MAX-PLANCK-INSTITUT
DYNAMIK KOMPLEXER
TECHNISCHER SYSTEME
MAGDEBURG

PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de
Tel. 0391 6110 362
24.Mai 2005

Übungsaufgaben zu SVP (Sommer 2005)

Aufgabe 2.1
Berechnen Sie eine formale Lösung $u = u(x,t)$ der Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \; 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \tag{2.1.1}$$

bei den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \; u(1,t) = 0 \text{ für } t \geq 0 \tag{2.1.2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq 1, \tag{2.1.3}$$

mithilfe des d'Alembertschen Ansatzes für

$$f(x) = \tfrac{x}{A} \text{ für } 0 \leq x \leq A, \quad f(x) = \tfrac{1-x}{1-A} \text{ für } A \leq x \leq 1 \; (A \in (0,1)). \tag{2.1.4}$$

Aufgabe 2.2
Berechnen Sie eine formale Reihenlösung $u = u(x,t)$ der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \; 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \tag{2.2.1}$$

mit positivem Parameter c bei den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0 \text{ für } t \geq 0 \tag{2.2.2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq \pi \tag{2.2.3}$$

mittels Trennung der Veränderlichen (Ansatz: $u(x,t) = T(t)X(x)$) und Fourierreihen. Geben Sie anschliessend die jeweiligen Fourierkoeffizienten in den Reihenlösungen für folgende Spezialfälle an:

(a) $f(x) = x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \pi - x$ für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ und $g(x) = 0$ für $x \in [0,\pi]$,

(b) $f(x) = x$ für $x \in [0,\pi]$ und $g(x) = 0$ für $x \in [0,\pi]$.

Aufgabe 2.3
Berechnen Sie eine formale Lösung $u = u(x,t)$ der Balkengleichung

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0, \; 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \tag{2.3.1}$$

mit positivem Parameter c bei den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, u_{xx}(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, u_{xx}(\pi,t) = 0 \text{ für } t \geq 0 \tag{2.3.2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq \pi \tag{2.3.3}$$

mittels Trennung der Veränderlichen (Ansatz: $u(x,t) = T(t)X(x)$) und Fourierreihen.

Aufgabe 2.4
In der Populationsgenetik und auch bei der Untersuchung idealisierter chemischer Reaktoren stösst man auf skalare partielle Differentialgleichungen der Form

$$w_t = w_{xx} + f(w), \tag{2.4.1}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für ein Polynom mit den Eigenschaften

$$f(0) = 0, \; f(1) = 0 \text{ und } f(w) > 0 \text{ für } w \in (0,1) \tag{2.4.2}$$

steht. Gesucht sind *travelling waves* $w(x,t)$ von (2.4.1), d.h. Lösungen $w(x,t)$ von (2.4.1) der Form

$$w(x,t) = u(s) \text{ mit } s = x + ct, \quad u(-\infty) = 0, 0 \leq u \leq 1, u(+\infty) = 1 \tag{2.4.3}$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion u und geeignetem Parrameter $c \in \mathbb{R}$ (*wave speed*).

(a) Leiten Sie für u eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung her und schreiben sie diese in ein System $\mathcal{S}$ (für $u(s)$ und $v(s) := u'(s)$) erster Ordnung um.

(b) Für den Spezialfall $f(w) = w^2(1-w)$ in (2.4.2) bestimme man c so, dass Lösungen von $\mathcal{S}$ mit Anfangswert

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{M} := \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, v = cu(1-u)\}$$

für alle Zeiten auf $\mathcal{M}$ bleiben und im Fall $0 < u_0 < 1$ den Randbedingungen aus (2.4.3), d.h.

$$\lim_{s \to -\infty} u(s) = 0, \quad \lim_{s \to +\infty} u(s) = 1,$$

genügen.