

„Systeme mit verteilten Parametern“ (SS 2006) – Lösungen zum Übungsblatt 1 –

Aufgabe 1.1 Es ist eine formale (beschränkte) Lösung $u(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= Du_{xx}, & x \in [0, \pi], t \geq 0, D > 0 \\ \text{RB: } u_x(0, t) &= 0 \\ u_x(\pi, t) &= 0 \\ \text{AB: } u(x, 0) &= \sin(x) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Dazu sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lv = Dv_{xx}$ mit homogenen *Neumann*-Randbedingungen zu bestimmen und auf Orthogonalität zu prüfen.

§1: Es liegt eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Die Randbedingungen sind ebenfalls homogen. \implies *sofortige Anwendung des Separationsansatzes* (auch: Produktansatz, Trennung der Veränderlichen) *möglich*:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Andere Ansätze sind ebenfalls denkbar (abhängig vom zu Grunde liegenden realen Problem), z. B. der *travelling-wave*-Ansatz $u(x, t) = U(x - Dt) = U(s)$.

§2: **Einsetzen des Ansatzes in die PDE**, mit $u_t = X\dot{T}$ und $u_{xx} = X''T$:

$$X\dot{T} = DX''T$$

Diese Gleichung kann man nun formal „trennen“:

$$\frac{\dot{T}}{T} = D \frac{X''}{X} = \text{const.} =: \mu$$

Die beiden Quotienten müssen konstant sein, denn die beiden Seiten sind jeweils nur von einer Variablen abhängig. Damit diese Gleichung für alle Wertepaare (x, t) erfüllt ist, müssen die Ausdrücke ein konstantes Verhältnis darstellen.

Jetzt haben wir das Lösen der PDE auf das Lösen von zwei Eigenwert-/Eigenvektorprobleme „reduziert“. Stellt man die obige Gleichung um, erhält man nämlich zwei Gleichungen, die die aus der Linearen Algebra bekannte Form eines Eigenwert/-vektorproblems, $Ax = \lambda x$, haben:

$$\dot{T} = \mu T, \quad DX'' = \mu X$$

Die Lösung der ersten *gewöhnlichen* Differentialgleichung ist $T(t) = C \exp(\mu t)$. Unsere Aufgabe ist es nun, die noch unbekanntenen Größen μ bzw. X zu bestimmen.

(Genauer Betrachtet der X -ODE zeigt, dass es sich gerade um das in der Aufgabenstellung angegebene Eigenwert/-funktions-Problem handelt. Wir werden jetzt nicht die v -Notation verwenden, sondern direkt mit der X -ODE arbeiten und mit dieser die erforderlichen Größen bestimmen. In der Lösung ergibt sich kein Unterschied, da es ja einfach nur ein „Tausch“ in den Bezeichnern ist.)

§3: **Bestimmung der Eigenwerte (EW) und Eigenfunktionen (EF)**

Es handelt sich um eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese können mit dem sogenannten *Euler-Ansatz* $\Phi(x) = \exp(\lambda x)$ gelöst werden. Eingesetzt ergibt sich

$$\lambda^2 - \mu/D = 0$$

Diese rein algebraische Gleichung hat Lösungen in Abhängigkeit von μ (man beachte $D > 0!$):

$$\lambda_{1/2} = \begin{cases} 0, & \mu = 0 \\ \pm \sqrt{\mu/D}, & \mu > 0 \\ \pm i \sqrt{-\mu/D}, & \mu < 0 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$X(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

Die unbestimmten Konstanten C_1 und C_2 sind mit Hilfe der Randbedingungen $X'(0) = 0 = X'(\pi)$ zu ermitteln. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\mu = 0$ nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$ hervorbringt, die für unser Problem uninteressant ist. Den Fall $\mu > 0$ können wir auch verwerfen. „Scharfes Hinsehen“ liefert uns für diesen Fall unbeschränkte Lösungen, denn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C \exp(\mu t) \rightarrow \infty \quad \forall \mu > 0$$

Damit bleibt der Fall $\mu < 0$. Hier lässt sich die allgemeine Lösung umformen in $X(x) = A \cos(x \sqrt{-\mu/D}) + B \sin(x \sqrt{-\mu/D})$. Diese Gleichung setzen wir jetzt in die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} X'(0) &= -A \sqrt{-\mu/D} \sin(0 \sqrt{-\mu/D}) + B \sqrt{-\mu/D} \cos(0 \sqrt{-\mu/D}) \\ &= B \sqrt{-\mu/D} = 0 \rightarrow B = 0. \\ X'(\pi) &= -A \sqrt{-\mu/D} \sin(\pi \sqrt{-\mu/D}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\pi \sqrt{-\mu/D}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{-\mu/D} \pi = n\pi \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile ergeben sich die Eigenwerte sofort: $\mu_n = -Dn^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ (Achtung: negative Eigenwerte!). Die zum Eigenwert μ_n gehörige Eigenfunktion ist $\cos(nx)$. Wie man sieht, erhält man nicht nur einen Eigenwert und eine Eigenfunktion sondern abzählbar unendlich viele. Warum dies so ist, klärt der *Satz von Sturm und Liouville*, nachlesbar zum Beispiel in Meyberg, Vachenauer: „Höhere Mathematik“, Bd. 2, erschienen Springer Verlag. Damit erhalten wir folgende Eigenfunktionen (beachte: $B_n = 0$):

$$X_n(x) = A_n \cos(nx)$$

Damit erhalten wir, wenn wir unser bisheriges Ergebnis in den anfangs gemachten Ansatz einsetzen, für jedes n eine Lösung u_n der PDE, die außerdem noch die Randbedingungen erfüllt:

$$u_n(x, t) = C_n \exp(-Dn^2 t) A_n \cos(nx) = p_n \exp(-Dn^2 t) \cos(nx)$$

mit $p_n := C_n A_n$.

§4: Superposition der Lösung

Da es sich hier um eine lineare PDE handelt, gilt das Superpositionsprinzip. Dieses besagt, dass die Summe von n Lösungen einer Gleichung – versehen mit n beliebigen konstanten Faktoren – wieder eine Lösung der Gleichung ist. Das heißt, wir können die Lösung unserer PDE schreiben als

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \exp(-Dn^2 t) \cos(nx)$$

§5: Erfüllen der Randbedingung

Die Reihenlösung $u(x, t)$ erfüllt bisher nicht die Anfangsbedingung. Über die unbestimmten (und wählbaren) Konstanten p_n haben wir jedoch die Möglichkeit, dies zu erreichen. Dazu setzen wir die Reihe in die Anfangsbedingung ein:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos(nx) \exp(-Dn^2 \cdot 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos(nx) \stackrel{!}{=} \sin(x)$$

Wir sehen hier, dass die unendliche Summe der Eigenfunktionen zum rein örtlichen Problem genau die Anfangsbedingungen ergeben soll.¹ Wie kann man dies bewerkstelligen? Erinnern wir uns: Nach *Fourier* lässt sich jede T -periodische Funktion in eine Reihe von cos- und sin-Termen von der Form

$$\phi(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

entwickeln ($\omega = 2\pi/T$). Die Bestimmungsgleichungen für die a_n und b_n lauten:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \phi(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \phi(x) \sin(n\omega x) dx$$

Die Idee ist nun, die Anfangsbedingung in eine solche Reihe zu entwickeln und dann durch einen einfachen Koeffizientenvergleich die p_n zu bestimmen. Ein Problem gibt es aber doch noch: Die Reihe soll ausschließlich cos-Terme enthalten, müsste daher also eine gerade Funktion sein. Die sin-Funktion ist jedoch eine ungerade Funktion – die Fourier-Entwicklung enthält daher auch sin-Terme, die den Koeffizientenvergleich unmöglich machen würden.

Diese Problem lösen wir, in dem wir die Anfangsfunktion ausserhalb von $[0, \pi]$ gerade fortsetzen. Diese Fortsetzung muss folgende Bedingungen erfüllen: (a) sie muss $T = 2\pi$ -periodisch sein, (b) sie muss identisch $\sin(x)$ im betrachteten Intervall sein.

Eine Funktion, die dies erfüllt ist $F(x) = |\sin(x)|$. Eingesetzt in die Koeffizientenformeln erhält man: $b_n \equiv 0$ (da gerade Funktion) und $a_0 = 4/\pi$, $a_2 = -4/(3\pi)$,

¹Für Interessierte: Warum diese sperrige Formulierung? Im Allgemeinen sind die Eigenfunktionen nicht einfache sin- oder cos-Funktionen, der Lösungsansatz bleibt aber der gleiche: Man versucht die Anfangsbedingung durch eine unendliche Reihe der Eigenfunktionen darzustellen. Wann dies gelingt, ist im *Darstellungssatz von Fischer-Riesz* angegeben, nachlesbar z. B. in Burg, Haf, Wille: „Höhere Mathematik für Ingenieure“, Band 5, erschienen bei B. G. Teubner.

In unserem Fall bedeutet dies, dass man die sin-Funktion als reine cos-Reihe darzustellen hat. Dies gelingt mit dem im L_2 -Funktionsraum definierten Skalarprodukt und der Tatsache, dass die $\cos(nx)$ -Funktionen paarweise orthogonal zueinander stehen. Mit diesem lassen sich dann die p_n bestimmen.

$a_4 = -4/(15\pi), \dots, a_{2n} = -4/((4n^2 - 1)\pi)$. Die ungeraden Indizes verschwinden. Der Koeffizientenvergleich ergibt $a_n = p_n$; die Lösung lässt sich damit angeben als

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \exp(-4n^2 Dt) \cos(2nx)$$

Hier wurde noch ein wenig an der Indizierung „herumgespielt“ (Indexverschiebung $n \rightarrow 2n$), um die Reihe in der gewohnten Form angeben zu können (Start bei $n = 1$). Ansonsten hätte man noch den Zusatz „ n gerade“ an der Reihe anbringen müssen.

Damit haben wir eine formale Lösung der Wärmeleitungsgleichung bestimmt. Es bleibt zu überprüfen, ob die angegebene Reihe konvergiert bzw. die Lösung auch eine Lösung des zu Grunde liegenden praktischen Problems ist.

Aufgabe 1.2 Diese Aufgabe ist von der Lösungsstrategie her identisch mit Aufgabe 1.1. Mit dem Ansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ erhält man die beiden Gleichungen

$$\ddot{T} = c^2 \mu T \quad X'' = \mu X$$

zur Bestimmung der Eigenwerte und -funktionen. Wir wissen, dass sich für das Problem $X'' = \mu X$ nur relevante Lösungen für $\mu < 0$ ergeben:

$$\begin{aligned} T(t) &= A \cos(c \sqrt{-\mu} t) + B \sin(c \sqrt{-\mu} t) \\ X(x) &= C \cos(\sqrt{-\mu} x) + D \sin(\sqrt{-\mu} x) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $X(x)$ in die Randbedingungen erhält man $\mu = -n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) und damit

$$u_n(x, t) = [A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)] D_n \sin(nx)$$

Da es sich hier ebenfalls um eine lineare PDE handelt, gilt das Superpositionsprinzip:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* \cos(cnt) + B_n^* \sin(cnt)] \sin(nx)$$

mit $A_n^* = A_n/D_n$ und $B_n^* = B_n/D_n$. Diese beiden Konstanten können durch die Anfangsbedingung bestimmt werden (wieder Koeffizientenvergleich mit Fourier-Reihenentwicklung). Diesmal hat man aber in eine reine sin-Reihe zu entwickeln, d. h. die Funktionen müssen ggf. ungerade fortgesetzt werden.

Beim Einsetzen in die zweite Anfangsbedingung u_t kann unter bestimmten Voraussetzungen die Reihe gliedweise differenziert werden (u. a. gleichmäßige Konvergenz). Es ergibt sich in den Fällen (a) und (b) jeweils $B_n^* \equiv 0$ aus $g(x) = 0$. Für die Koeffizienten A_n^* , die sich aus den b_n der oben eingeführten Fourierentwicklung ergeben, erhält man:

$$\begin{aligned} (a) \quad A_n^* &= \dots \quad \text{Selbststudium!} \\ (b) \quad A_n^* &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos(cnt) \sin(nx)$$

mit den gerade berechneten Koeffizienten A_n^* eingesetzt.

Aufgabe 1.3 Wir untersuchen das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} v'' + \lambda v &= 0 \\ \text{RB: } a_1 v(0) + a_2 v'(0) &= 0 \\ b_1 v(1) + b_2 v'(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

a) ($\lambda = 0$) Die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung ist $v(x) = Ax + B$. A und B lassen sich durch Einsetzen in die Randbedingungen bestimmen:

$$\begin{aligned} a_1 v(0) + a_2 v'(0) &= a_1 B + a_2 A = 0 \\ b_1 v(1) + b_2 v'(1) &= b_1 A + b_1 B + b_2 A = 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für A und B :

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_1 + b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dieses hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet.

b) ($\lambda = \pm \mu^2 \neq 0$) Durch Einsetzen der angegebenen Lösung in die Randbedingungen, Umordnung der Terme (analog zu (a)), erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_2 \mu & a_1 \\ b_1 s(\mu) + b_2 \mu c(\mu) & b_1 c(\mu) \mp b_2 \mu s(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen erhält man, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \mu (b_1 c(\mu) \mp b_2 \mu s(\mu)) - a_1 (b_1 s(\mu) + b_2 \mu c(\mu)) \\ (-a_1 b_1 \mp a_2 b_2 \mu^2) s(\mu) &= (a_1 b_2 \mu - a_2 b_1 \mu) c(\mu) \\ -t(\mu) &= \frac{a_1 b_2 \mu - a_2 b_1 \mu}{a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \mu^2} \mu \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist genau die geforderte Bedingung.

Das Zeichnen der einzelnen Kurven bleibt der/dem Interessierten überlassen. Aus den Abbildungen soll mitgenommen werden: (1) Eigenwerte sind genau die Schnittpunkte der beiden Kurven; (2) die Ausdrücke für diese können beliebig schwierig sein; (3) die Eigenwerte können oftmals nur näherungsweise bestimmt werden (für große n lässt sich in einigen Fällen eine Näherungsformel $\mu_n(n)$ angeben).

Magdeburg, April 2006

Andreas Bück
Andreas.Bueck@student.uni-magdeburg.de
(für Be- und Anmerkungen)