Lösungen zum Übungsblatt(1)
Systeme mit verteilten Parametern

Alexander Reinhold

22. Mai 2005

Übungsaufgabe 1.1

Partielle Differentialgleichung:

$$(1 - 2u)\ u_x + u_y = 0$$

Randbedingungen:

$$\begin{array}{cc} u(x,0) = \frac{1}{3} & x \leq 0 \\ u(x,0) = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} & 0 \geq x \leq 1 \\ u(x,0) = \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{array}$$

Die allgemeine Differentialgleichung $a(x,y,u)\ u_x + b(x,y,u)\ u_y = c(x,y,u)$ kann in das charakteristische System mit $\frac{\partial x}{\partial t} = a(x,y,u)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = b(x,y,u)$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = c(x,y,u)$ überführt werden, wobei $u(x,y) = z$ gilt. Die Randbedingung wird dazu mit dem Parameter s dargestellt.
Es ergibt sich das charakteristische System mit Randbedingungen:

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 - 2z & x(s,0) = s \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 1 & y(s,0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0 & z(s,0) = u(s,0) \end{array}$$

Und daraus nach Integration (zuerst $z(s,t)$ bestimmen und danach in $\frac{\partial x}{\partial t}$ einsetzen):

$$\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & (1 - 2\ u(s,0))\ t + s \\ y(s,t) & = & t \\ z(s,t) & = & u(s,0) \end{array}$$

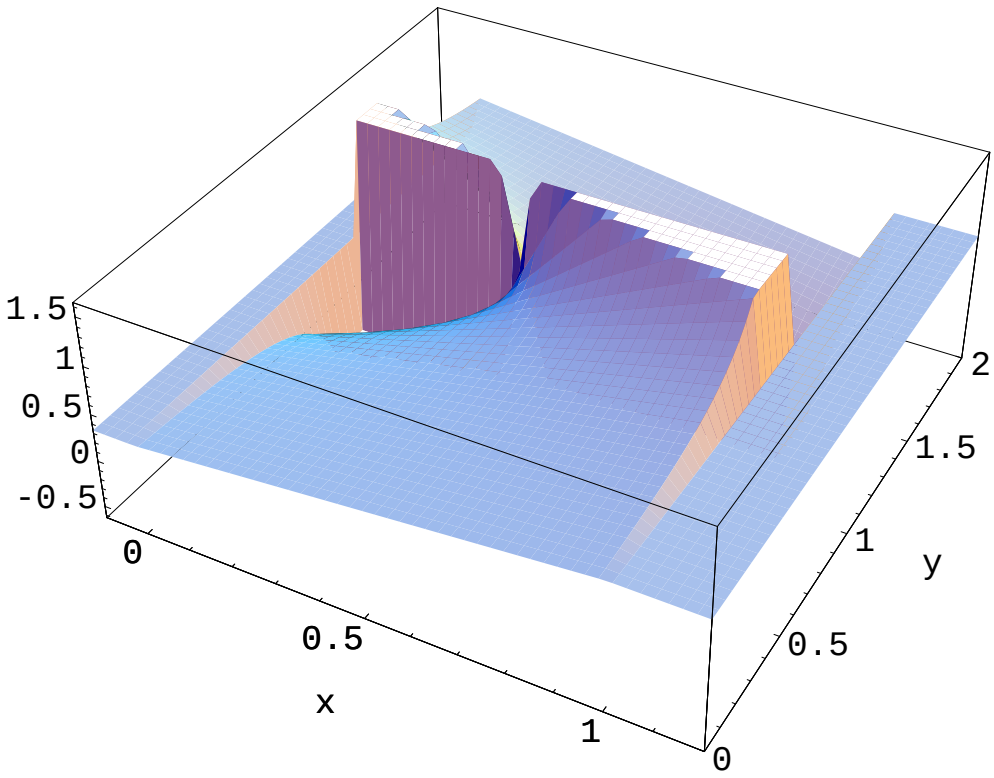
Nun wird die Randbedingung genauer untersucht. Für den ersten und letzten Fall, ein konstantes $u(x,0)$, ergibt sich eine Ebene Lösungsfläche $u(x,y) = u(x,0)$. Im zweiten Fall ergibt sich folgende Lösung:

- $y(s,t) = t$ kann in $x(s,t)$ ersetzt werden: $x(s,t) = y - 2\ y\ u(s,0) + s$
- Mit $u(s,0) = \frac{5}{12}s + \frac{1}{3}$ ergibt sich: $x = y - \frac{5}{6}\ y\ s - \frac{2}{3}\ y + s$
- Nach s umgestellt ergibt sich: $s = \frac{x - 1/3\ y}{1 - 5/6\ y}$
- Dieses Ergebnis in $z = z(s,t)$ eingesetzt: $z = u_2(x,y) = \frac{5}{12}\frac{x - 1/3\ y}{1 - 5/6\ y} + \frac{1}{3}$

Damit sind alle Stückweisen Lösungen bestimmt:

$$\begin{array}{cc} u_1(x,y) = \frac{1}{3} & x \leq 0 \\ u_2(x,y) = \frac{5}{12}\frac{x - 1/3\ y}{1 - 5/6\ y} + \frac{1}{3} & 0 \geq x \leq 1 \\ u_3(x,y) = \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{array}$$

Grafik der Lösungsfläche:



Übungsaufgabe 1.2

Die partielle Differentialgleichung mit Anfangsbedingung lautet:

$$c_t + J_x = 0 \qquad c(x,0) = 1$$

Mit $J = -p'(x)\ c$ und $p(x) = x - \frac{1}{3}\ x^3$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_t - p''(x)\ c - p'(x) c_x &= 0 \\ c_t + (x^2 - 1)\ c_x &= -2\ x\ c \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgendes charakteristische System mit Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial t}{\partial \tau} &= 1 & t(\phi,0) &= 0 \\ \tfrac{\partial x}{\partial \tau} &= x^2 - 1 & x(\phi,0) &= \phi \\ \tfrac{\partial z}{\partial \tau} &= -2\ x\ z & z(\phi,0) &= c(\phi,0) = 1 \end{aligned}$$

Die Lösung für $t(\phi, \tau)$ ergibt sich nach Trennung der Variablen und lautet mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$t(\phi, \tau) = \tau$$

Für $x(\phi, \tau)$ erhält man nach Trennung der Variablen die Gleichung:

$$\partial\tau = \frac{1}{x^2 - 1}\partial x$$

Bei Partialbruchzerlegung ($\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$) und Integration ergibt sich (Der Betrag im Logarithmus wird hier und im folgenden *nicht* weiter beachtet):

$$\tau = \frac{1}{2} ln(x-1) - \frac{1}{2} ln(x+1) + C_1(\phi)$$

$$2\ \tau = ln(\frac{x-1}{x+1}) + C_2(\phi)$$

$$(x+1)\ e^{2\tau} = (x-1)\ \alpha(\phi)$$

$$x(\phi, \tau) = \frac{\alpha(\phi) + e^{2\tau}}{\alpha(\phi) - e^{2\tau}}$$

Weiterhin gilt:

$$\alpha = \frac{x+1}{x-1}\ e^{2\tau}$$

Diese lässt sich nun in $\frac{\partial z}{\partial \tau} = -2xz$ einsetzen:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = -2\ \frac{\alpha + e^{2\tau}}{\alpha - e^{2\tau}}\ z$$

Trennung der Variablen ergibt:

$$\frac{1}{z}\ \partial z = 2\ \frac{\alpha + e^{2\tau}}{e^{2\tau} - \alpha}\ \partial\tau$$

- Nebenrechnung zur Lösung von: $2\ \int \frac{\alpha+e^{2\tau}}{e^{2\tau}-\alpha}\ \partial\tau$
- Substitutionsregel mit $\gamma(\tau) = e^{2\tau} - \alpha$ ergibt $\gamma' = 2e^{2\tau}$
- Nach Substitution ergibt sich: $\int \frac{1}{e^{2\tau}} \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{e^{2\tau}}{\gamma}\right)\ d\gamma$
- Umstellen des Integranden mit $e^{2\tau} = \gamma + \alpha$ ergibt: $\frac{\alpha}{\gamma(\alpha+\gamma)} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{\alpha+\gamma} + \frac{2}{\gamma}$
- Damit ist das Ergebnis der Integration: $-ln(\alpha+\gamma)+2\ ln(\gamma) = -2\tau+2\ ln(e^{2\tau}-\alpha)$

Das Ergebnis nach Trennung der Variablen lautet demnach:

$$ln(z) = -2\tau + ln((e^{2\tau} - \alpha)^2) + C(\phi)$$

$$z = e^{-2\tau}\ \left(e^{2\tau} - \alpha\right)^2\ \beta(\phi) = e^{-2\tau}(e^{4\tau} - 2\alpha e^{2\tau} + \alpha^2)\ \beta(\phi)$$

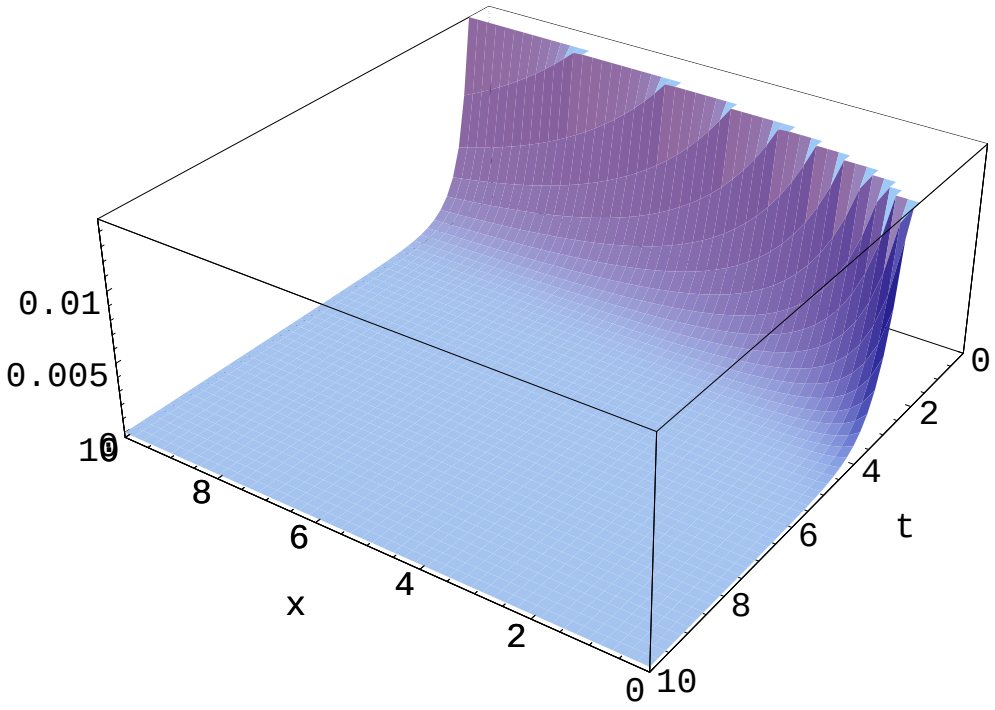
$$z = (e^{2\tau} - 2\alpha + \alpha^2\ e^{-2\tau})\beta(\phi)$$

Mit der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$z(\phi, 0) = 1 = (1 - 2\alpha + \alpha^2)\beta$$

$$\beta = \frac{1}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

Einsetzen von $\alpha = \frac{x+1}{x-1}\ e^{2\tau}$ und $\tau = t$ ergibt:

$$z = \frac{e^{2\tau} - 2\alpha + \alpha^2\ e^{-2\tau}}{(1-\alpha)^2} = \frac{1 - 2\ \frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}{(1 - \frac{x+1}{x-1}\ e^{2t})^2}\ e^{2t} = \frac{(1 - \frac{x+1}{x-1})^2}{(1 - \frac{x+1}{x-1}\ e^{2t})^2}\ e^{2t} = \frac{4\ e^{2t}}{(x - 1 - (x+1)\ e^{2t})^2}$$

Grafik der Lösungsfläche: