_L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (256)$$

Energie:

$$\alpha = - \frac{\lambda_f}{L} \underbrace{\left(\frac{T_\infty - T_w}{T_w - T_\infty} \right)}_{=-1} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (257)$$

α : Wärmeübertragungskoeffizient

$$\frac{\alpha L}{\lambda_f} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (258)$$

Nusselt-Zahl:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda_f} \quad (259)$$

Grenzschichtgleichungen für Impuls :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (260)$$

Grenzschichtgleichungen für thermische Energie :

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 + \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (261)$$

Grenzschichtgleichungen für (geringe) Konzentrationen :

$$u^* \frac{\partial c_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial c_A^*}{\partial y^*} = 0 + \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial^2 c_A^*}{\partial y^{*2}} \quad (262)$$

Beispiele:

1. Analogie von Impuls- und Wärmetransport

In manchen Fällen ist es praktikabel aus der Anwendung des Massentransport auf den Wärmetransport zu schließen. Bei einer Plattengrenzschicht wird angenommen, dass von der Außenströmung kein Druckgradient aufgeprägt wird.

$$\implies \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \propto \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (263)$$

$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \Rightarrow$ z.B. Wandschubspannung

Es ist häufig einfacher die Temperatur zu messen um auf Wandschubspannung zu schließen (Heißfilm).

2. Analogie von Wärme- und Stofftransport

Problem : Messen des Wärmeübergangskoeffizienten an einer Gasturbinen-Schaufel

Anwendung der Grenzschichtanalogie : Die Schaufel wird mit Naphtalin beschichtet und der Massentransport an der Oberfläche ermittelt. Aus dem Massentransport kann auf Wärmetransport geschlossen werden.

5.2 Dimensionsanalyse

Grundidee:

Unabhängigkeit der physikalischen Gesetze vom gewählten Einheitensystem. Es werden nur die Einheiten der betrachteten Größen verwendet.

Grundlage:

Darstellung physikalischer Größen durch das Produkt Zahl·Maßeinheit im Einheitensystem mit p Grundeinheiten (z.B. Mechanik [kg], [m], [s] $\rightarrow p = 3$), aus denen alle übrigen Einheiten abgeleitet werden können (z.B. Kraft [N]=[kg m/s²]). Alle Einheiten lassen sich als Potenzprodukt der Grundeinheiten darstellen ([N] = [kg]¹[m]¹[s]⁻²).

Vorgehensweise:

1. Bestimmung der für das betrachtete Problem maßgeblichen physikalischen Parameter durch Intuition (auch ohne Kenntnis der Differentialgleichung)
2. Ermittlung möglicher dimensionsloser Parameter durch Potenzansätze

Schema:

1. Größe Q_N , die in unbekannter Weise von $N - 1$ Größen Q_1, \dots, Q_{N-1} abhängt

$$Q_N = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}), \quad (264)$$

bzw.

$$F(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) = 0, \quad (265)$$

sowie ein Maßsystem mit p Grundeinheiten.

2. Auswahl von p Primärgrößen aus den Q_i (prinzipiell beliebig, jedoch so, dass alle p Grundeinheiten vertreten sind).
3. Ansetzen der verbleibenden Größen als Potenzprodukte der Primärgrößen (z.B. Q_1, Q_2, Q_3 für $p = 3$) derart, dass die Einheit der Größe mit dem Potenzprodukt der Einheiten der Primärgrößen übereinstimmt:

$$Q_4 = Q_1^{\alpha_4} \cdot Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4} \quad (266)$$

$$Q_5 = Q_1^{\alpha_5} \cdot Q_2^{\beta_5} \cdot Q_3^{\gamma_5} \quad (267)$$

\vdots

$$Q_N = Q_1^{\alpha_N} \cdot Q_2^{\beta_N} \cdot Q_3^{\gamma_N} \quad (268)$$

4. Ergebnis: $N - p$ dimensionslose Größen

$$\Pi_1 = \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} \cdot Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4}}, \quad \dots \quad \Pi_{N-p} = \frac{Q_N}{Q_1^{\alpha_N} \cdot Q_2^{\beta_N} \cdot Q_3^{\gamma_N}} \quad (269)$$

d.h. dimensionsloser Zusammenhang

$$G(\Pi_1, \dots, \Pi_{N-p}) = 0 \quad (270)$$

als Lösung des physikalischen Problems

Das Π -Theorem von Buckingham:

„Gegeben sind n Größen Q_1, \dots, Q_N und eine Relation zwischen ihnen. Dann gibt es genau $N - R$ dimensionslose Größen, wobei $R \leq M \leq N$ der Rang der Dimensionsmatrix ist. Die Beziehung $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-R})$ löst das gestellte Problem.“

6 Lösungen der Bewegungsgleichungen

6.1 Hydrostatik

Der Trivialfall der Bewegungsgleichungen beschreibt ruhende Fluide. Navier-Stokes Gleichungen:

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -p + \lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (271)$$

$$u_i \equiv 0 \quad (272)$$

$$\Rightarrow 0 = \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (-p) \quad (273)$$

$$\Leftrightarrow \rho \vec{k} = \nabla p \quad (274)$$

Körperkraft hat Potential:

$$\vec{k} = -\nabla \psi, \quad \text{mit } \psi = g \cdot z, \quad g = \text{const.} \quad (275)$$

Einsetzen des Potentials aus Gleichung (275) in die "Bewegungsgleichung" (274) ergibt:

$$\Rightarrow -\rho \nabla \psi = \nabla p \quad (276)$$

$$\Rightarrow -\rho \nabla (g z) = \nabla p \quad (277)$$

$$\Rightarrow -\vec{g} \nabla z = \frac{\nabla p}{\rho} \quad (278)$$

$$\Rightarrow -g(z_2 - z_1) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp. \quad (279)$$

6.1.1 Atmosphäre

Ein weiteres Beispiel für ruhende Fluide ist die ruhende Atmosphäre. Ein Grenzfall ist die isotherme Atmosphäre:

Isotherme Atmosphäre

Ideales Gas:

$$\rho = \frac{p}{R T}, \quad \text{mit } T = \text{const} \quad (280)$$

$$\Rightarrow -g(z_2 - z_1) = R T \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} \quad (281)$$

$$z_2 - z_1 = -\frac{R T}{g} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (282)$$

Nun gibt es keinen physikalischen Grund dafür, dass die Atmosphäre isotherm sein sollte. Dagegen ist die homentropen Atmosphäre ein sinnvoller, stabiler Grenzfall, nämlich dann wenn weder Wärmeleitung noch Reibung auftritt.

Homentropen Atmosphäre Entropie gleich: keine Reibung, keine Wärmeleitung
 \implies stabiler Grenzfall

$$\left(\frac{p_1}{p}\right) = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^\kappa \quad \text{aus } p v^\kappa = \text{const. f. Isentrope} \quad (283)$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent}$$

$$\implies \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (284)$$

$$\implies z_2 - z_1 = -\frac{1}{g \rho_1} \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp = -\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{g \rho_1} \left[p^{-\frac{1}{\kappa}+1} \right]_{p_1}^{p_2} \frac{\kappa}{\kappa-1} \quad (285)$$

$$= \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{g (p_1/RT_1)} \left[p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \frac{\kappa}{\kappa-1} \quad (286)$$

$$\implies z_2 - z_1 = -\frac{RT_1}{g} \frac{\left[p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \frac{\kappa}{\kappa-1} \quad (287)$$

$$= -\frac{RT_1}{g} \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (288)$$

$$\text{Isentrop: } \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (289)$$

$$\implies z_2 - z_1 = -\frac{R}{g} \frac{\kappa}{\kappa-1} (T_2 - T_1) \quad (290)$$

$$\longrightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{g}{R} \quad (291)$$

$$= -\frac{1,4-1}{1,4} \frac{9,81 \text{ K}}{287 \text{ m}} = -9,77 \times 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}} \approx -\frac{1 \text{ K}}{100 \text{ m}} \quad (292)$$

6.1.2 Auftrieb

$$\vec{F} = - \iint_S p \vec{n} dS \quad (293)$$

$$= - \iiint_V \nabla p dS \text{ und } \nabla p = \rho \vec{g} \quad (294)$$

$$= - \iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (295)$$

ρ ist homogen:

$$\vec{F} = -\rho \vec{g} V \quad \underline{\text{Archimedes'sches Prinzip}} \quad (296)$$

6.1.3 Freie Oberflächen

Das Gleichgewicht an der freien Oberflächen eines Tropfens ist

$$2 \pi r C \vec{m} - \iint_S (p_a - p_i) \vec{n} dS = 0. \quad (297)$$

C : Oberflächenspannung = Kraft/Länge

Annahme: Symmetrie des sphärischen Tropfens

$$2 \pi r C + (p_a - p_i) \pi r^2 = 0 \quad (298)$$

$$\implies \Delta p = p_i - p_a = \frac{2C}{r} \quad (299)$$

Die Druckdifferenz im Tröpfchen ist umgekehrt proportional zum Radius. Daraus folgt, dass sehr kleine Tröpfchen eine sehr große Druckdifferenz haben (Nebel, Tropfenschlag in Dampfturbinen-Endstufe).

6.2 1. Stokes'sches Problem

Annahme: $\eta, \rho, \nu = \text{const.}$

Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (300)$$

Es wird Stokes erstes Problem einer plötzlich in Gang gesetzte Wand betrachtet. Die ebene Platte hat eine unendlich große Ausdehnung und das umgebende Fluid ist für $t = 0$ in Ruhe

$$\implies \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (301)$$

Randbedingung für $u(y, t)$

$$u(y = 0, t \geq 0) = U \quad (302)$$

$$u(y \rightarrow \infty, t \geq 0) = 0 \quad (303)$$

Anfangsbedingung

$$u(y, t < 0) = 0 \quad (304)$$

Daraus folgt u ist proportional zu U und somit $u/U = f(y, t, \nu)$

Physikalisch haben große Zeit, hohe Zähigkeit, geringer Wandabstand gleiche Wirkung.

Daher Ansatz:

$$\eta = C \nu^m t^n \frac{1}{y^l} \quad (305)$$

\Rightarrow Funktion dimensionslos in der Form

$$\eta = C \frac{\nu t}{y^2} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\nu t}} \quad (306)$$

Die Differentialgleichung

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (307)$$

wird mit dem Ansatz $u/U = f(\eta)$ gelöst. Für die in Gleichung (307) vorkommenden Ableitungen gilt mit

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}. \quad (308)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = U f' \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\nu}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} = -U f' \frac{1}{4} \frac{y}{\sqrt{\nu t^{\frac{3}{2}}}} \quad (309)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = U f' \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \quad (310)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U f'' \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} = U f'' \frac{1}{4} \frac{1}{\nu t} \quad (311)$$

Einsetzen der Ableitungen aus Gleichung (309) und (310) in Gleichung (307) führt auf

$$\Rightarrow -U f' \frac{1}{4} \frac{y}{\sqrt{\nu t^{\frac{3}{2}}}} = \nu U f'' \frac{1}{4} \frac{1}{\nu t} \quad (312)$$

$$-f' \frac{y}{\sqrt{\nu t}} = f'' \Rightarrow -2\eta f' = f'' \quad (313)$$

$$-2\eta = \frac{f''}{f'} \Rightarrow \frac{d}{d\eta}(\ln f') = -2\eta \quad (314)$$

weil

$$\frac{d}{d\eta}(\ln f') = f'' \frac{1}{f'} \quad (315)$$

Integration:

$$\implies \ln f' = -\eta^2 - \ln A \quad (316)$$

$$\ln f' + \ln A = -\eta^2 \quad | \text{exp} \quad (317)$$

$$A f' = e^{-\eta^2} \iff f' = \frac{e^{-\eta^2}}{A} \quad (318)$$

$$f = \frac{1}{A} \int_0^\eta e^{(-\xi^2)} d\xi + B \quad (319)$$

Randbedingung 1

$$u(\underbrace{y \rightarrow 0}_{\eta \rightarrow 0}, t > 0) = 0 = U \implies \frac{u}{U} = f = f(0) = 1 \implies B = 1 \quad (320)$$

Randbedingung 2

$$u(y \rightarrow \infty, t \geq 0) = 0 \rightarrow \eta \rightarrow \infty \quad (321)$$

$$A = - \int_0^\infty e^{(-\xi^2)} d\xi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (322)$$

$$\frac{u}{U} = 1 - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{(-\xi^2)} d\xi}_{= \text{erf}(\eta) \text{ Fehlerfunktion}} \quad (323)$$

$$t \rightarrow 0 \implies \eta \rightarrow \infty \implies \frac{u}{U} \quad (324)$$

6.3 2. Stokes'sches Problem

Navier-Stokes'sche Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (325)$$

lineare Differentialgleichung; Zeitliche und örtliche Ableitungen getrennt \implies Produktansatz erlaubt.

Randbedingungen:

$$u(y = 0, t) = U \cos(\omega t) \quad (326)$$

$$u(y, t) < \infty \quad (327)$$

Lösung: periode, harmonische Bewegung in x -Richtung

Ansatz:

$$u(y, t) = \Re \left\{ \underbrace{w(y)}_{\text{Ortsfunktion}} \underbrace{\exp(i\omega t)}_{\text{Zeitfunktion}} \right\} \quad (328)$$

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung (325) führt auf

$$\Re \{ i\omega w(y) \exp(i\omega t) \} = \Re \left\{ \frac{d^2 w}{dy^2} \exp(i\omega t) \right\} \quad (329)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 w}{dy^2} - i \frac{\omega}{\nu} w = 0; \quad \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (330)$$

Lösen der der Differentialgleichung (330) mittels Exponentialfunktionen führt auf

$$w(y) = A \exp \left[-(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] + B \exp \left[+(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \quad (331)$$

$B = 0$, weil für $u < \infty$ $w < \infty$ gelten muss

$$u(y, t) = \Re \left\{ A \exp \left[-(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \exp(+i\omega t) \right\} \quad (332)$$

$$= \Re \left\{ A \exp \left[\sqrt{-\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \exp \left[+i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \right] \right\} \quad (333)$$

$$= A \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \quad (334)$$

Aus der Randbedingung

$$u(y=0, t) = U \cos(\omega t) \quad (335)$$

folgt für die Konstante

$$A = U \quad (336)$$

und aus Gleichung (334) wird

$$\frac{u(y, t)}{U} = \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \quad (337)$$

In dieser Gleichung ist die Exponentialfunktion eine Amplitude und nur eine Funktion des Ortes y . Die Kosinusfunktion gibt die Phasenlage wieder und für den Term gilt ≤ 1 .

Für

$$\frac{1}{e^4} = 0,018 < 2\% \quad (338)$$

Wenn $u/U < 2\%$, dann wird die Oszillation als gering bezeichnet.

Grenzfall:

$$\exp(-4) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\delta\right) \quad \left| \ln \right. \quad (339)$$

$$\Rightarrow \delta = 4\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (340)$$

$$(341)$$

Die Länge δ bezeichnet die Eindringtiefe der Oszillation der Wand in das Fluid.

Beispiel: Medium: Luft, $f=50$ Hz (Netzfrequenz)

$$\delta = 4\sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 50}} \text{ m} \quad (342)$$

$$= 4\sqrt{10 \cdot 10^{-8}} \text{ m} \quad (343)$$

$$= 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (344)$$

6.4 Oszillierende Strömung zwischen Platten

Randbedingungen:

$$u(a, t) = u(-a, t) = 0 \quad (345)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = P_x \cos \omega t \quad (346)$$

$$= \Re \{P_x \exp(i \omega t)\} \quad (347)$$

Die Annahmen

- voll entwickelte Kanalströmung
- inkompressibel

führen auf die (lineare) Differentialgleichung

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (348)$$

Pulsierende Strömung:

$$u = \text{const} + u'(y, t) \quad (349)$$

Ansatz:

$$u(y, t) = \Re \{w(y) \exp(i\omega t)\} \quad (350)$$

und damit auf die Differentialgleichung

$$\Re \{i\omega w \exp(i\omega t)\} = -\frac{1}{\rho} \Re \{P_x \cos(\omega t)\} + \nu \Re \left\{ \frac{d^2 w}{dy^2} \exp(i\omega t) \right\} \quad (351)$$

Die Differentialgleichung für w ist

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} w = \frac{P_x}{\rho \nu} \quad (352)$$

$$w(y) = i \frac{P_x}{\rho \omega} + A \cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] + B \sinh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \quad (353)$$

mit

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (354)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$u(a, t) = 0 = i \frac{P_x}{\rho \omega} + A \cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right] + B \sinh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right] \quad (355)$$

$$u(-a, t) = 0 = i \frac{P_x}{\rho \omega} + A \cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right] - B \sinh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right] \quad (356)$$

und es ergeben sich die Konstanten A und B zu

$$A = \frac{P_x}{\rho \omega \cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right]}; \quad B = 0 \quad (357)$$

Eingesetzt in Gleichung (353) folgt

$$w(y) = i \frac{P_x}{\rho \omega} \left[1 - \frac{\cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right]}{\cosh \left[(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right]} \right] \quad (358)$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist

$$u(y, t) = \Re \{w(y) \exp(i\omega t)\} \quad (359)$$

7 Turbulente Strömungen

7.1 Grundlagen

Die meisten technisch relevanten Strömungen sind turbulent. Im Gegensatz zu laminaren Strömungen bewegen sich die Fluidteilchen nicht mehr definiert auf Bahnen sondern schwanken regellos um eine "mittlere" Bahn.

Aufgrund der zeitlichen Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit ist diese dann nicht nur vom Ort, sondern auch von der Zeit t abhängig. Weiterhin sind die zeitlichen Schwankungen zufällig.

Zufällige Vorgänge lassen sich in stationäre und instationäre Prozesse unterteilen. Ein Vorgang heißt schwach stationär, wenn der Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion unabhängig von t sind. Der Mittelwert wird aus unendlich vielen Daten gebildet. Stationäre Vorgänge heißen ergodisch, wenn der zeitliche Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion für unterschiedliche Datenreihen, die dasselbe physikalische Problem beschreiben, gleich sind.

Eine einzige Datenreihe wird aber auch als stationär bezeichnet, wenn die über kurze Zeitintervalle berechneten Größen keine signifikanten Unterschiede aufweisen. Signifikant bedeutet, dass die Unterschiede größer als erwartete statistische Änderungen sind. In diesem Fall ist der Vorgang dann instationär. In Abbildung 1 ist in Form eines Histogramms eine typische turbulente Geschwindigkeitsverteilung an einem Ort dargestellt. Für stationäre Strömungen wird die Geschwindigkeit u_i in turbulenten Strömungen mit Hilfe der mittleren Geschwindigkeit \bar{u}_i und der Schwankungsgröße u'_i mit dem formalen Zusammenhang

$$\bar{u}_i(x_j, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i(x_j, t) dt \quad (360)$$

$$u_i(x_j, t) = \bar{u}_i(x_j) + u'_i(x_j, t) \quad \text{Reynolds - Zerlegung} \quad (361)$$

beschrieben. In der Literatur findet sich auch die Zerlegung

$$u_i(x_j, t) = \bar{u}_i(x_j) + u'_{i,RMS}(x_j, t), \quad (362)$$

wobei $u'_{i,RMS}(x, t)$ die mittlere Schwankungsgröße (siehe Gleichung (365)) ist. In dem Histogramm in Abb. 1 sind die mittlere Geschwindigkeit \bar{u}_i und die Standardabweichung $u'_{i,RMS}$ eingetragen. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Breite der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung und gibt die mittlere Abweichung vom Mittelwert an.

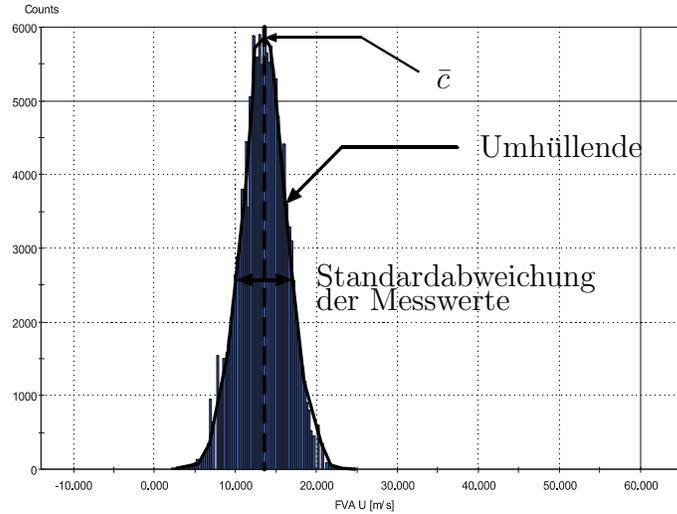


Abb. 1: Darstellung einer Geschwindigkeitsverteilung in einem Histogramm

Die mittlere Geschwindigkeit wird aus den einzelnen pro Messung aufgenommenen Messwerten mit der Gleichung

$$\bar{u}_i(x_j) = \sum_{m=0}^{N-1} u_{m,i} \quad (363)$$

mit der Anzahl der Messwerten N . Der Mittelwert nach Gl. (363) wird in der Statistik als 1. Moment bezeichnet. Die mittlere Schwankungsgröße $u'_{i,\text{RMS}}(x_j, t)$ — häufig auch als RMS-Wert (Root Mean Square) oder Standardabweichung bezeichnet — wird mit der Varianz σ^2

$$\sigma_{i,u}^2 = \sum_{m=0}^{N-1} (u_{m,i}(x_j, t) - \bar{u}_i(x_j))^2 \quad (364)$$

und der Gleichung

$$u'_{i,\text{RMS}}(x_j, t) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{m=0}^{N-1} (u_{m,i}(x_j, t) - \bar{u}_i)^2} \quad (365)$$

berechnet und stellt ein Maß für die mittlere Schwankungsgeschwindigkeit der Strömung dar. Die Varianz heißt in der Statistik auch 2. Moment.

Die Schwankungen turbulenter Strömungen beschreibt anschaulich der Turbulenzgrad Tu (engl. turbulence intensity). Er stellt ein Maß für die Stärke der Turbulenz

in den betrachteten Richtungen dar. Turbulenz ist immer dreidimensional. Es sind jedoch auch eindimensionale und zweidimensionale Betrachtungen des Turbulenzgrades möglich. Die 3-dimensionale Betrachtung des Turbulenzgrades in Strömungsrichtung ist

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (u'_{1,\text{RMS}}{}^2 + u'_{2,\text{RMS}}{}^2 + u'_{3,\text{RMS}}{}^2)}}{\sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}} 100\%. \quad (366)$$

Eine 2-dimensionale Betrachtung des Turbulenzgrades ist

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} (u'_{1,\text{RMS}}{}^2 + u'_{2,\text{RMS}}{}^2)}}{\sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2}} 100\% \quad (367)$$

Neben der Betrachtung in Strömungsrichtung ist eine Berechnung des Turbulenzgrades in Richtung der einzelnen Koordinaten möglich. Eine 2-dimensionale Betrachtung des Turbulenzgrades in axialer Richtung ist

$$Tu_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} (u'_{1,\text{RMS}}{}^2 + u'_{2,\text{RMS}}{}^2)}}{\bar{u}_1} 100\% \quad (368)$$

Für den Fall der isotropen Turbulenz sind die mittleren Schwankungsgrößen in allen Koordinatenrichtungen gleich groß. In diesem Fall ist eine eindimensionale Betrachtung des Turbulenzgrades ausreichend. Die 1-dimensionale Betrachtung

$$Tu = \frac{u'_{1,\text{RMS}}}{\bar{u}} 100\% \quad (369)$$

wird als Turbulenzintensität bezeichnet.

Es gibt noch zwei weitere statistische Größen, die die Form des Histogramms beschreiben, nämlich Skewness (Schiefe) und Flatness (Exzess) .

Die Skewness S berechnet sich mit

$$S_i = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{m=0}^{N-1} (u_{m,i}(x_j, t) - \bar{u}_i(x_j))^3 \quad (370)$$

und wird auch als 3. Moment bezeichnet. Mit S wird die Symmetrie der Geschwindigkeitsverteilung beschrieben. Für $S = 0$ ist die Verteilung symmetrisch um $\bar{u}_i(x)$ und mit wachsender Asymmetrie nimmt S zu. Liegt der Peak (engl. für Spitze, d.h. das Maximum) der Verteilung auf der linken Seite von $\bar{u}_i(x)$, so ist S positiv und liegt der Peak der Verteilung rechts von $\bar{u}_i(x)$, so ist S negativ.

Die Flatness oder Kurtosis F wird mit

$$F_i = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{m=0}^{N-1} (u_{m,i}(x_j, t) - \bar{u}_i(x_j))^4 \quad (371)$$

berechnet und heißt auch 4. Moment. Mit F wird die Form des Peaks der Geschwindigkeitsverteilung beschrieben. Für große Werte von F ist der Peak schmal und somit besonders ausgeprägt, während für kleine Werte von F der Peak nicht ausgeprägt ist.

Um die Turbulenz einer Strömung zu beschreiben, werden im Allgemeinen die Turbulenzintensität Tu zur Beschreibung der Stärke der Turbulenz und die integrale turbulente Längenskala l_t zur Beschreibung der räumlichen Größe der Turbulenz verwendet. Die integrale turbulente Längenskala (Gleichung (415)) wird häufig auch "Mittlere Wirbelgröße" genannt.

7.2 Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Um die Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -p + \lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (372)$$

auf turbulenten Strömungen anzuwenden macht man gewöhnlich folgende Annahmen:

1. inkompressible Turbulenz $\rho = \text{const.}$
2. im Mittel stationäre Strömung
3. Reynolds-Zerlegung der Strömungsgrößen in Mittelwert und Schwankungsgröße

$$u = \bar{u} + u', \quad p = \bar{p} + p' \quad (373)$$

Rechenregeln zur Mittelwertbildung:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (374)$$

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad (375)$$

$$\overline{f'} = 0 \quad (376)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \quad (377)$$

$$\overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{\bar{f}} \cdot \bar{g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad (378)$$

$$\overline{f \cdot g} = \overline{(\bar{f} + f') \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{\bar{f}} \cdot \bar{\bar{g}} + \overline{\bar{f} \cdot g'} + \overline{f' \cdot \bar{g}} + \overline{f' \cdot g'} \quad (379)$$

$$= \bar{f} \cdot \bar{g} + \underbrace{\overline{\bar{f} \cdot g'} + \overline{f' \cdot \bar{g}}}_{=0, \text{ wg. Gl.(376)}} + \overline{f' \cdot g'} \quad (380)$$

$$= \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} \quad (381)$$

Mittelung der Kontinuitätsgleichung (inkompressibel):

$$\overline{\nabla \cdot u} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \quad (382)$$

$$= \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z}} \quad (383)$$

$$= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}'}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial \bar{w}'}{\partial z}}_{=0} \quad (384)$$

$$= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (385)$$

Umformen der substantiellen Ableitung:

$$\frac{D u}{D t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (386)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} - u \left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}_{=0, \text{ wg. Konti.}} \right] \quad (387)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} + \frac{\partial u w}{\partial z} \quad (388)$$

Mittelung der substantiellen Ableitung

$$\overline{\frac{D u}{D t}} = \overline{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} + \frac{\partial u w}{\partial z}} \quad (389)$$

$$= \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')}{\partial z}} \quad (390)$$

$$= \frac{\partial \bar{u} + \bar{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \quad (391)$$

$$= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \quad (392)$$

$$= \frac{D \bar{u}}{D t} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \quad (393)$$

mit

$$\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} = 2 \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (394)$$

$$= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{u} \left[\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}}_{=0, \text{ wg. Konti.}} \right] \quad (395)$$

x -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung (isotherm, inkompressibel)

$$\rho \frac{D u}{D t} = -\nabla p + \eta \Delta u \quad (396)$$

Mittelung der N.-S.

$$\rho \frac{\overline{D u}}{\overline{D t}} = -\overline{\nabla p} + \eta \overline{\Delta u} \quad (397)$$

$$\rho \left[\frac{D \bar{u}}{D t} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} \right] = -\nabla(\bar{p} + \overline{p'}) + \eta \Delta(\bar{u} + \overline{u'}) \quad (398)$$

$$\rho \left[\frac{D \bar{u}}{D t} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} \right] = -\nabla(\bar{p} + \underbrace{\overline{p'}}_{=0}) + \eta \Delta(\bar{u} + \underbrace{\overline{u'}}_{=0}) \quad (399)$$

$$\rho \left[\frac{D \bar{u}}{D t} + \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} \right] = -\nabla \bar{p} + \eta \Delta \bar{u} \quad (400)$$

Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS) Gleichungen:

$$\rho \frac{D \bar{u}}{D t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[\frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} \right] \quad (401)$$

$$\rho \frac{D \bar{v}}{D t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \eta \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[\frac{\partial \overline{v' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v' w'}}{\partial z} \right] \quad (402)$$

$$\rho \frac{D \bar{w}}{D t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[\frac{\partial \overline{w' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' w'}}{\partial z} \right] \quad (403)$$

Werden die Komponenten des Spannungstensors

$$\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (404)$$

$$= -\bar{p} \delta_{ij} + 2\eta \bar{e}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (\text{inkompressibel}) \quad (405)$$

z.B.

$$\tau_{xx} = -\bar{p} + 2\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u' u'} \quad (406)$$

$$\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u' v'} \quad (407)$$

in die Cauchy'schen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \rho \frac{D \vec{u}}{D t} &= \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \vec{e}_x \\ &+ \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] \vec{e}_y \\ &+ \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (408)$$

eingesetzt, so ergibt dies ebenfalls die Gleichungen (401) bis (403). Deshalb bezeichnet man die Komponenten des Spannungstensors (404) als turbulente Spannungen, wobei die Größe $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ als **turbulente Scheinspannungen** oder **Reynoldsspannungen** bezeichnet werden.

Der Spannungstensor:

(mit $\bar{u}_x = \partial \bar{u} / \partial x$ usw.)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2\bar{u}_x & \bar{u}_y + \bar{v}_x & \bar{u}_z + \bar{w}_x \\ \bar{v}_x + \bar{u}_y & 2\bar{v}_y & \bar{v}_z + \bar{w}_y \\ \bar{w}_x + \bar{u}_z & \bar{w}_y + \bar{v}_z & 2\bar{w}_z \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad (409)$$

Zusätzliche Spannungen, die nicht mit Hilfe von Gleichungen aufgelöst werden können. Neben den vier Variablen u, v, w, p sind die sechs Reynoldsspannungen ebenfalls unbekannte Variablen. Es sind aber nur vier Gleichungen (3 Komponenten der Navier-Stokesschen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung) vorhanden. - > Schließungsproblem des Gleichungssystems (Mehr Variablen als Gleichungen). Schließen des Gleichungssystems z.B. mit Hilfe halb-empirischer Turbulenzmodelle möglich.

Für den Term der Reynolds'schen Spannungen gilt: $\partial \rho \overline{u'_i u'_j} / \partial x_j$ gilt:

1. $\overline{u'_i u'_i} = \overline{(u'_i)^2} > 0$
2. $\overline{u'_i u'_j} \neq 0$

7.3 Turbulente Maße

Korrelation

$$R_{ij}(x_k, t, r_k, \tau) = \frac{\overline{u'_i(x_k, t) u'_j(x_k + r_k, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{u'_i(x_k, t)^2} \overline{u'_j(x_k + r_k, t + \tau)^2}}} \quad (410)$$

mit

- $R_{ij} \Rightarrow$ Korrelation zweier Ereignisse i und j
- $x_k \Rightarrow$ Ort
- $t \Rightarrow$ zeitlicher Abstand
- $r_k \Rightarrow$ Entfernung des zweiten Ortes (Abstand)
- $\tau \Rightarrow$ Verzugszeit

Autokorrelation:

$$\text{Autokorrelation} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \longrightarrow 0; \\ \text{oder} \\ \tau \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (411)$$

$$R_{ij} \longrightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r \longrightarrow \infty; \\ \tau \longrightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (412)$$

integrales Längenmaß \approx Durchmesser eines Turbulenzballens:

$$L(\vec{x}, t) = \int_0^{\infty} R_{11}(\vec{x}, t, r, 0) dr \quad (413)$$

integrales Zeitmaß:

$$\tau(\vec{x}, t) = \int_0^{\infty} R_{11}(\vec{x}, t, 0, \tau) d\tau \quad (414)$$

Experimentell wird die Längenskala l_t mit einer zeitgleichen Messung an zwei verschiedenen Punkten bestimmt. Ein Messpunkt ist dabei ortsfest und der zweite Messpunkt wird relativ zum ersten in Strömungsrichtung bewegt. Anschließend werden mit einer Kreuzkorrelation die Messwerte an dem ortsfesten Messpunkt mit den Messwerten des beweglichen Messpunktes verglichen. Wird die Kreuzkorrelation gleich null, d.h. die Messwerte an den beiden Raumpunkten sind sich nicht mehr ähnlich, so ist der Abstand zwischen den beiden Messpunkten die integrale turbulente Längenskala.

Die integrale turbulente Längenskala kann aber auch mit einer Messung an einem Punkt bestimmt werden.

Hierzu wird die Autokorrelationsfunktion $R(\tau)$ mit den lokalen Schwankungsgrößen gebildet, d.h. eine Messung zur Zeit $t = 0$ wird solange mit Messungen $t > 0$ verglichen, bis die Autokorrelationsfunktion gleich null ist und mit $R(0)$ normiert.

Aus der Autokorrelationsfunktion wird die turbulente Zeitskala τ bestimmt. Zur Bestimmung der integralen turbulenten Längenskala wird die turbulente Zeitskala nach

Gleichung (414) mit der mittleren Geschwindigkeit am Messpunkt multipliziert

$$l_t = \bar{u}_i \tau_t = \bar{u}_i \int_0^\infty R(\tau) d\tau. \quad (415)$$

Wirbelzerfall

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (416)$$

$$\vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (417)$$

Mit dem Wirbelzerfall nimmt die Abmessung des Wirbels ab \rightarrow Re nimmt ab \rightarrow Reibung wird dominanter \rightarrow Dissipation der kleinen Wirbel Energiekaskade: große Wirbel \rightarrow kleine Wirbel \rightarrow kleinste Wirbel \rightarrow Gleichgewicht zwischen Energiezufuhr (kin. Energie) und Dissipation

Kolmogorov'sche Gleichgewichtstheorie:

Kolmogorov's Hypothese lokaler Isotropie: Bei ausreichend hoher Reynolds-Zahl sind die turbulenten Bewegungen der kleinen Wirbel ($l \ll l_0$) statistisch isotrop.

Kolmogorov's erste Ähnlichkeits-Hypothese: In jeder turbulenten Strömung bei ausreichend hohen Reynolds-Zahlen hat die Statistik der kleinskaligen Bewegungen ($l < l_{EI}$) eine universelle Form, die nur von der Dissipationsrate (ϵ) und der kinematischen Viskosität (ν) abhängt.

Kolmogorov's zweite Ähnlichkeits-Hypothese: In jeder turbulenten Strömung bei ausreichend hohen Reynolds-Zahlen hat die Statistik der kleinskaligen Bewegungen ($l_{DI} < l < l_{EI}$) eine universelle Form, die alleine von der Dissipationsrate (ϵ) abhängt.

Die spezifische Dissipation ist

$$\epsilon \left[\frac{m^2}{s^3} \right] \quad (418)$$

$$\frac{kg \left(\frac{m}{s} \right)^2}{kg s} = \frac{m^2}{s^3} \quad (419)$$

Kolmogorov'sche Gleichgewichts-Größe sind die kleinsten Abmessungen in der Wirbelkaskade

$$KLS = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Längenskala (kleinere Wirbel dissipieren sofort)} \quad (420)$$

$$KZS = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Zeitskala} \quad (421)$$

$$KGS = (\nu, \epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Geschwindigkeitskala} \quad (422)$$

$$Re = \frac{KLS \ KGS}{\nu} = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{(\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = \frac{(\nu^4)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = 1 \quad (423)$$

7.4 Prandtl'scher Mischungsweg

Dissipation = Rate (turb. kin. Energie/Masse)

$$\epsilon \approx \frac{u'^3}{l} \quad (424)$$

$$\frac{KLS}{l} \approx \left(\frac{u' l}{\nu} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (425)$$

$$\frac{KZS}{(l/u')} \approx \left(\frac{u' l}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (426)$$

$$\frac{KGS}{u'} \approx \left(\frac{u' l}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (427)$$

$$T.I. = \frac{\sqrt{u'^2}}{\bar{u}} \quad (428)$$

$$\frac{u' \cdot l}{\nu} = \frac{\bar{u} (T.I.) l}{\nu} \quad (429)$$

$$Re_L = \frac{\bar{u} L}{\nu} \quad (430)$$

Mit zunehmender T.I. nehmen die Kolmogorov-Skalen ab.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u'_i u'_j}) + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \rho \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (431)$$

$$- \rho \overline{u' v'} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (432)$$

$$\epsilon_t = \frac{A}{\rho} \text{ Wirbelviskosität} \quad (433)$$

Die Betrachtung der turbulenten Scherspannung eines Wirbels

$$\tau_t = - \rho \overline{u' v'} = \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 l^2 \quad (434)$$

liefert den **Prandtl'schen Mischungswegansatz**, mit l als Prandtl'scher Mischungsweg.

$$\epsilon_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (435)$$

Ansatz: $l = k y$

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (436)$$

$$\tau_{mol} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (437)$$

Aus den Gleichungen (436) und (437) folgt

$$\begin{aligned} \tau &= \left[\eta + \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \right] \frac{d\bar{u}}{dy} \\ &= \left[\eta + \underbrace{\rho (k y)^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}_{\text{Turbulente Viskosität}} \right] \frac{d\bar{u}}{dy} \end{aligned} \quad (438)$$

$$\rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (439)$$

Schergeschwindigkeit :

$$u_\tau = k y \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (440)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y + c \quad (441)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \frac{\ln y u_\tau}{\nu} + B \quad (442)$$

$$c = B + \frac{1}{k} \ln \frac{u_\tau}{\nu} \quad (443)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B \quad (444)$$

$$u^+ = y^+ \quad (445)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B \quad (446)$$

$0 < y^+ < 5$ molekularer Transport dominiert

$5 < y^+ < 30$ Übergangsbereich

$y^+ < 30$ turbulenter Transport dominiert

8 Materialgesetze

Dissipation \implies Energiegleichung

1. Hauptsatz.

$$\frac{D}{Dt}(K + E) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (447)$$

- $K \rightarrow$ Kin. Energie
- $E \rightarrow$ innere Energie
- $\dot{W} \rightarrow$ Arbeit
- $\dot{Q} \rightarrow$ Wärme

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_V \left(\underbrace{\frac{u_i u_i}{2}}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{e}_{\text{innere Energie}} \right) \rho dV \\ = \underbrace{\iiint_V u_i k_i \rho dV}_{\text{Volumenzufuhr von Arbeit}} + \underbrace{\iint_S u_i t_i dS}_{\text{Oberflächenzufuhr von Arbeit}} - \underbrace{\iint_S q_i n_i dS}_{\text{Wärme über Oberfläche}} \end{aligned} \quad (448)$$

Spannungstensor + Gauß'scher Satz + $Dm/Dt = 0$

$$\iiint_V \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{u_i u_i}{2} + e \right] - \rho k_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} u_i) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right\} dV = 0 \quad (449)$$

Integrand stetig und Volumen beliebig

$$\rho u_i \frac{D u_i}{Dt} + \rho \frac{D e}{Dt} = \rho k_i u_i + u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (450)$$

Definition : $h = e + \frac{p}{\rho}$ (= $u + pv$ Themodyn.)

Impulssatz:

$$\rho \frac{D u_i}{Dt} = \rho k_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (451)$$

$$\implies \rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{u_i u_i}{2} + h \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho k_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ji} u_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (452)$$

mit

$$\tau_{ji} = -p \delta_{ji} + P_{ij} \quad (453)$$

$$\frac{D e}{D t} = \frac{\tau_{ji}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (454)$$

Die Änderung der innere Energie steht im Zusammenhang mit Schubspannungen und Wärmeströmen.

$$d e = \delta w + \delta q \quad (455)$$

$$\frac{D e}{D t} = \delta \dot{w} + \delta \dot{q} \quad (456)$$

$$\delta \dot{w} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} P_{ij} e_{ij} \quad (457)$$

$\delta \dot{w}$ ist die Deformationsarbeit pro Zeit und Masse

- $-\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Rightarrow$ Durch Druck ausgeübte Arbeit
- $\frac{1}{\rho} P_{ij} e_{ij} \Rightarrow$ Reibleistung

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (458)$$

Reversibler Teil:

$$-\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D \rho}{D t} = -p \frac{D v}{D t} \quad (459)$$

Irreversibler Teil:

$$\frac{1}{\rho} P_{ij} e_{ij} = \frac{1}{\rho} \Phi \quad (460)$$

Deformationsarbeit, (einschl. irreversiblen Teil) pro Zeit und Volumen

$$\Rightarrow \delta \dot{w} = -p \frac{D v}{D t} + \frac{\Phi}{\rho} \quad (461)$$

- Φ : Dissipationsfunktion

Bilanzsätze

1. Kontinuität

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (462)$$

2. Impuls

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho k_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (463)$$

3. Drehimpuls

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (464)$$

4. Energie

$$\rho \frac{D e}{D t} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (465)$$

Materialeigenschaften

1. Abhängigkeit

$$\rho = \rho(p, T) \quad (466)$$

2. Abhängigkeit

$$\tau_{ij} \quad (467)$$

3. Abhängigkeit

$$q_i \text{ von } p, T \quad (468)$$

1. Dichte

- Ideales Gas : $pv = RT$ bzw. $\rho = p/RT$
- Reales Gas : $pv = zRT$ mit dem Realgasfaktor $z = z(p/p_{\text{krit}}, T/T_{\text{krit}})$

2. Spannungstensor τ_{ij}

Einfache Flüssigkeit : τ_{ij} ist abhängig von

- Deformationsgradient
- isotrope Materialeigenschaften

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* e_{kk} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (469)$$

linear abhängig von thermodynamischen Größen und Strömungsgrößen

$$\vec{T} = (-p + \underbrace{\lambda^* \nabla \cdot \vec{u}}_{=\vec{P}(\text{Reibspannungstensor})}) \vec{I} + 2\eta \vec{E} \quad (470)$$

$$\bar{P} + p = \frac{1}{3} \tau_{ii} + p = e_{ii} \underbrace{\left(\lambda^* + \frac{2}{3} \eta \right)}_{\eta_D = 0} \quad (471)$$

- $\eta_D = 0 \implies$ Druckzähigkeit: Stokes'sche Hypothese

$$\implies \Phi = P_{ij} e_{ij} = \lambda^* e_{kk} e_{ii} + 2\eta e_{ij} e_{ij} \quad (472)$$

Dynamische Viskosität:

Newton'sche Fluide

$\rightarrow \eta = \text{const.}$

$$\tau_{xy} = -\eta_0 \frac{du}{dy} \quad (473)$$

Nicht-Newton'sche Fluide

→ $\eta = \eta |\dot{\gamma}|$ mit der Scherrate

$$\dot{\gamma} = -\frac{du}{dy} \quad (474)$$

z.B.

(a) Oswald de-Waele Modell

$$\tau_{xy} = -m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \quad (475)$$

$$\eta = m |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (476)$$

- $n > 1$ "Scherdickendes" Fluid, dilatant
- $n < 1$ "Scherdünnendes" Fluid, pseudoelastisch

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \\ \eta_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{n-1} & \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (477)$$

(b) Binghamfluid z.B. Farbe

$$\tau_{xy} = -\eta_0 \frac{du}{dy} \pm \tau_0 \quad (478)$$

(c) Reiner-Philipoff-Modell

$$-\frac{du}{dy} = \left(\frac{1}{\eta_\infty + \frac{\eta_\infty - \eta_0}{1 + (\tau_{xy}/\tau_S)^2}} \right) \tau_{xy} \quad (479)$$

niedrige Scherrate	$\frac{du}{dy} \rightarrow 0$	$\eta \rightarrow \eta_0$
hohe Scherrate	$\frac{du}{dy} \rightarrow \infty$	$\eta \rightarrow \eta_\infty$

Zeitabhängiges Verhalten der Viskosität:

η fällt mit der Zeit thixotrop

η steigt mit der Zeit rheopektisch

3. Wärmeleitung:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \iff \vec{q} = -\lambda \nabla T \quad \text{Fourier'sches Gesetz} \quad (480)$$

9 Stromfadentheorie - kompressible Strömung

9.1 Stationäre Strömung

9.1.1 Strömung in Stromröhren

Stromröhre: Innerhalb der Stromröhre werden die Strömungsgrößen als homogen betrachtet. Es findet keine Strömung über Stromröhrenwände statt, Impulstransport und Wärmetransport sind möglich. (Kein Stofftransport)

Mittlung:

Bei der Mittlung muss die aufzustellende Bilanz berücksichtigt werden.

$$\int_A \rho [u(A)]^2 dA \neq \bar{u}^2 \rho A \quad (481)$$

- $\overline{u^2} \neq \bar{u}^2$

Statt dessen Regel zur Bilanzgerechten Mittlung: VDI 4675 Blatt 1 (Entwurf)

Kontinuitätsgleichung:

$$\int_0^L \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds - \rho u_1 A_1 + \rho u_2 A_2 + \underbrace{\iint_{A_w} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA}_{A \text{ ist zeitliche Konstant}} = 0 \quad (482)$$

Energiegleichung:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \left[\frac{u_i u_i}{2} + e \right] \rho dV = \iiint_V u_i k_i \rho dV + \iint_A u_i t_i dA - \iint_A q_i n_i dA \quad (483)$$

Integration über Stromröhre:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho e \right) A ds - \left(\frac{u_1^2}{2} + e_1 \right) \rho_1 u_1 A_1 + \left(\frac{u_2^2}{2} + e_2 \right) \rho_2 u_2 A_2 - p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2 = \iint_{A_w} u_i t_i dA - \iint_{A_w} q_i n_i dA \quad (484)$$

$$\underbrace{\frac{u_1^2}{2} + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1}}_{h_{tot,1}} + \frac{\dot{Q} + \dot{W}}{\rho_1 u_1 A_1} = \frac{u_2^2}{2} + \underbrace{e_2 + \frac{p_2}{\rho_2}}_{h_{tot,2}} \quad (485)$$

auch bei Entropieänderung durch Wärmetransport oder Reibung.

Unterschall- und Überschall-Diffusor bzw. Düse

Annahme:

- isentrope Strömung $\longrightarrow a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$
- Kontinuität $\rho u A = \text{const.}$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (486)$$

Mit

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s = \frac{1}{a^2} \quad (487)$$

ergeben sich zusammen mit der reibungsfreien, isentropen Impulsbilanz die Gleichungen

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{a^2 \rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (488)$$

Kontinuitätsgleichung Eulergleichung

und daraus

$$\implies \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{u}{a^2} \frac{du}{dx} \quad (489)$$

Gleichung (489) lässt sich mit der Definition der *Mach-Zahl*

$$M = \frac{u}{a} \quad (490)$$

zu Gleichung

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} (1 - M^2) = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad (491)$$

zusammenfassen. Hieraus erklären sich Düse und Diffusor bei Unterschall und Überschall.

Totalzustand und isentrope Machzahl

Für ein ideales Gas gilt für den isentropen Fall die Gleichung

$$p = C \rho^\kappa \quad (492)$$

Die Druckfunktion ist

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = C^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (493)$$

mit C aus einem beliebigen Referenzzustand "1"

$$C = p_1 \rho_1^{-\kappa} \quad (494)$$

Wird in Gleichung (493) C mit der Isentropenbeziehung (492) ersetzt, ergibt sich

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (495)$$

Die Bernoulli-Gleichung ist das Integral der Euler-Gleichung und lautet

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} \quad (496)$$

Wird der Referenzzustand (494) in die Druckfunktion (493) eingesetzt, ergibt sich

$$P(p) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}} \quad (497)$$

und mit dieser Druckfunktion ergibt sich die Bernoulli-Gleichung zu

$$\rightarrow \frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}} \quad (498)$$

Wird hingegen Gleichung (495) in die Bernoulli-Gleichung (496) eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (499)$$

und daraus

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} a^2 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} a_{\text{tot}}^2 \quad (500)$$

woraus für den Ruhe- oder Totalzustand mit $u_2 = 0$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} a^2 = \frac{1}{\kappa - 1} a_{\text{tot}}^2 \quad (501)$$

wird.

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad \text{und} \quad a_{\text{tot}} = \sqrt{\kappa RT_{\text{tot}}}. \quad (502)$$

$$\left(\frac{T_{\text{tot}}}{T} \right) = \left(\frac{a_{\text{tot}}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa - 1}{2} M^2 + 1 \quad (503)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{\text{tot}}}{p} = \left(\frac{T_{\text{tot}}}{T} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{\kappa - 1}{2} M^2 + 1 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (504)$$

Daraus kann die Gleichung für die isentrope *Mach-Zahl* hergeleitet werden

$$\Rightarrow M = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_{\text{tot}}}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]} \quad (505)$$

Kritischer Zustand

Die Größen, die bei $M = 1$ angetroffen werden, werden als *kritische Größen* bezeichnet und mit dem Symbol * gekennzeichnet (z.B. p^* , T^*). Für Gase mit $\kappa = 1,4$ (typisch für zweiatomige Gase) ergibt sich das kritische Druckverhältnis zu

$$\frac{p^*}{p_{\text{tot}}} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 0,528 \quad (506)$$

$$\frac{p_{\text{tot}}}{p^*} = \frac{1}{0,528} \approx 2 \quad (507)$$

Um die Beziehung zwischen Mach-Zahl und Fläche zu gewinnen, definieren wir die Fläche, in der $M = 1$ gilt mit

$$A^* = \frac{\dot{m}}{\rho^* a^*} \quad (508)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \rho u A = \rho^* u^* A^* = \rho^* a^* A^* \quad (509)$$

und es ergibt sich

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^* \rho_{\text{tot}}}{\rho u \rho_{\text{tot}}} \quad (510)$$

Zusammen mit der Energiegleichung (500)

$$u^2 + \frac{2}{\kappa - 1} a^2 = u^{*2} + \frac{2}{\kappa - 1} a^{*2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} a^{*2} \quad (511)$$

ergibt sich aus Gleichung (510) das kritische Flächenverhältnis

$$\left(\frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \quad (512)$$

Wärmezufuhr

$$\frac{u_2^2}{2} + h_2 = \frac{u_1^2}{2} + h_1 + q \quad (513)$$

Annahme

1. reibungsfrei \rightarrow Impulsbilanz:

$$\rho_2 u_2^2 + p_2 = \rho_1 u_1^2 + p_1 = C_1 \quad (514)$$

2. konstanter Querschnitt \rightarrow Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 = C_2 \quad (515)$$

3. kalorisch ideales Gas:

$$h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = h(p, \rho) \quad (516)$$

$$h = c_p T, \quad \rho = \frac{p}{RT}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - R} \quad (517)$$

$$\implies u^2 d\rho = dp \quad (518)$$

$$s = s_0 + c_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\kappa} \right) \quad (519)$$

$$\rho = s(p, \rho) \quad (520)$$

$$h = h(p, \rho) \quad (521)$$

Aus diesen Zusammenhängen ergibt sich die *Rayleigh-Kurve*: $M(h, s)$
Wendepunkt:

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}; \quad M = 1 \implies u^2 = a^2 \implies a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (522)$$

Reibung

Energiegleichung:

$$\frac{u^2}{2} + h = C_3 \quad (523)$$

Kontinuitätsgleichung (Querschnitt konstant):

$$\rho u = C_2 \quad (524)$$

Aus den Gleichungen (523) und (524) ergibt sich

$$\frac{1}{2} \left(\frac{C_2}{\rho} \right)^2 + h = C_3 \quad (525)$$

Die grafische Darstellung dieses Zusammenhangs wird als *Fanno-Kurve*

$$h = h(p, \rho), \quad s = s(p, \rho) \quad (526)$$

bezeichnet.

Für $M = 1$ gilt mit der Gibbs'schen Relation

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (527)$$

und mit $ds = 0$

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (528)$$

Es ergibt sich

$$\implies \frac{u^2}{\rho} d\rho = dh = \frac{dh}{d\rho} = \frac{u^2}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (529)$$

$$\implies u^2 = \rho \frac{dh}{d\rho} = \frac{dp}{dh} \frac{dh}{d\rho} = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s = a^2 \quad (530)$$

9.1.2 Gleichung des senkrechten Verdichtungsstoßes

Hugoniot-Relation Senkrechte Verdichtungsstöße werden als Diskontinuität betrachtet. Die Gleichungen sind

1. Massenerhaltung :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (531)$$

2. Impulserhaltung :

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (532)$$

3. Energieerhaltung :

$$\frac{u_1^2}{2} + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + h_2 \quad (533)$$

4. Zustandsgleichung:

$$p = p(\rho, h) \quad \text{z.B. ideales Gas} \quad p = \rho RT = \rho c_p T \frac{R}{c_p} = \rho h \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (534)$$

Masse + Impuls

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \iff u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \quad (535)$$

Masse + Energie

$$h_2 - h_1 = \frac{u_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right] \quad (536)$$

Aus Gleichung (535) und Gleichung (536) ergibt sich

$$h_2 - h_1 = \frac{p_2 - p_1}{2\rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right] \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right] \quad (537)$$

Wird die Gleichung umgeformt ergibt sich die allgemeine *Hugoniot-Relation*

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right]. \quad (538)$$

Änderung des Drucks

Ideales Gas \wedge Hugoniot-Relation mit $h = \frac{p}{\rho} \frac{\kappa}{\kappa-1}$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right] \quad (539)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1\right] \quad (540)$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\kappa-1) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1\right)}{2\kappa - (\kappa-1) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1\right)} \quad (541)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\kappa-1)}{(\kappa+1) - (\kappa-1) \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (542)$$

Um das Dichteverhältnis zu berechnen, lässt sich Gleichung (541) umformen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(-\frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \quad (543)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 - \frac{p_2}{p_1} - \frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) - \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{p_1} \quad (544)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) - 1}{1 - \frac{p_2}{p_1} - \frac{2\kappa}{\kappa-1}} \quad (545)$$

$$= \frac{1 + \frac{p_2 \kappa + 1}{p_1 \kappa - 1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \quad (546)$$

Grenzwertbetrachtung:

$$\text{Luft: } \kappa = 1,4 \quad \lim_{\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} = 6 \quad (547)$$

$$\text{Helium: } \kappa = 1\frac{2}{3} \quad \lim_{\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} = 8 \quad (548)$$

Aus dieser Grenzwertbetrachtung folgt, dass das Dichteverhältnis über den Stoss begrenzt ist.

Der Stoss ist **nicht** isentrop, denn im Stoss laufen irreversible Prozesse ab (Reibung). Daher erhöht sich die Entropie.

Vergleich mit der Isentropen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (549)$$

$$\lim_{\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \infty \quad (550)$$

Machzahl-Einfluss Impulserhaltung:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (551)$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \quad (552)$$

Zusammen mit der Gleichung

$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{\kappa \frac{p_1}{\rho_1}} \quad (553)$$

und der Definition der Machzahl $M = u/a$ ergibt sich für das Druckverhältnis über den Stoß

$$M_1^2 = \frac{u_1^2}{a_1^2} = \frac{p_2 - p_1}{\kappa \frac{p_1}{\rho_1} \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} = \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\kappa \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad (554)$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} - 1 = M_1^2 \kappa \left(1 - \frac{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}{1 + \frac{p_2 \kappa + 1}{p_1 \kappa - 1}}\right) \quad (555)$$

$$\Pi = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \Pi - 1 = M_1^2 \kappa \left(\frac{1 + \Pi \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \Pi - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}{1 + \Pi \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}\right) \quad (556)$$

$$\Rightarrow (\Pi - 1) \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \Pi\right) = M_1^2 \left[\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \Pi - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \Pi - 1\right] \quad (557)$$

$$(\Pi - 1)^2 + (\Pi - 1) \frac{2\kappa}{\kappa + 1} - M_1^2 \kappa (\Pi - 1) \frac{2}{\kappa + 1} = 0 \quad (558)$$

$$\Rightarrow (\Pi - 1)^2 - (\Pi - 1) \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) = 0 \quad (559)$$

$$\Pi = \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \quad (560)$$

Aus der Gleichung für das Druckverhältnis (560) folgt, dass $\frac{p_2}{p_1} > 1$ nur für $M_1 > 1$ möglich ist.

Für das Dichteverhältnis erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen (542) und (560)

$$1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (561)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2}{2 + (\kappa - 1)M_1^2} \quad (562)$$

Ebenso lässt sich das Temperaturverhältnis über den Stoß angeben

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{[2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)][2 + (\kappa - 1)M_1^2]}{(\kappa + 1)^2 M_1^2}. \quad (563)$$

Der Grund für den Temperaturanstieg ist die Erhaltung der Energie über den Stoß. Die Umwandlung von kinetischer Energie durch Reibung in Wärme bewirkt den Temperaturanstieg.

Aufgrund der Kontinuität folgt für die Machzahl nach dem Stoß M_2

$$M_2^2 = M_1^2 \frac{\rho_1 p_1}{\rho_2 p_2} = \frac{(\kappa + 1) + (\kappa - 1)(M_1^2 - 1)}{\kappa + 1 + 2\kappa(M_1^2 - 1)} \quad (564)$$

Für eine Anströmmachzahl $M_1 > 1$ gilt immer für die Abströmmachzahl $M_2 < 1$, also ein Übergang von Überschall zum Unterschall.

Entropieerzeugung:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\kappa} \right] \quad (565)$$

$$= c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{(\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa + 1)}{(\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa - 1)} \right)^{\kappa} \right] > 0 \quad (566)$$

Die Erhöhung des Druckverhältnisses führt zur Erhöhung der Reibung / Entropieerzeugung und somit zur Erhöhung des Temperaturverhältnisses und damit zu immer geringerer Verdichtung.

9.1.3 Schräger Verdichtungsstoß

Die Gleichungen für den schrägen Verdichtungsstoß lassen sich in ebener Strömung aus denen des senkrechten Verdichtungsstoßes herleiten, wenn wir die Geschwindigkeit vor dem Stoß \vec{u}_1 in die Komponenten u_{1n} normal und u_{1t} tangential zur Stoßfront zerlegen. Für die Komponenten gilt dann mit Stoßwinkel θ

$$u_{1n} = u_1 \sin \Theta \quad (567)$$

$$u_{1t} = u_1 \cos \Theta \quad (568)$$

Für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit u_{1t} längs des Stoßes bewegt, ist die Anströmung daher senkrecht zum Stoß. In seinem Bezugssystem sind daher die Beziehungen des senkrechten Verdichtungsstoßes gültig.

Beim Übergang über den Stoß ändert sich nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit im Relativsystem, nicht jedoch die Tangentialkomponente. Dies bedeutet, dass im Absolutsystem die Strömung beim Übergang umgelenkt wird.

Für die Machzahl vor dem Stoß gilt

$$M_{1n} = \frac{u_{1n}}{a} = \frac{u_1 \sin \Theta}{a} = \sin \Theta M_1. \quad (569)$$

Die Stoßbeziehungen für den senkrechten Verdichtungsstoß lauten

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \quad (570)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1) M_1^2}{2 + (\kappa - 1) M_1^2} \quad (571)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)][2 + (\kappa - 1) M_1^2]}{(\kappa + 1)^2 M_1^2} \quad (572)$$

Die Gleichungen für den schrägen Verdichtungsstoß erhält man, wenn in den Gleichungen (570), (571) und (572) M_1 durch $M_{1n} = M_1 \sin \Theta$ ersetzt wird.

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 \sin^2 \Theta - 1) \quad (573)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1) M_1^2 \sin^2 \Theta}{2 + (\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \Theta} \quad (574)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\kappa M_1^2 \sin^2 \Theta - (\kappa - 1)][2 + (\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \Theta]}{(\kappa + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \Theta} \quad (575)$$

Die Machzahl hinter dem Stoß wird mit u_2 gebildet, also $M_2 = u_2/a_2$. Da für $u_{2n} = u_2 \sin(\Theta - \delta)$ gilt, folgt

$$M_{2n} = \frac{u_{2n}}{a_2} = \frac{u_2 \sin(\Theta - \delta)}{a_2} = \sin(\Theta - \delta) M_2. \quad (576)$$

Somit kann die Machzahl hinter dem Stoß M_2 , auch wenn M_{2n} kleiner eins ist, durchaus größer als eins sein. Die Gleichung für den schrägen Verdichtungsstoß kann aus der Beziehung

$$M_2^2 = \frac{\kappa + 1 + (\kappa - 1)(M_1^2 - 1)}{\kappa + 1 + 2\kappa(M_1^2 - 1)} \quad (577)$$

für den senkrechten Verdichtungsstoß hergeleitet werden, wenn wieder M_1 durch M_{1n} und M_2 durch M_{2n} ersetzt werden. Die resultierende Gleichung ist

$$M_2^2 \sin^2(\Theta - \delta) = \frac{\kappa + 1 + (\kappa - 1)(M_1^2 \sin^2 \Theta - 1)}{\kappa + 1 + 2\kappa(M_1^2 \sin^2 \Theta - 1)}. \quad (578)$$

Zwischen Umlenkwinkel δ und Stoßwinkel Θ lässt sich unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung folgender Zusammenhang herstellen

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \Theta [M_1^2 \sin^2 \Theta - 1]}{2 + M_1^2 [\kappa + 1 - 2 \sin^2 \Theta]}. \quad (579)$$

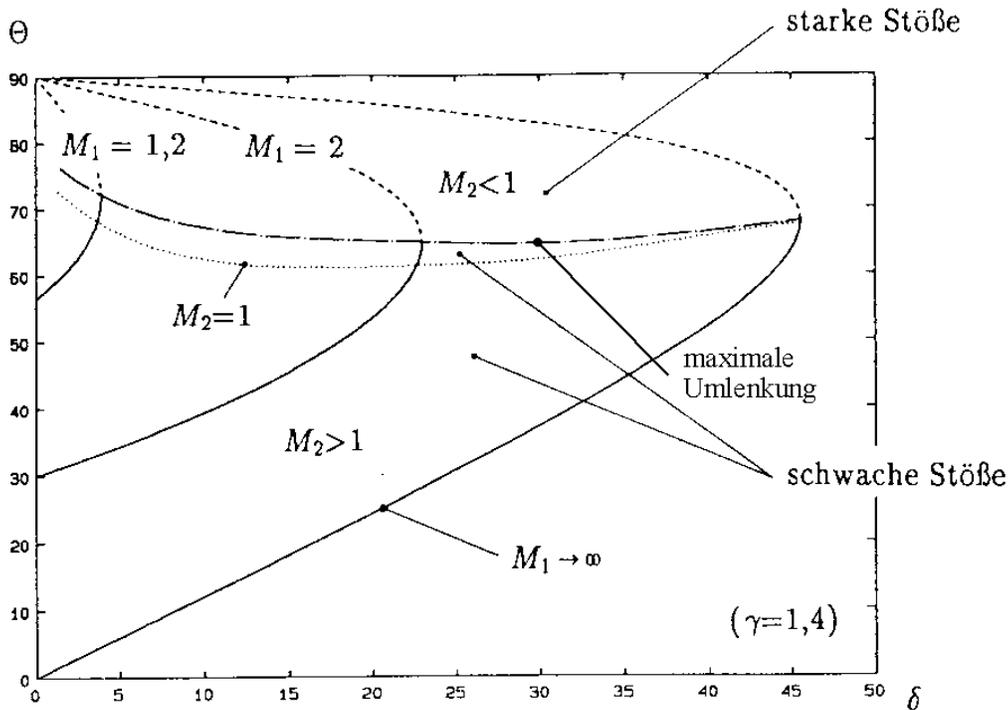


Abb. 2: Zusammenhang zwischen Stoßwinkel und Umlenkwinkel (aus Spurk: Strömungslehre)

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2 dargestellt. Die untere der beiden Trennlinien teilt die Bereiche, in denen die Machzahl nach dem schrägen Verdichtungsstoß M_2 kleiner – oberhalb der Linie – bzw. größer – unterhalb der Linie – als eins ist. Die obere Trennlinie verbindet die Punkte maximaler Umlenkung δ_{max} bei gegebener Anströmmachzahl M_1 . Es wird nun zwischen starken und schwachen Verdichtungsstößen unterschieden.

Starker Verdichtungsstoß

Ein Stoß wird als starker Verdichtungsstoß bezeichnet, wenn der Stoßwinkel Θ bei gegebener Machzahl M_1 größer als der zur maximalen Umlenkung δ_{max} gehörige Stoßwinkel Θ_{max} ist. Im Diagramm ist das der Bereich oberhalb der oberen Trennlinie. Hinter einem starken Stoß herrscht immer Unterschallgeschwindigkeit $M_2 < 1$.

Schwacher Verdichtungsstoß

Beim schwachen Verdichtungsstoß ist der Stoßwinkel Θ kleiner als der zur maximalen Umlenkung δ_{max} gehörige maximale Stoßwinkel Θ_{max} , d.h. im Diagramm ist das der Bereich unterhalb der oberen Trennlinie. Die Geschwindigkeit hinter einem schwachen Stoß kann sowohl im Unterschall- als auch im Überschallbereich liegen.

Weiterhin ist zu erkennen, dass für Umlenkwinkel kleiner δ_{max} zwei Lösungen für den Stoßwinkel möglich sind. Welche Lösung sich einstellt, hängt von den Randbedingungen weit hinter dem Stoß ab.

9.2 Instationäre Strömung

9.2.1 Methode der Charakteristiken

Annahmen:

- reibungsfrei
- adiabat
- konstanter Querschnitt

Ausbreitung eines Stoßes in einem ruhendem Medium Massenbilanz:

$$\rho_1 u_s = \rho_2 u_2 \quad (580)$$

Mit

$$u_1 = u_s - u'_1, \quad u_2 = u_s - u'_2 \quad (581)$$

ergibt sich

$$u'_2 = u_s \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (582)$$

Hugoniot-Relation:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2}{2 + (\kappa - 1)M_1^2} \quad (583)$$

$$u'_2 = u_s \left(1 - \frac{2 + (\kappa - 1)M_s^2}{(\kappa + 1)M_s^2} \right) \quad (584)$$

$$= u_s \left(\frac{(\kappa + 1)M_s^2 - 2 - (\kappa - 1)M_s^2}{(\kappa + 1)M_s^2} \right) \quad (585)$$

$$= u_s \frac{2M_s^2 - 1}{(\kappa + 1)M_s^2} = \frac{2}{\kappa + 1} a_1 M_s \left(1 - \frac{1}{M_s^2} \right) \quad (586)$$

$$= \frac{2}{\kappa + 1} a_1 \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \quad (587)$$

Annahme: reibungsfrei + adiabat \rightarrow isentrop (außer im Stoß)

Aus der allgemeinen Zustandsgleichung $\rho = \rho(p, s)$ folgt mit $Ds/Dt = 0$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{Dp}{Dt} = a^{-2} \frac{Dp}{Dt} \quad (588)$$

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{d}{ds} \left[\frac{u^2}{2} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} \quad (589)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (590)$$

Massenerhaltung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (591)$$

Entropieerhaltung:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (592)$$

Massenerhaltung + Entropieerhaltung:

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (593)$$

Wird von dieser Gleichung die Bernoulligleichung (590) addiert bzw. abgezogen, folgt daraus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (594)$$

Bahn des Beobachters:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a \quad (595)$$

Daraus ergibt sich längs der Bahn

$$dx = (u + a) dt \quad (596)$$

die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt}. \quad (597)$$

Für die Bahn

$$dx = (u - a) dt \quad (598)$$

die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = +\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt}. \quad (599)$$

Außerdem gilt

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \Rightarrow ds = 0 \quad (600)$$

längs

$$dx = u dt, \quad (601)$$

weil

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

gilt. Damit erfolgt eine Aufteilung der 3 Differentialgleichungen (Masse (591), Bernoulli (590), Entropie (592)) in 6 gewöhnliche Differentialgleichungen (596...601). Es

sind nun Aussagen entlang der Linien

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a \quad (602)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (603)$$

möglich. Entlang der Linie (603) ist die Entropie konstant.

$$p = C\rho^\kappa \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = a^2 = C\kappa\rho^{\kappa-1} \quad (604)$$

Somit folgt letztendlich aus den Gleichungen (597) und (599) die Gleichung

$$du \pm \frac{1}{\rho a} dp = du \pm \frac{a}{\rho} dp = dp \pm \sqrt{\kappa C} \frac{2}{\kappa-1} \rho^{\frac{\kappa-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (605)$$

Durch Integration der erhält man

$$u + \sqrt{\kappa C} \frac{2}{\kappa-1} \rho^{\frac{\kappa-1}{2}} = u + \frac{2}{\kappa-1} a = \text{const}1 = 2r, \quad (606)$$

$$u - \sqrt{\kappa C} \frac{2}{\kappa-1} \rho^{\frac{\kappa-1}{2}} = u - \frac{2}{\kappa-1} a = \text{const}1 = -2s. \quad (607)$$

Die beiden Integrationskonstanten $2r$ und $2s$ werden als *Riemann'sche Invarianten* bezeichnet.

Als Charakteristiken werden nun die Linien bezeichnet, entlang derer die einfachen Differentialgleichungen (597, 599) gelöst werden können.

$$2r = u(x_A, 0) + \frac{2}{\kappa-1} a(x_A, 0) \quad (608)$$

$$= \underbrace{u(x_0, t_0) + \frac{2}{\kappa-1} a(x_0, t_0)}_{\text{bei } P(x_0, t_0)} \quad (609)$$

$$-2s = u(x_B, 0) - \frac{2}{\kappa-1} a(x_B, 0) \quad (610)$$

$$= u(x_0, t_0) - \frac{2}{\kappa-1} a(x_0, t_0) \quad (611)$$

Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$2r - 2s = 2u(x_0, t_0) \rightarrow u(x_0, t_0) = r - s \quad (612)$$

und Subtraktion auf

$$2r + 2s = 2\frac{2}{\kappa-1} a(x_0, t_0) \rightarrow a(x_0, t_0) = \frac{\kappa-1}{2} (r + s) \quad (613)$$

9.2.2 Kolben im Rohr

Randbedingungen:

$$x = 0 \quad \begin{array}{ll} t \geq 0 & -|u_k| \\ t < 0 & u = 0, a = a_4 \end{array} \quad (614)$$

$$2r = u + \frac{2}{\kappa - 1} a_4 \quad (615)$$

$$-2s = u - \frac{2}{\kappa - 1} a_4 \quad (616)$$

$$\Rightarrow u = r - s = 0, a = a_4 \quad (617)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a_4 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_4 \Rightarrow x = a_4 t + \text{const}', & \text{rechtsläufig} \\ \frac{dx}{dt} = -a_4 \Rightarrow x = -a_4 t + \text{const}'', & \text{linksläufig} \end{cases} \quad (618)$$

$$u = r - s \wedge 2r = u + \frac{2}{\kappa - 1} a \wedge -2s = u - \frac{2}{\kappa - 1} a \quad (619)$$

$$u = \frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{\kappa - 1} a \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa - 1} a_4 \right) \quad (620)$$

$$\wedge a = \frac{\kappa - 1}{2} (r + s) = \frac{\kappa - 1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{\kappa - 1} a \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{\kappa - 1} a_4 \right] \quad (621)$$

u und a sind bei P und P' und auf allen rechtsläufigen Charakteristiken gleich.

$$x = (u + a)t \quad -|u_k| \leq u \leq 0 \quad (622)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{\kappa - 1} a \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa - 1} a_4 \right) \quad (623)$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{\kappa + 1} \left(\frac{x}{t} - a_4 \right) \quad (624)$$

$$\rightarrow a = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\kappa - 1} a_4 \quad (625)$$

$$x = (-|u_k| + a_3) t \quad (626)$$

$$a_3 = -\frac{\kappa - 1}{2} |u_k| + a_4 \quad (627)$$

$$a_k = -\frac{\kappa - 1}{2} |u_k| + a_4 \quad (628)$$

$$\Rightarrow a_k = a_3 \quad (629)$$

Charakteristiken

1. Linien, auf denen die Einfachen Differentialgleichungen gelöst werden .
2. Physikalisch: Orte der frühesten Druckinformation

9.3 Stoßrohr

$$u_1 = u_s - u'_1 \quad (630)$$

$$u_2 = u_s - u'_2 \quad (631)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (632)$$

Hugoniot-Relation:

$$u'_2 = u_s \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (633)$$

$$\Rightarrow u'_2 = u_s \left(1 - \frac{2 + (\kappa - 1)M_s^2}{(\kappa + 1)M_s^2} \right) \quad (634)$$

$$= \frac{2}{\kappa + 1} a_1 \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \quad (635)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Membran gebrochen.

$$p_4 \gg p_1 : \quad M_s \simeq \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_4 - 1} \frac{a_4}{a_1} \quad (636)$$

mit $a_1 = \sqrt{\kappa RT}$

Luft: $\kappa_1 = \kappa_4 = 1,4 \Rightarrow M_s \simeq 6$

Literatur

- [1] Spurk, Joseph H.: Strömungslehre – Einführung in die Theorie der Strömungen. 4. Aufl., Springer-Verlag, New-York Heidelberg, 1996.
- [2] Herwig, Heinz: Strömungsmechanik – Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen, Springer-Verlag New-York Heidelberg, 2002.
- [3] Schlichting, Herrmann und Gersten, Klaus: Grenzschicht-Theorie. 9. Aufl., Springer-Verlag New-York Heidelberg, 1997.
- [4] Bird, R. Byron, Stewart, Warren E. und Lightfoot, Edwin, N.: Transport Phenomena. New York, Wiley & Sons, 1960.
- [5] Zierep, Jürgen: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre. 3. überarbeit. Aufl., Karlsruhe, Braun, 1991.
- [6] Merker, Günther P. und Baumgarten, Carsten: Fluid- und Wärmetransport – Strömungslehre. Stuttgart, Teubner, 2000.
- [7] Poling, B., Prausnitz, J.M. und O’Connell J.P.: The Properties of Gases and Liquids. 5th Ed., McGraw-Hill Education, 2000.
- [8] Shapiro, Ascher H.: The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Vol. I & II. New York, The Ronald Press Company, 1953.
- [9] Tennekes, H. und J.L. Lumley: A First Course in Turbulence. MIT Press, 1974.
- [10] Pope, Stephen B.: Turbulent Flows. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [11] Bear, Jacob: Dynamics of Fluids in Porous Media. New York, Dover Publications Inc., 1972.
- [12] Thompson, Philip A.: Compressible-Fluid Dynamics, Advanced Engineering Series, 1988.
- [13] Oertel, H.: Stossrohre. Springer-Verlag, Wien, 1966.
- [14] VanDyke, Milton: An Album of Fluid Motion. Stanford/California, Parabolic Press, 1982.