1 Charakteristikenmethode

Aufgabe 1

Gegeben sei der Bereich $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Betrachten Sie mit $b(t) = (1+t^2)^{-1}$ und $c(t) = e^{-t}$ das Anfangswertproblem

$$u_t + b(t)\, u_x + c(t)\, u^2 = 0, \quad u(0,x) = f(x) := \max\{1-x^2, 0\}. \tag{1.1.1}$$

Erläutern Sie die *Charakteristikenmethode* anhand dieses Beispiels. Skizzieren Sie die Projektionen der Charakteristiken in R. Bestimmen Sie eine Lösung $u(t,x)$ von 1.1.1 über einer möglichst großen Teilmenge von R und skizzieren Sie dort $u = u(t,x)$.

Lösung

Ausgangspunkt der Charakteristikenmethode ist die Annahme, dass eine Lösung existiere. Ist dem so, kann diese Lösungskurve durch einen Parameter s und einen Anfangswert η parametrisiert werden. Man denke sich also $u = u(t(s,\eta), x(s,\eta))$. Durch Anwenden der Kettenregel und Koeffizientenvergleich (*hinreichend!*) vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

$$\frac{dt}{ds} = 1, \qquad t(s=0,\eta) = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\frac{dx}{ds} = b(t), \qquad x(s=0,\eta) = \eta \tag{1.1.3}$$

$$\frac{du}{ds} = -c(t)\, u^2, \qquad u(s=0,\eta) = f(\eta) \tag{1.1.4}$$

Die Anfangsbedingungen sind so gewählt, dass man auf der x-Achse startet, wobei η den entsprechenden Anfangswert darstellt. Aus 1.1.2 folgt sofort $t \equiv s$. Aus 1.1.3 und 1.1.4 erhält man

$$x - \eta = \int_0^s b(\hat{s})d\hat{s} = \arctan(s) \tag{1.1.5}$$

$$\frac{1}{f(\eta)} - \frac{1}{u} = -\int_0^s c(\hat{s})d\hat{s} = e^{-s} - 1 \quad . \tag{1.1.6}$$

Damit erhält man die Lösung in Abhängigkeit der eingeführten Parameter s und η

$$u(s,\eta) = \frac{f(\eta)}{1 + f(\eta)(1-e^{-s})}. \tag{1.1.7}$$

In diesem Fall ist es möglich, die Inverse der Koordinatentransformation zu finden.

$$s = t \tag{1.1.8}$$

$$\eta = x - \arctan(t). \tag{1.1.9}$$

Man erhält somit als Lösung

$$u(t,x) = \frac{f(x - \arctan(t))}{1 + f(x-\arctan(t))(1-e^{-t})} \quad . \tag{1.1.10}$$

Die folgende Skizze zeigt auf, wie sich die Lösung verhält. Man beachte die Verschiebung des *Tunnels* für fortschreitende Zeit. Dieses Verhalten ist durch eine Grenzwertbetrachtung von $f(x - \arctan(t))$ nachvollziehbar.

$$\lim_{t\to\infty} f(x - \arctan(t)) = \max\{(1 - (x - \frac{\pi}{2}))^2, 0)\} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm 1 + \frac{\pi}{2} \tag{1.1.11}$$

Die Nullstellen verschieben sich also um $\pi/2$, wodurch sich die Verschiebung des Tunnels ergibt. Die Dämpfung der Lösung ergibt sich durch eine weitere Grenzwertbetrachtung von $u(t,x)$.

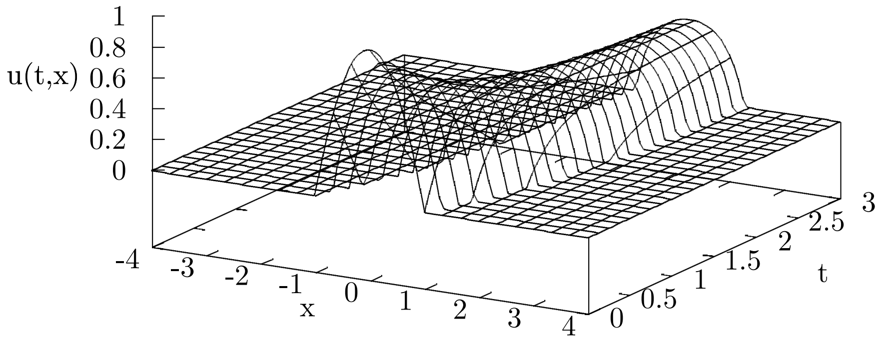

Abbildung 1: Lösung des Anfangswertproblems 1.1.1

Aufgabe 2

Gegeben sei der Bereich $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

1. Betrachten Sie mit positivem Parameter c das Anfangswertproblem

$$u_t + u\, u_x = c\, u, \quad u(0, x) = x \quad . \tag{1.2.1}$$

   Erläutern Sie die *Charakteristikenmethode* und bestimmen Sie eine Lösung $u(t, x)$ über einer möglichst großen Teilmenge von R. Skizzieren Sie dort die Projektionen der Charakteristiken und die Lösung $u = u(t, x)$.

2. Betrachten Sie mit positivem Parameter c das Anfangswertproblem

$$v_t + v\, v_x + c^2\, x = 0, \quad v(0, x) = 0 \quad . \tag{1.2.2}$$

   Erläutern Sie die *Charakteristikenmethode* und bestimmen Sie eine Lösung $v(t, x)$ über einer möglichst großen Teilmenge von R. Skizzieren Sie dort die Projektionen der Charakteristiken und die Lösung $v = v(t, x)$.

Lösung

Die Idee der Charakteristikenmethode wurde bereits oben beschrieben. Führt man neue Parameter ein, die eine Lösung beschreiben, so erhält man das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

$$\frac{dt}{ds} = 1, \qquad t(s = 0, \eta) = 0 \tag{1.2.3}$$

$$\frac{dx}{ds} = u, \qquad x(s = 0, \eta) = \eta \tag{1.2.4}$$

$$\frac{du}{ds} = c\, u, \qquad u(s = 0, \eta) = \eta \tag{1.2.5}$$

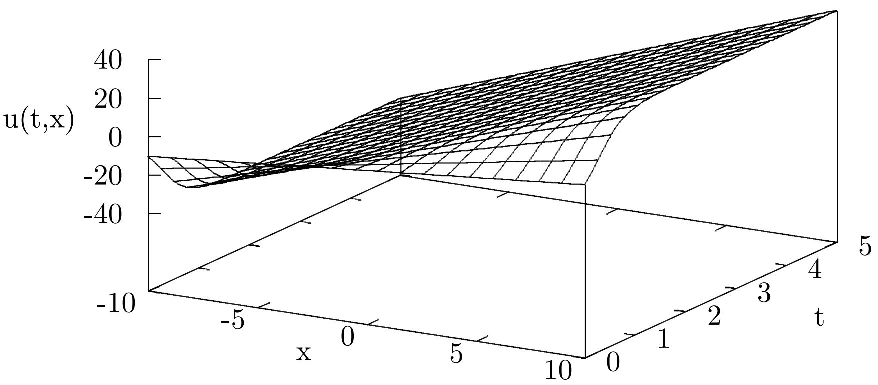

Abbildung 2: Lösung des Anfangswertproblems 1.2.1 bei $c = 3$

Aus 1.2.3 und 1.2.5 erhält man sofort

$$t = s \tag{1.2.6}$$

$$u(s, \eta) = \eta\, e^{cs} \quad . \tag{1.2.7}$$

Die Lösung für $u = u(s, \eta)$ ist also bereits bekannt. Um eine Beziehung für x zu erhalten, integriert man

$$x - \eta = \int_0^s \eta\, e^{c\hat{s}} d\hat{s} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{c\,x}{c + e^{cs} - 1} \quad . \tag{1.2.8}$$

Somit ergibt sich die Lösung $u = u(t, x)$ zu

$$u(t, x) = \frac{c\,x}{c + e^{ct} - 1}\, e^{ct} \quad , \tag{1.2.9}$$

deren Skizze in der Abbildung zu sehen ist.

Nun sucht man eine Lösung für v. Obgleich die partielle Differentialgleichung nur geringfügig anders ist, wird sich ein gravierender Unterschied einstellen, da das zu assoziierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen nun gekoppelt ist:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \qquad t(\tau = 0, \xi) = 0 \tag{1.2.10}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v, \qquad x(\tau = 0, \xi) = \xi \tag{1.2.11}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -c^2\, x, \qquad v(\tau = 0, \xi) = 0 \tag{1.2.12}$$

Aus 1.2.10 folgt sofort $t \equiv \tau$. Die verbleibenden Differentialgleichungen sind jedoch linear gekoppelt. Es bietet sich an, x erneut zu differenzieren.

$$x_\tau = v \tag{1.2.13}$$

$$x_{\tau\tau} = v_\tau = -c^2\, x \tag{1.2.14}$$

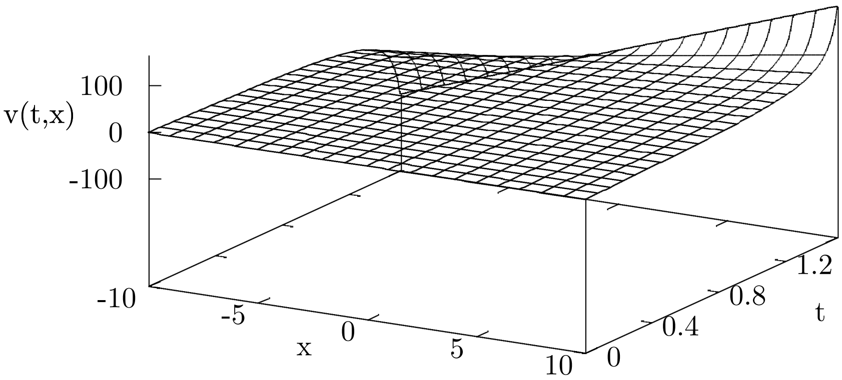

Abbildung 3: Lösung des Anfangswertproblems 1.2.2 bei $c = 1$. Man beachte die nahende Polstelle, welche die großen Werte für v erklärt.

Man erhält also die folgende DGL 2. Ordnung mit den Anfangswerten

$$x_{\tau\tau} + c^2\, x = 0, \quad x(\tau = 0, \xi) = \xi, \quad x_\tau(0, \xi) = 0 \tag{1.2.15}$$

Die Lösung ergibt sich zu

$$x(\tau, \xi) = \xi\, \cos(c\,\tau) \quad , \tag{1.2.16}$$

wodurch nun auch $v = v(\tau, \xi)$ bestimmt werden kann

$$v - 0 = -c^2\, \xi \int_0^\tau \cos(c\,\hat{\tau}) d\hat{\tau} \quad \Rightarrow \quad v(\tau, \xi) = -c\,\xi\, \sin(c\,\tau) \quad . \tag{1.2.17}$$

Mit der folgenden Koordinatentransformation

$$\tau = t \tag{1.2.18}$$

$$\xi = \frac{x}{\cos(c\,t)} \tag{1.2.19}$$

erhält man die gesuchte Lösung $v = v(t, x)$

$$v(t, x) = -c\, x\, \tan(c\,t) \quad . \tag{1.2.20}$$

Beachtenswert sind die möglichen Polstellen dieser Lösung, wie sie auch in der Abbildung zu erahnen sind.

2 Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 1

Auf $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$ sei mit einer Wellengleichung das Randwertproblem

$$u_{xx} = u_{tt} + 4\, u_t, \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \tag{2.1.1}$$

mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \sin(2x)$ und $u_t(x, 0) = -\sin(x)$ gegeben. Nutzen Sie die Methode der *Trennung der Veränderlichen* und bestimmen Sie die (formale) Lösung von 2.1.1 auf D.

Lösung

Aufgaben dieser Art sind durch ein Schema lösbar, welches im Folgenden verwendet wird.

1. **Räumliches Problem lösen**

   Zunächst betrachtet man den linearen Operator $\mathcal{L}$ und bestimmt dessen Eigenfunktionen und Eigenwerte.

$$\mathcal{L}v = v_{xx} \doteq \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad v_{xx} - \lambda v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

   Wählt man $\lambda = -\mu^2$, so erhält man den folgenden Lösungsansatz, in welchen die Randbedingungen eingesetzt werden können

$$v(x) = a\,\cos(\mu x) + b\,\sin(\mu x) \tag{2.1.3}$$
$$v(0) = 0 = a \tag{2.1.4}$$
$$v(\pi) = 0 = b\,\sin(\mu\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = n \in \mathbb{N} \tag{2.1.5}$$

   Da ein *Sturm-Liouville-Problem* vorliegt, stehen die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander. Als Eigenfunktionen wählt man der Einfachheit halber

$$\Phi_n = \sin(nx) \quad , \tag{2.1.6}$$

   wobei $b = 1$ willkürlich gesetzt wurde. Mit $b = \sqrt{2/\pi}$ wäre sogar eine *Orthonormalisierung* möglich. Dieser Schritt ist jedoch im Folgenden nicht notwendig, da später zu bestimmende Koeffizienten in Ingegralform angegeben werden dürfen.

   Dass für negative Eigenwerte Eigenfunktionen existieren, wurde oben gezeigt. Existieren weitere nichttriviale Eigenwerte und entsprechende Eigenfunktionen? Die Frage ist zu verneinen. Für den Fall $\lambda = 0$ erhält man als einzige Lösung

$$v(x) = c\,x + d \tag{2.1.7}$$
$$v(0) = 0 = d \quad \Rightarrow d = 0 \tag{2.1.8}$$
$$v(\pi) = 0 = c\,\pi \quad \Rightarrow c = 0, \tag{2.1.9}$$

   so dass sich nur die triviale Lösung ergibt. Wählt man $\lambda = \mu^2$, so ergeben sich die Lösungen

$$v(x) = e\,\sinh(\mu x) + f\,\cosh(\mu x) \tag{2.1.10}$$
$$v(0) = 0 = f \quad \Rightarrow f = 0 \tag{2.1.11}$$
$$v(\pi) = 0 = e\,\sinh(\mu\pi) \quad \Rightarrow e = 0, \tag{2.1.12}$$
$$\tag{2.1.13}$$

   welche wieder nur auf die triviale Lösung führen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz unendlich vieler Eigenwerte ist also in der Tat $\lambda = -n^2$.

2. **Reihenansatz aufstellen**

   Aufgrund der Homogenität des Problems sowie den bekannten Eigenfunktionen ist es nun möglich, die Lösung von 2.1.1 durch folgenden Ansatz auszudrücken

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\,\Phi_n(x) \quad \overset{in\,2.1.1}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2)\alpha_n(t)\,\Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\ddot{\alpha}_n(t)\,\Phi_n(x) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\alpha}_n(t)\,\Phi_n(x) \tag{2.1.14}$$

Ein Koeffizientenvergleich ist hinreichend und liefert eine Bestimmungsgleichung der $\alpha_n(t)$. Im Grunde versteckt sich dahinter die Orthogonalität der Eigenfunktionen. Bildete man das Skalarprodukt, so bliebe nur ein Summand stehen.

$$\ddot{\alpha}_n + 4\,\dot{\alpha}_n + n^2\alpha_n = 0 \quad . \tag{2.1.15}$$

Durch den Ansatz $\alpha_n(t) = e^{\beta_n t}$ erhält man die Eigenwerte β_n durch

$$\beta_n = -2 \pm \sqrt{4 - n^2} \quad . \tag{2.1.16}$$

Es ist eine Fallunterscheidung notwendig, um alle den Radikanden betreffenden Sonderfälle zu erfassen. Der hochgestellte Index steht für die Vielfachheit der Eigenwerte zu einem entsprechenden n.

$$n = 1 : \beta_1^{(1,2)} = -2 \pm \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1(t) = \gamma_1^{(1)} e^{\beta_1^{(1)}\,t} + \gamma_1^{(2)} e^{\beta_1^{(2)}\,t} \tag{2.1.17}$$

$$n = 2 : \beta_2^{(1,2)} = \beta_2 = -2 \qquad \Rightarrow \quad \alpha_2(t) = \gamma_2^{(1)} e^{\beta_2\,t} + \gamma_2^{(2)} t\, e^{\beta_2\,t} \tag{2.1.18}$$

$$n \geq 3 : \beta_n^{(1,2)} \in \mathbb{C} \tag{2.1.19}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$u(t,x) = (\gamma_1^{(1)} e^{\beta_1^{(1)}\,t} + \gamma_1^{(2)} e^{\beta_1^{(2)}\,t})\,\Phi_1(x) + (\gamma_2^{(1)} e^{\beta_2\,t} + \gamma_2^{(2)} t\, e^{\beta_2\,t})\,\Phi_2(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n(t)\,\Phi_n(x) \tag{2.1.20}$$

3. **Anfangsbedingungen einbinden**

Diese allgemeine Lösung erfüllt noch nicht die gegebenen Anfangsbedingungen. Einsetzen dieser liefert jedoch

$$u(x,0) \doteq \sin(2x) = (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)})\,\sin(x) + \gamma_2^{(1)}\sin(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n(0)\,\Phi_n(x) \tag{2.1.21}$$

$$u_t(x,0) \doteq -\sin(x) = (\beta_1^{(1)}\,\gamma_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}\,\gamma_1^{(2)})\,\sin(x) + (\gamma_2^{(2)} + \beta_2\gamma_2^{(1)})\,\sin(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} \dot{\alpha}_n(0)\,\Phi_n(x) \quad . \tag{2.1.22}$$

Sämtliche Summanden für $n \geq 3$ entfallen also. Es müssen lediglich die ersten vier Koeffizienten bestimmt werden. Die Bestimmungsgleichunen können von oben abgelesen werden und führen auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2^{(1)} = 1, \quad \gamma_2^{(2)} = -\beta_2 \tag{2.1.23}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_1^{(2)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^{(1)} = \frac{-1}{\beta_1^{(1)} - \beta_1^{(2)}}, \quad \gamma_1^{(2)} = \frac{1}{\beta_1^{(1)} - \beta_1^{(2)}} \tag{2.1.24}$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$u(x,t) = \frac{e^{(-2-\sqrt{3})t} - e^{(-2+\sqrt{3})t}}{2\,\sqrt{3}}\,\sin(x) + (1 + 2\,t)\,e^{-2\,t}\,\sin(2x) \quad . \tag{2.1.25}$$

Aufgabe 2

Auf $S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 < x < \pi\}$ betrachte man bei positivem Parameter γ und glattem $f(x)$ mit $f_x(0) = f_x(\pi) = 0$ das Randwertproblem

$$u_t = u_{xx} + 2\,u_x + \gamma u, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = 0 \quad . \tag{2.2.1}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen $v = v_n$ und Eigenwerte $\lambda = \lambda_n$ des räumlichen Problems, indem Sie nichttriviale Lösungen von $v_{xx} + 2\,v_x + \gamma v = \lambda v$ mit $v_x(0) = v_x(\pi) = 0$ bestimmen.
2. Bestimmen sie eine formale Reihenlösung von 2.2.1 mithilfe der Eigenfunktionen. Geben Sie für auftretende Koeffizienten die Integralformeln an.
3. Bestimmen Sie für die Anfangsfunktion $f(x) := e^{-x}[\cos x + \sin x]$ die Lösung von 2.2.1. Welchen wesentlichen Unterschied kann man im Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ bei $\gamma < 2$ und $\gamma > 2$ feststellen? Was zeichnet hierbei den Fall $\gamma = 2$ aus?

- **räumliches Problem lösen**

  Zu lösen ist die folgende DGL

$$0 = v_{xx} + 2\,v_x + (\gamma - \lambda)\,v, \quad v_x(0) = v_x(\pi) = 0 \quad . \tag{2.2.2}$$

Mit dem Ansatz $v(x) = e^{\alpha x}$ ergibt sich α zu

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \gamma + \lambda} \tag{2.2.3}$$

Für den Fall eines negativen Radikanden ergeben sich nichttriviale Lösungen. Formal ergäbe sich für den Fall $\lambda \equiv 0$ eine konstante Lösung, die jedoch bei der gegebenen Anfangsbedingung nicht ins Gewicht fällt. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dies nicht immer der Fall sein muss und ebenfalls Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten existieren können. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium umfasst daher immer eine komplette Fallunterscheidung der Eigenwerte. Im Folgenden wird jedoch nur der Fall betrachtet, welcher unendlich viele Eigenfunktionen liefert.

$$1 - \gamma + \lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -1 + \omega i \in \mathbb{C}, \quad \omega := \sqrt{\gamma - 1 - \lambda} \tag{2.2.4}$$

Damit ergeben sich

$$v(x) = e^{-x}\,(a_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x)) \tag{2.2.5}$$
$$v_x(x) = e^{-x}\,(\cos(\omega x)\,(a_1\omega - a_2) - \sin(\omega x)\,(a_1 + a_2\omega)) \tag{2.2.6}$$
$$v_x(0) = a_1\omega - a_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = a_1\omega \tag{2.2.7}$$
$$v_x(\pi) = e^{-\pi}\,(\cos(\omega\pi)\,(a_1\omega - a_2) - \sin(\omega\pi)\,(a_1 + a_2\omega)) = -e^{-\pi}\,\sin(\omega\pi)\,a_1(1 + \omega^2) = 0 \tag{2.2.8}$$

Aus dieser Beziehung folgt nun, dass $\omega = k \in \mathbb{N}$ gelten muss. Daraus erhält man die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte

$$k = \sqrt{\gamma - 1 - \lambda_k} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_k = \gamma - 1 - k^2. \tag{2.2.9}$$

Damit ergeben sich die Eigenfunktionen zu

$$\Phi_k(x) = e^{-x}\,(\sin(kx) + k\cos(kx)). \tag{2.2.10}$$

- **Reihenansatz aufstellen**

  Nun müssen lediglich die zeitlichen Faktoren bestimmt werden. Dazu wählt man einen Reihenansatz und setzt diesen in die PDE ein. Zu beachten ist nun, dass bei dieser Aufgabe die Eigenfunktionen der *gesamten* rechten Seite bekannt sind, so dass sich diese erheblich vereinfacht.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\,\Phi_k(x) \quad \overset{in\,2.2.1}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\alpha}_k(t)\Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma - 1 - k^2)\,\alpha_k(t)\Phi_k(x) \tag{2.2.11}$$

  Hinreichend ist nun ein Koeffizientenvergleich (erneut die Anmerkung, dass hier im Grunde die Orthogonalität der Eigenfunktionen verwendet wird).

$$\dot{\alpha}_k(t) = (\gamma - 1 - k^2)\,\alpha_k \quad \Longrightarrow \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0)\,e^{(\gamma-1-k^2)t} \tag{2.2.12}$$

- **Anfangsbedingungen einbinden**

  Bevor die Koeffizienten $\alpha_k(0)$ bestimmt werden, sei darauf hingewiesen, dass die Eigenfunktionen hier im Sinne der *gewichteten Norm* senkrecht aufeinander stehen. Die Form von 2.2.1 lässt sich dabei auf die allgemeine Sturm-Liouville-Form bringen

$$\hat{L}\phi = -A\phi'' - B\phi' + C\phi = \lambda\phi \quad \Longleftrightarrow \quad L\phi = -(p\phi')' + q\phi = \lambda w \phi, \tag{2.2.13}$$

  wenn die Wichtungsfunktion w in der Form

$$w(x) = \exp\left(\int^x \frac{B(\xi) - A'(\xi)}{A(\xi)} d\xi \right) \tag{2.2.14}$$

  gegeben ist. Weiterhin gilt dann

$$p = w\,A \tag{2.2.15}$$
$$q = w\,C \tag{2.2.16}$$

  Für unseren Fall ergibt sich also bei $A = -1, B = -2$

$$w(x) = \exp\left(\int^x \frac{-2}{-1} d\xi \right) = e^{2x}. \tag{2.2.17}$$

  Nun können also mithilfe der gewichteten Norm

$$\sigma(\Phi_k(x), \Phi_l(x)) := \int_0^\pi w(x)\Phi_k(x)\Phi_l(x)dx \tag{2.2.18}$$

  die Koeffizienten $\alpha_k(0)$ bestimmt werden. Beachtenswert ist, dass die Wichtungsfunktion $w(x)$ die Anteile der Exponentialfunktion von $\Phi_k(x)\,\Phi_l(x)$ *tilgt*.

$$\sigma(f(x), \Phi_m(x)) = \sigma\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0)\Phi_k(x), \Phi_m(x) \right) = \alpha_k(0) \cdot \sigma(\Phi_m(x), \Phi_m(x)) \tag{2.2.19}$$

  Somit ergibt sich die Lösung zu

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0)\,e^{(\gamma-1-k^2)t}\,e^{-x}\,(\sin(kx) + k\cos(kx)), \text{ bei } \alpha_k(0) = \frac{\sigma(f(x), \Phi_k(x))}{\sigma(\Phi_k(x), \Phi_k(x))}} \tag{2.2.20}$$

Laut Aufgabenstellung gelte nun $f(x) = e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$. Damit ergibt sich durch einen simplen Koeffizientenvergleich, dass $\alpha_k(0) = 0 \,\forall\, k > 1$ sowie $\alpha_1(0) = 1$. Man erhält also als Lösung

$$u(t,x) = e^{(\gamma-2)t}\, e^{-x}\,(\sin(x) + \cos(x)). \tag{2.2.21}$$

Nun ist es in der Tat interessant, dass die Lösung für verschiedene γ ein qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten aufweist. Sei x beliebig, aber fix.

1. $\gamma < 2$

   $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$
2. $\gamma = 2$

   $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = const.$
3. $\gamma > 2$

   $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \infty$

3 Fouriertransformation

Aufgabe 1

Erläutern Sie die Methode *Fourier-Transformation* anhand von

$$u_y = u_{xx}, \quad u_x(0,y) = -c, \quad u(x,0) = 0 \tag{3.1.1}$$

auf $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Berechnen Sie formal mit der Fouriertransformation eine beschränkte Lösung dieses Randwertproblems in Integralform $\int_0^\infty g(x,y,\omega)d\omega$ mit expliziter Angabe des Integranden g.

Lösung

Die Aufgabe löst man durch Anwenden der reellen Cosinustransformation sowie zweimalige partielle Ingetration. Grundlage der folgenden Ausführungen bildet

$$F(\omega) := \mathcal{F}[f(x)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\,\cos(\omega x)dx \quad . \tag{3.1.2}$$

Wendet man diese Transformation auf 3.1.1 an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}U_y(\omega,y) &= \int_0^\infty u_{xx}\,\cos(\omega x)dx \\
&= [u_x\,\cos(\omega x)]_0^\infty + \int_0^\infty u_x\,\omega\sin(\omega x)dx \\
&= [u_x\,\cos(\omega x) + u\omega\sin(\omega x)]_0^\infty - \int_0^\infty u\,\omega^2\cos(\omega x)dx \\
&= \lim_{x\to\infty}(u_x\,\cos(\omega x) + u\omega\sin(\omega x)) - u_x(0,y) - \omega^2\frac{\pi}{2}U(\omega,y) \\
&= 0 + c - \frac{\pi\omega^2}{2}U(\omega,y)
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

In der letzten Zeile wurde die geforderte Beschränktheit der Lösung u ausgenutzt sowie der gegebene Anfangswert. Übrig bleibt nun eine gewöhnliche inhomogene DGL 1. Ordnung

$$U_y(\omega,y) + \omega^2 U(\omega,y) = \frac{2c}{\pi}, \quad U(\omega,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(\omega,y) = \frac{2c}{\pi\omega^2}(1 - e^{-\omega^2 y}) \tag{3.1.4}$$

Nun erfolgt die Rücktransformation, welche das Ergebnis liefert.

$$u(x,y) = \int_0^\infty \frac{2c}{\pi\omega^2}\,(1 - e^{-\omega^2 y})\,\cos(\omega x)d\omega \tag{3.1.5}$$

Aufgabe 2

1. Gegeben sei auf der oberen Halbebene $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ das Dirichletproblem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad |u| \text{ beschränkt} \tag{3.2.1}$$

mit *anständigem* u_0. Erläutern Sie die Methode der Fourier-Transformation anhand dieses Beispiels und leiten Sie die Darstellung

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y,\xi)\,u_0(\xi)d\xi \tag{3.2.2}$$

einer Lösung von 3.2.1 her. Warum ergibt sich

$$k(x,y,\xi) = \frac{y}{\pi}\frac{1}{y^2 + (x-\xi)^2} \quad ? \tag{3.2.3}$$

2. Gegeben seien folgende Randwertprobleme für die Potentialgleichung auf dem ersten Quadranten $Q = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = g(x), \quad u(0,y) = 0 \tag{3.2.4}$$

und

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = h(x), \quad u_x(0,y) = 0 \tag{3.2.5}$$

für beschränktes $u = u(x,y)$ (bei anständigem g und h). Bestimmen Sie jeweils eine beschränkte Lösung. Geben Sie diese für $g \equiv 1$ auf $(0,\infty)$ und $h \equiv 1$ auf $(0,\infty)$ explizit an.

1. Es bietet sich an, die Fouriertransformation bezüglich x durchzuführen.

$$-\omega^2\,U(\omega,y) + U_{yy}(\omega,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(\omega,y) = A\,e^{-|\omega|y} + B\,e^{|\omega|y} \tag{3.2.6}$$

Da u beschränkt sein soll, muss $B \equiv 0$ sein. Mit dem ebenfalls transformierten Anfangswert $U(\omega,0) = U_0(\omega)$ ergibt sich

$$A = U_0(\omega) \quad \Rightarrow \quad U(\omega,y) = U_0(\omega)\,e^{-|\omega|y} \tag{3.2.7}$$

Für die bevorstehende Rücktransformation wendet man die Faltungsregel an und sucht in geeigneten Tabellen nach der Rücktransformierten von $e^{-|\omega|y}$. Man erhält

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}[U_0(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}] \\ &= u_0(x) * \left(\frac{y}{\pi}\frac{1}{y^2 + x^2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi}\frac{u_0(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2}d\xi \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Es wird also ersichtlich, dass k durch die Rücktransformation der Exponentialfunktion entsteht.

2. Nun betrachtet man das Problem 3.2.4 auf dem 1. Quadranten. Die Fouriertransformation ist bezüglich x nicht direkt anwendbar, da x nur auf der positiven Halbachse definiert ist. Expandiert man das Problem jedoch auf den Bereich H, so kann erneut fouriertransformiert werden und das eben ermittelte Ergebnis Verwendung finden. Dazu betrachtet man die gegebenen Randbedingungen, welche vorschreiben, dass der Koordinatenursprung ein Teil der Lösungsmenge sein soll. Es bietet sich also an, $g(x)$ ungerade fortzusetzen (eine Skizze macht das schnell deutlich), da davon ausgegangen werden darf, dass $g(x)$ anständig abklingt. Mit

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

kann direkt die Lösung 3.2.8 verwendet werden.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{\pi} \frac{-g(-\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{y}{\pi} \frac{g(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \\ &= \int_{\infty}^{0} \frac{y}{\pi} \frac{g(\xi)}{y^2 + (x+\xi)^2} d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{y}{\pi} \frac{g(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \\ &= \frac{y}{\pi} \left[\int_{0}^{\infty} \left(\frac{-1}{y^2 + (x+\xi)^2} + \frac{1}{y^2 + (x-\xi)^2} \right) g(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Hierbei wurden die geraden Eigenschaften von $\hat{g}$ genutzt. Nun setzt man $g \equiv 1$ und löst die Integrale. Dies führt auf

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \arctan(y) \quad . \tag{3.2.11}$$

Um 3.2.5 zu lösen, muss die Funktion h gerade fortgesetzt werden, da nun die Ableitung entlang der y-Achse verschwinden soll. Setzt man also

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x > 0 \\ h(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

so kann erneut 3.2.8 verwendet werden.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{\pi} \frac{h(-\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{y}{\pi} \frac{h(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \\ &= \int_{\infty}^{0} \frac{y}{\pi} \frac{-h(\xi)}{y^2 + (x+\xi)^2} d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{y}{\pi} \frac{h(\xi)}{y^2 + (x-\xi)^2} d\xi \\ &= \frac{y}{\pi} \left[\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{y^2 + (x+\xi)^2} + \frac{1}{y^2 + (x-\xi)^2} \right) h(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Setzt man nun $h \equiv 1$, so ergibt sich u nach Lösen der Integrale zu $u \equiv 1$.