MAX-PLANCK-INSTITUT DYNAMIK KOMPLEXER TECHNISCHER SYSTEME MAGDEBURG

PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de
Tel. 0391 6110 362
6.Juli 2006

HANDOUT ZUR LAPLACE-TRANSFORMATION

Laplace–Integral:	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad Re\{s\} = \sigma > \gamma$
	für $\lvert f(t)\rvert \le Ke^{\gamma t}$ und K, γ – endlich
Umkehr–Integral:	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \underset{t>0}{f(t)} = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$ mit $c > \gamma$
Linearität:	$\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}$, $k_{1,2}$ – beliebig
	$\mathcal{L}^{-1}\{k_1F_1(s) + k_2F_2(s)\} = k_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + k_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$
Maßstabsänderung:	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ mit $a > 0$, reell
Zeitverschiebung:	$\mathcal{L}\{h(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ mit $b > 0$, reell
Frequenzverschiebung:	$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s \pm c)\right\} = e^{\mp ct}f(t)$ mit c – reell oder komplex
Integration:	$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t f(\tau)d\tau^n\right\} = \frac{1}{s^n}F(s)$
Gewöhnliche Differentiation:	$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$
Verallgemeinerte Differentiation:	$\mathcal{L}\{D^nf(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0-) - \ldots - f^{(n-1)}(0-)$
Differentiation der Bildfunktion:	$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$
Grenzwertsätze:	$\lim\limits_{\sigma\to\infty} sF(s) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ (Anfangswert-Satz)
	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ (Endwert-Satz, Voraussetzung: $\exists f(t\to\infty)$)
Faltungsintegral:	$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = f_1(t) * f_2(t)$
Systemantwort:	$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \int\limits_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = g(t) * u(t)$

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$ $t > 0 \qquad c \ge \gamma$	$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ $Re\{s\} = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
6	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
7	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
8	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
9	$t\cos\omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
10	$t\sin\omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace– und der z–Transformatior Oldenbourg 1981.

FÖLLINGER, O.: Laplace– und Fourier– und z–Transformation. Hüthig 2000.