PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de
Tel. 0391 6110 362
28.Juli 2008: 11:00–12:00

Klausur zu SVP (SS 2008)

Führen Sie Ihre Rechenschritte explizit aus.
12 der möglichen 24 Punkte sind hinreichend für das Bestehen der Klausur.

Aufgabe A08-1 (4+4 Punkte)

Auf $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$ und mit einer Konstanten c betrachte man folgende Randwertaufgabe für die Potentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$u(x,0) = u_y(x,0) \ , \quad u(x,\pi) = x \quad (0 < x < 1) \ ,$$
$$u(0,y) = 0 \ , \qquad u_x(\pi,y) = c \quad (0 < y < 1) \ .$$

(a) Erläutern Sie die Methode *Trennung der Veränderlichen* anhand dieses Beispiels im Fall $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ und bestimmen Sie formal eine Reihenlösung $u(x, y)$ auf Q. Dabei genügt es, auftretende Koeffizienten in Integralform anzugeben.

(b) Skizzieren Sie einen Lösungsweg für den Fall $\mathbf{c} = \mathbf{1}$ – dabei sind 'Eigenwerte' und 'Eigenfunktionen' nicht explizit zu berechnen und auftretende Koeffizienten nur über die sie definierenden Integralausdrücke anzugeben.

Aufgabe A02-2 (6 Punkte)

Im Bereich $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \ge 0, x \ge 0\}$ betrachte man das Randwertproblem

$$xu_t + u_x = x \ , \quad \mathrm{u}(0,x) = a(x) \quad \text{für } x \ge 0 \ , \quad u(t,0) = b(t) \quad \text{für } t \ge 0$$

mit glatten Funktionen $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, und $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $a(0) = b(0)$. Erläutern Sie die *Charakteristikenmethode* anhand dieses Beispiels, skizzieren Sie die Charakteristiken und bestimmen Sie eine Lösung über einer möglichst grossen Teilmenge von R. Skizzieren Sie ihre Lösung im Fall '$a(x) = x^2, b(t) = t$ '.

Aufgabe A08-3 (5 Punkte)

Erläutern Sie die Methode der *Laplace–Transformation* anhand des Beispiels (vgl. Aufgabe A08-2):

$$xu_t + u_x = x \ , \quad u(0,x) = x^2 \quad \text{für } x \ge 0 \ , \quad u(t,0) = t \quad \text{für } t \ge 0 \ .$$

Berechnen Sie explizit mit Laplace-Transformationen eine Lösung dieses Randwertproblems – die anfallenden inversen Laplace-Transformationen sind 'einfache' (vgl. TAFEL im Skript).

Aufgabe A08-4 (5 Punkte)

Erläutern Sie die Methode der *Fourier–Transformation* anhand des Beispiels

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = h(x),$$

auf dem Streifen $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ 0 \le y \le 1\}$, wobei h gegeben sei durch $h(x) = 1 - |x|$ auf $[-1, 1]$ und $h(x) = 0$ für $|x| > 1$. Bestimmen Sie formal eine beschränkte Lösung $u(x, y)$ auf S in Integralform $\int_{\mathbb{R}} g(x, y, \omega) d\omega$ mit expliziter Angabe des Integranden g, wobei in g kein Integral mehr auftauchen sollte.