MAX-PLANCK-INSTITUT
DYNAMIK KOMPLEXER
TECHNISCHER SYSTEME
MAGDEBURG

PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de
Tel. 0391 6110 362
03.Mai 2005

Übungsaufgaben zu SVP (Sommer 2005)

Aufgabe 1.1

Gegeben seien die partielle Differentialgleichung (*traffic flow*)

$$(1-2u)u_x + u_y = 0 \tag{1.1.1}$$

und die Randbedingungen

$$u(x,0) = \tfrac{1}{3} \quad \text{für } \ x \leq 0, \tag{1.1.2}$$

$$u(x,0) = \tfrac{5}{12}x + \tfrac{1}{3} \quad \text{für } \ 0 \leq x \leq 1, \tag{1.1.3}$$

$$u(x,0) = \tfrac{3}{4} \quad \text{für } \ x \geq 1. \tag{1.1.4}$$

(a) Bestimmen Sie mit der Charakteristikenmethode erst ein $u = u_2(x,y)$ mit den Eigenschaften (1.1.1) und (1.1.2) auf einer möglichst grossen Teilmenge der Halbebene $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, dann ein $u = u_3(x,y)$ mit den Eigenschaften (1.1.1) und (1.1.3) und schliesslich ein $u = u_4(x,y)$ mit den Eigenschaften (1.1.1) und (1.1.4).

(b) Die rechten Seiten in (1.1.2)–(1.1.4) definieren ein Funktion $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die 'Lösungsmenge' $U = U(x,y)$ der PDE (1.1.1) über $\mathcal{H}$, wenn $u(x,0) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ als Randbedingung gegeben ist. U setzt sich stückweise aus den u_2, u_3 und u_4 zusammen. Skizzieren Sie $U(x,0)$, $U(x,\frac{3}{5})$, $U(x,\frac{6}{5})$ und $U(x,\frac{9}{5})$.

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie eine Lösung $c = c(x,t)$ des Migrationsproblems

$$c_t + J_x = 0, \quad c(x,0) = 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}, \tag{1.2 1}$$

wobei J gegeben ist durch

$$J(x,c) = -p(x)c \ \text{ mit } \ p(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3, x \in \mathbb{R}. \tag{1.2 2}$$

Hinweis: Charakteristikenmethode – Empfehlung: Simulation der zugehörigen ODE.

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie eine formale Lösung $u = u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = Du_{xx}, \ 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \tag{1.3.1}$$

mit positivem Parameter D bei den Randbedingungen

$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0 \ \text{ für } \ t \geq 0 \tag{1.3.2}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = sin(x), \ 0 \leq x \leq \pi \, . \tag{1.3.3}$$

Hinweis: Trennung der Veränderlichen ($u(x,t) = T(t)X(x)$) und Fourierreihen.