

## Aufgabe A1-2011

### 1 Eigenfunktionen bestimmen

Zunächst müssen die Eigenfunktionen des linearen Operators bestimmt werden.

$$\Phi_{xx}(x) = \mu \Phi(x) \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi_x(1) + \Phi(1) = 0 \quad (1.1)$$

Seien  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  *Dummy*-Koeffizienten, die im Folgenden für die drei verschiedenen Fälle verwendet werden.

1.  $\mu = \lambda^2$

Für diesen Fall ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$\Phi(x) = a \sinh(\lambda x) + b \cosh(\lambda x) \quad . \quad (1.2)$$

Setzt man die Randbedingungen ein, so ergibt sich

$$\Phi(0) = b = 0 \quad (1.3)$$

$$\Phi_x(1) + \Phi(1) = a\lambda \cosh(\lambda) + a \sinh(\lambda), \quad (1.4)$$

woraus die Beziehung

$$\lambda = -\tanh(\lambda) \iff \lambda = 0 \quad (1.5)$$

folgt, welche also nur die triviale Lösung liefert.

2.  $\mu = 0$

Nun erhält man die allgemeine Lösung in der folgenden Form und kann die Randbedingungen einsetzen

$$\Phi(x) = a x + b \quad (1.6)$$

$$\Phi(0) = b = 0 \quad (1.7)$$

$$\Phi_x(1) + \Phi(1) = a + a = 0, \quad (1.8)$$

woraus wieder nur die triviale Lösung folgt.

3.  $\mu = -\lambda^2$

Die Hoffnung ist groß, dass nun Eigenwerte gefunden werden. Die allgemeine Lösung liefert hier unter Einbeziehung der Randbedingungen

$$\Phi(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x) \quad (1.9)$$

$$\Phi(0) = b \quad (1.10)$$

$$\Phi_x(1) + \Phi(1) = \lambda a \cos(\lambda) + a \sin(\lambda), \quad (1.11)$$

woraus man nun eine stets erfüllbare Beziehung für die Eigenwerte erhält.

$$\lambda = -\tan(\lambda) \quad (1.12)$$

Aus einer grafischen Betrachtung wird schnell ersichtlich, dass unendlich viele Eigenwerte existieren, wobei stets gilt  $\lambda_n \in ((2n-1)\frac{\pi}{2}; n\pi) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Setzt man den Parameter  $a = 1$ , so ergeben sich die Eigenfunktionen zu  $\Phi_n = \sin(\lambda_n x)$ . Es sei angemerkt, dass durch  $a$  natürlich auch eine *Orthonormalisierung* möglich werden kann, die jedoch im Kontext dieser Aufgabe keine Rolle spielt. Es handelt sich dabei lediglich um mathematische Kosmetik.

## 2 $f(x)$ in Eigenfunktionen entwickeln

Im Sinne der  $L_2$ -Norm sind orthogonale Eigenfunktionen wählbar. Für zwei *ordentlich* definierte Funktionen  $g$  und  $h$  kann man also das folgende Skalarprodukt definieren.

$$(h(x), g(x)) := \int_0^1 h(x) \cdot g(x) dx \quad (1.13)$$

Es ist sinnvoll,  $f(x)$  in Eigenfunktionen zu entwickeln, da so später die Koeffizienten einfach bestimmt werden können. Nutzt man das eben definierte Skalarprodukt und die Orthogonalität der Eigenfunktionen, so ergibt sich

$$(f(x), \Phi_m(x)) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Phi_n(x), \Phi_m(x) \right) = f_m \cdot (\Phi_m(x), \Phi_m(x)) \Rightarrow f_m = \frac{(f(x), \Phi_m(x))}{(\Phi_m(x), \Phi_m(x))} \quad (1.14)$$

## 3 Reihenansatz für $u(t, x)$

Es ist möglich, einen Produktansatz für  $u(t, x)$  zu wählen, für welchen jedoch noch die Koeffizienten  $\alpha_n(t)$  bestimmt werden müssen.

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \Phi_n(x) \xrightarrow{\text{in PDE}} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) \Phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) (-\lambda_n^2) \Phi_n(x) = 0 \quad (1.15)$$

Ein Koeffizientenvergleich ist hinreichend und liefert die DGL für die  $\alpha_n(t)$

$$\ddot{\alpha}_n(t) - \lambda_n^2 \alpha_n(t) = 0 \implies \alpha_n(t) = c_n \sinh(\lambda_n t) + d_n \cosh(\lambda_n t) \quad (1.16)$$

Da die Lösung  $u(t, x)$  beschränkt sein muss, muss zwangsläufig gelten  $d = 0$ . Als vorläufige Lösung ergibt sich also

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(\lambda_n t) \Phi_n(x), \quad (1.17)$$

wobei mithilfe der Anfangsbedingungen nun Bestimmungsgleichungen für alle  $c_n$  aufgestellt werden.

$$u_t(0, x) - u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \Phi_n(x) \doteq f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Phi_n(x) \quad (1.18)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man  $c_n = f_n/\lambda_n$  und damit

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \sinh(\lambda_n t) \sin(\lambda_n x) \quad \text{mit} \quad f_n = \frac{(f(x), \sin(\lambda_n x))}{(\sin(\lambda_n x), \sin(\lambda_n x))} \quad \text{und} \quad \lambda_n = -\tan(\lambda). \quad (1.19)$$

Nun sei  $v(t, x) := f(x) + u(t, x)$ . Um das entstehende Problem charakterisieren zu können, untersucht man

$$v_{tt}(t, x) = u_{tt}(t, x) \quad (1.20)$$

$$v_{xx}(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad (1.21)$$

$$v(t, 0) = f(0) + u(t, 0) = 1 \quad (1.22)$$

$$v_x(t, 1) + v(t, 1) = f_x(1) + u_x(t, 1) + f(1) + u(t, 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad (1.23)$$

$$v_t(0, x) - v(0, x) = 0 + u_t(0, x) - f(x) - u(0, x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (1.24)$$

Schreibt man dies analog zur ursprünglichen Aufgabenstellung, so erhält man das folgende Problem:

$$v_{tt} + v_{xx} = 0 \quad (1.25)$$

für  $v = v(t, x)$  mit den Randbedingungen

$$v(t, 0) = 1, \quad v_x(t, 1) + v(t, 1) = 0, \quad v_t(0, x) - v(0, x) = 0 \quad (1.26)$$

### Aufgabe A2-2011

Bei der Charakteristikenmethode trifft man die Annahme, dass eine Lösung für das gestellte Problem tatsächlich existiere. Diese kann dann durch einen Kurvenparameter  $s$  sowie einen Anfangswert  $\xi$  in der Form  $u = u(t(s, \xi), x(t, \xi))$  dargestellt werden. Bestimmt man nun die Änderung der Lösung für  $s$ , so ergibt sich mit der Kettenregel

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial t}{\partial s} u_t + \frac{\partial x}{\partial s} u_x. \quad (2.1)$$

Nun ergibt ein Koeffizientenvergleich mit dem der ursprünglichen PDE das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad t(s = 0, \xi) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \gamma(t), \quad x(s = 0, \xi) = \xi \quad (2.3)$$

$$\frac{du}{ds} = u \left( \frac{\gamma(t)}{1 + \delta x} - 1 \right), \quad u(s = 0, \xi) = f(\xi). \quad (2.4)$$

Die Anfangswerte ergeben sich dadurch, dass man auf der  $x$ -Achse startet, deren Wert mit  $\xi$  beliebig ist. Für diesen Fall muss also der Wert in  $t$ -Richtung stets 0 sein zu Beginn. Der Wert in  $u$ -Richtung ist durch die Anfangsfunktion  $f(x)$ , jedoch an der Stelle  $\xi$ , bestimmt.

Aus der ersten Beziehung des ODE-Systems folgt sofort  $t \equiv s$ . Die zweite Beziehung liefert damit

$$\int_{\xi}^x \partial \hat{x} = x - \xi = \int_0^s \gamma(\hat{s}) d\hat{s} = [\ln(1 + \hat{s})]_0^s = \Gamma(s) - \Gamma(0) = \Gamma(s) \quad \Rightarrow \quad x - \xi = \Gamma(s). \quad (2.5)$$

Dadurch ist bereits die Koordinatentransformation gefunden, welche die Lösung  $u = u(s, \xi)$  auf die Ursprungsvariablen zurücktransformiert. Die Vorschriften ergeben sich direkt aus den beiden bisher gefundenen Lösungen zu

$$s = t \quad (2.6)$$

$$\xi = \Gamma(s) - x \quad (2.7)$$

Nun kann ebenfalls die dritte ODE gelöst werden.

$$\frac{du}{u} = \left( \frac{\gamma(\hat{s})}{1 + \delta x} - 1 \right) d\hat{s} = \left( \frac{\gamma(\hat{s})}{1 + \delta(\xi + \Gamma(\hat{s}))} - 1 \right) d\hat{s} \quad (2.8)$$

Im Folgenden wird die Schreibweise  $u_{\delta}$ ,  $P_{\delta}$ ,  $Q_{\delta}$  verwendet, wobei  $\delta \in \{0, 1\}$

1.  $\delta = 0$

Für diesen ersten Fall ergibt sich die Lösung nach Integration zu

$$\ln \left( \frac{u_0}{f(\xi)} \right) = \Gamma(s) - s \quad \Rightarrow \quad u_0(s, \xi) = f(\xi) e^{\Gamma(s) - s} \quad (2.9)$$

In den ursprünglichen Koordinaten erhält man also

$$\boxed{u_0(t, x) = f(x - \ln(1+t)) e^{(\ln(1+t)+t)}}. \quad (2.10)$$

Man sieht schnell, dass bei der Lösung lediglich der  $\ln(\cdot)$ -Anteil *Probleme* bereiten könnte, was jedoch hier nicht der Fall ist. Man erhält damit

$$P_0 = R. \quad (2.11)$$

Um den Menge der von 0 verschiedenen Lösungen zu bestimmen ist lediglich das Argument des Faktors  $f(\cdot)$  zu betrachten. Es ergibt sich nach Vergleich mit der Definition der abschnittsweise definierten Funktion  $f(x)$

$$Q_0 = \{(t, x) \in P_0 : 0 \leq x - \ln(1+t) < 2\}. \quad (2.12)$$

2.  $\delta = 1$  Durch Substitution (z.B.  $g(s) := \Gamma(s)$ , dann  $dg = \gamma(s)ds$ ) gelangt man hier zu folgender Lösung

$$\ln\left(\frac{u}{f(\xi)}\right) = [\ln(1 + \xi + \Gamma(\hat{s})) - \hat{s}]_0^s = \ln\left(\frac{1 + \xi + \Gamma(s)}{1 + \xi}\right) - s \quad (2.13)$$

$$u(s, \xi) = f(\xi) \exp\left[\ln\left(\frac{1 + \xi + \Gamma(s)}{1 + \xi}\right) - s\right] \quad (2.14)$$

und nach Koordinatentransformation

$$\boxed{u(t, x) = f(x - \ln(1+t)) \exp\left[\ln\left(\frac{1+x}{1+x-\ln(1+t)}\right) - s\right]}. \quad (2.15)$$

Diese Lösung existiert nur bei

$$P_1 = \{(t, x) \in R : 1 + x - \ln(1+t) > 0\} \quad (2.16)$$

sowie

$$Q_1 = \{(t, x) \in P_1 : 0 \leq x - \ln(1+t) < 2\}. \quad (2.17)$$

### Aufgabe A3-2011

Es sollte erkannt werden, dass diese Aufgabe bereits oben gelöst wurde, da die Aufgabenstellung der von Aufgabe 2 bei  $\delta = 0$  entspricht, wobei das Problem auf der gesamten reellen Achse für  $x$  fortgesetzt wurde. Ebenso wurde die Anfangsbedingungen  $f(x)$  *gerade* fortgesetzt und so zur Funktion  $g(x)$  erhoben.

Die *Fourier-Transformation* kann bezüglich  $x$  angewendet werden und liefert

$$U_t + \gamma(t)i\omega U = (\gamma(t) - 1)U, \quad (3.1)$$

also eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit dem Anfangswert  $U(0, \omega) = G(\omega)$ . Die Lösung ergibt sich zu

$$\int_{G(\omega)}^U \frac{d\hat{U}}{\hat{U}} = \int_0^t (\gamma(\hat{t})(1 - i\omega) - 1)d\hat{t} \implies \ln\left(\frac{U}{G(\omega)}\right) = -t + \Gamma(t)(1 - i\omega), \quad (3.2)$$

wobei  $\Gamma(t) = \ln(1+t)$  erneut die Stammfunktion von  $\gamma(t)$  darstellt. Nun folgt

$$U(t, \omega) = G(\omega) e^{(\Gamma(t)(1-i\omega)-t)}. \quad (3.3)$$

Nun kann durch Rücktransformation die Lösung im Zeitbereich erhalten werden.

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[U(t, \omega)] = e^{(\Gamma(t)-t)} \cdot \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega\Gamma(t)} G(\omega)] \quad (3.4)$$

Beachtet man die Zeitverschiebung bei der Fouriertransformation, so erhält man letztendlich

$$\boxed{u(t, x) = g(x - \ln(1+t)) e^{(\ln(1+t)-t)}}. \quad (3.5)$$