OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG
Fakultät für Verfahrens- und Systemtechnik
Lehrstuhl für Systemverfahrenstechnik
Prof. Dr.-Ing. K. Sundmacher

WS 2009/2010
Übung Systemverfahrenstechnik
1. Projektübung

Ausgabetermin: 11. November 2009
Abgabetermin: 25. November 2009

1. Aufgabe – Allgemeines (16,5 P)

1.1 Warum nutzt man die Tensornotation? (1 P)

Antw.: Um komplexe Ausdrücke kompakt darzustellen, z.B. Einstein'sche Summenkonvention.

1.2 Welche der folgenden Gleichungen enthalten Fehler, welche nicht? Begründe Deine Antwort! (3 P)

$$A_{ij} b_i = C_{ij} \qquad \text{(i)}$$

$$a_j + B_{jk} c_k + d_{kk} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\left(a_k + b_j\right) + c_{jk} = d_{jk} \qquad \text{(iii)}$$

Antw.:

(i) Die Multiplikation auf der linken Seite liefert einen Tensor erster Stufe, auf der rechten Seite steht ein Tensor zweiter Stufe. Es können nur Tensoren gleicher Stufe addiert werden.

(ii) Die beiden ersten Terme sind Tensoren erster Stufe, können also addiert werden. Der dritte Term ist ein Tensor nullter Stufe, da über *k* summiert wird, kann also nicht mit der Summe aus Term 1 und 2 additiv verknüpft werden.

(iii) Der Differentialoperator auf der linken Seite wirkt auf a_k als Divergenz, auf b_j als Gradient. Es entstehen also aus den Tensoren erster Stufe a_k, b_j Tensoren nullter und zweiter Stufe. Diese können nicht miteinander addiert werden. Die anderen beiden Terme können mit dem Gradienten von b_j addiert werden.

1.3 Gib die Operatoren für Divergenz und Gradient an, die auf den Tensor a_k wirken (indizierte Tensornotation). Nenne jeweils ein Beispiel für eine Bilanzgleichung, in der diese Operatoren vorkommen! (4 P)

Antw.:

•Divergenz: $\frac{\partial a_k}{\partial z_k}$, z.B. in der partiellen Massenbilanz $\frac{\partial}{\partial z_k}(\rho_\alpha v_{k,\alpha})$

•Gradient: $\frac{\partial a_k}{\partial z_j}$, z.B. in Energiebilanz in subs. Form (S. 10) $\frac{\partial v_j}{\partial z_k}$

1.4 Schreibe die folgende Gleichung voll aus! (1,5 P)

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}(\phi_j v_k + \gamma_{jk}), \quad j,k=1,2$$

Antw.:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_1}(\phi_1 v_1 + \gamma_{11}) - \frac{\partial}{\partial z_2}(\phi_1 v_2 + \gamma_{12})$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_1}(\phi_2 v_1 + \gamma_{21}) - \frac{\partial}{\partial z_2}(\phi_2 v_2 + \gamma_{22}) \quad .$$

1.5 Nenne zwei Beispiele für mehrphasige Systeme in der Verfahrenstechnik! (1 P)

Antw.: Kristallisation (S/L), Destillation (G/L), Blasensäulenreaktor (G/L), Fällung (S/L), Chemical Vapor Deposition (G/S).

1.6 Gib die Definitionsgleichung für die Massenschwerpunktsgeschwindigkeit v_k für ein System aus N Komponenten an! Zeige, dass die Summe aller Diffusionsströme verschwindet. (2,5 P)

Antw.: Die Definitionsgleichung für die Massenschwerpunktsgeschwindigkeit lautet:

$$\rho v_k = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha v_{k,\alpha} \quad , \qquad \text{(i)}$$

wobei w_α der Massenanteil der Komponente α ist. Die Diffusionsstromdichte der Komponente α ist gegeben durch

$$j_{k,\alpha} = \rho_\alpha (v_{k,\alpha} - v_k) \quad .$$

Summation über $j_{k,\alpha}$ und einsetzen der Gleichung (i), sowie $\rho = \Sigma_\alpha \rho_\alpha$ liefert:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} j_{k,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha (v_{k,\alpha} - v_k)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha v_{k,\alpha} - v_k \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}\rho_\alpha v_{k,\alpha}-v_k\sum_{\alpha=1}^{N}\rho_\alpha$$

$$=\rho v_k-v_k\rho=0$$

1.7 Wie lautet der allgemeine Quellen- und Senkenterm σ_α der Massenbilanz für ein Reaktionsnetzwerk? Geben Sie die Einheiten der auftretenden Größen an! (2 P)

Antw.: $\sigma_\alpha = M_\alpha \sum_{j=1}^{R} \nu_{\alpha,j} r_j$

Die Einheiten sind

$[\sigma_\alpha]$ = kg/m³/s

$[M_\alpha]$ = kg/mol

$[\nu_{\alpha,j}]$ = [-]

$[r_j]$ = mol/m³/s

1.8 Welches Zustandsfeld kann man aus der Impulsbilanz gewinnen? (0,5 P)

Antw.: Das Geschwindigkeitsfeld.

1.9 Welche Größen werden mit konstitutiven Gleichungen verknüpft? (1 P)

Antw.: Flussgrößen (z.B. Diffusionsstromdichte, Wärmestromdichte) werden mit Zustandsgrößen verknüpft (z.B. Konzentration, Temperatur).

2. Aufgabe – Bilanzierung (23,5 P)

2.1 Gib die allgemeine Struktur einer Bilanzgleichung an! (1,5 P)

Antw.: Akkumulation = Zu-/Abfluß + Quellen/Senken.

2.2 Welche Größen können bilanziert werden, welche nicht? Nenne Beispiele! (2 P)

Antw.: Bilanziert werden können extensive Zustandsgrößen, z.B. Masse und Energie (Erhaltungsgrößen) aber auch Volumen, Enthalpie (Nichterhaltungsgrößen). Bilanzierbare Größen müssen zählbar sein! Nicht bilanziert werden können intensive Zustandsgrößen wie z.B. Temperatur und Konzentration.

2.3 Überführe die partielle Massenbilanz in lokaler Formulierung in folgende Differentialgleichung zur Bestimmung des Molenbruchs der Komponente α (lokale Formulierung):

$$c_t\frac{\partial x_\alpha}{\partial t}=-c_t v_k\frac{\partial x_\alpha}{\partial z_k}-\frac{1}{\tilde{M}}\frac{\partial j_{k,\alpha}}{\partial z_k}+\frac{\partial_\alpha}{\tilde{M}} \quad .$$

Die gesuchte Differentialgleichung soll keine Zeit- und Ortsableitung der totalen Konzentration c_t enthalten. Die molare Masse ist für alle Komponenten gleich: $\tilde{M}=M_\alpha=M_\beta$. Kommentiere die Umformungsschritte so, dass sie nachvollziehbar sind! Beachte, dass keine Annahmen selbst getroffen werden dürfen. (4 P)

Antw.:

Ausgangspunkt ist die Komponentenmassenbilanz in lokaler Formulierung

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho_\alpha v_k + j_{k,\alpha}\right) + \sigma_\alpha$$

Wegen $\tilde{M} = M_\alpha = M_\beta$ ist $x_\alpha = c_\alpha / c_t = \rho_\alpha / \rho$. Einsetzen und ausdifferenzieren liefert

$$\rho \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} + x_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} = -x_\alpha \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho v_k\right) - \rho v_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial z_k} + \frac{\partial j_{k,\alpha}}{\partial z_k} + \sigma_\alpha$$

$$\rho \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} + x_\alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho v_k\right)\right) = -\rho v_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial z_k} + \frac{\partial j_{k,\alpha}}{\partial z_k} + \sigma_\alpha$$

Der zweite Term auf der linken Seite fliegt raus, weil innerhalb der Klammer die Gesamtmassenbilanz steht. Mit den Annahmen erhält man $\rho = c_t \tilde{M}$. Dies eingesetzt ergibt die gewünschte Form:

$$c_t \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = -c_t v_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial z_k} - \frac{1}{\tilde{M}} \frac{\partial j_{k,\alpha}}{\partial z_k} + \frac{\partial_\alpha}{\tilde{M}}$$

2.4 Überführe die Bilanz der Gesamtenergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e\right) = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho e v_k + P_{jk} v_j + q'_k\right) + \sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} v_{j,\alpha}$$

in die substantielle Form

$$\rho \frac{\mathrm{d} e}{\mathrm{d} t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk} v_j + q'_k\right) + \sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} v_{j,\alpha} \quad .$$

und diese wiederum in die Bilanz für die innere Energie

$$\rho \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} t} = -P_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial z_k} - \frac{\partial q'_k}{\partial z_k} + \sum f_{k,\alpha} j_{k,\alpha} \quad . \quad \text{(8 P)}$$

Lösungshinweis: (a) Um die Bilanz der Gesamtenergie in die substantielle Form zu überführen sollte die Gesamtmassenbilanz in substantieller Formulierung genutzt werden. (b) Die Gesamtenergie ist die Summe aus innerer und kinetischer Energie: $e = u + 1/2 v_j^2$. (c) Aus der Impulsbilanz in substantieller Form (siehe Vorlesung) erhält man durch skalare Multiplikation mit der Geschwindigkeit v_j einen Ausdruck für $1/2 \rho \,\mathrm{d} v_j^2 / \mathrm{d} t$. Beachte, dass $\mathrm{d} v_j^2 / d t = 2 v_j \mathrm{d} v_j / \mathrm{d} t$.

Antwort:

- Ausgangspunkt ist die Bilanz der Gesamtenergie in lokaler Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e\right) = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\rho e v_k + P_{jk} v_j + q'_k\right) + \sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} v_{j,\alpha}$$

- Anwenden der Produktregel auf den ersten Term der rechten Seite der Gleichung und umordnen der

Terme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+v_k\frac{\partial}{\partial z_k}(\rho e)=-\rho e\frac{\partial v_k}{\partial z_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Anwenden der Operatorgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial z_k}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho e)=-\rho e\frac{\partial v_k}{\partial z_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Anwenden der Produktregel

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+e\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho e\frac{\partial v_k}{\partial z_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Einsetzen der Gesamtmassenbilanz in substantieller Form $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho\frac{\partial v_k}{\partial z_k}$ liefert

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\rho e\frac{\partial v_k}{\partial z_k}=-\rho e\frac{\partial v_k}{\partial z_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Es ergibt sich die **Bilanz der Gesamtenergie** in substantieller Formulierung

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}v_j+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}}$$

- Einsetzen der Gleichung $e=u+\frac{1}{2}v_j^2$ in die Bilanz der Gesamtenergie

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u+\frac{1}{2}v_j^2\right)=\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}v_j^2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}v_j+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Umsortieren der Terme liefert eine Gleichung für die innere Energie

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}v_j^2}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}v_j+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Der Ausdruck $\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}v_j^2}{\mathrm{d}t}$ kann folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}v_j^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_j\cdot v_j)=\frac{\rho}{2}\left(v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}+v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}\right)=\rho v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}$$

- Einsetzen in die Gleichung für die innere Energie

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\rho v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}v_j+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Um einen Ausdruck für den Term $\rho v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}$ zu erhalten, wird die Impulsbilanz in substantieller Formulierung mit v_j multipliziert.

$$\rho v_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}=-v_j\frac{\partial P_{jk}}{\partial z_k}+v_j\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}$$

- Einsetzen in die Gleichung für die innere Energie

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v_j\frac{\partial P_{jk}}{\partial z_k}-v_j\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(P_{jk}v_j+q'_k\right)+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Anwenden der Produktregel auf den 3. Term der rechten Seite der Gleichung und umsortieren

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v_j\frac{\partial P_{jk}}{\partial z_k}-v_j\frac{\partial P_{jk}}{\partial z_k}-P_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial z_k}-\frac{\partial q'_k}{\partial z_k}-v_j\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}+\sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha}v_{j,\alpha}$$

- Zusammenfassen der Summen

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-P_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial z_k}-\frac{\partial q'_k}{\partial z_k}+\sum_\alpha f_{j,\alpha}\rho_\alpha\left(v_{j,\alpha}-v_j\right)$$

- Mit der Diffusionsstromdichte $j_{j,\alpha}=\rho_\alpha\left(v_{j,\alpha}-v_j\right)$ erhält man die Bilanz für die innere Energie:

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-P_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial z_k}-\frac{\partial q'_k}{\partial z_k}+\sum_\alpha f_{j,\alpha}j_{j,\alpha} \quad .$$

2.5 Gegeben ist eine eindimensionale partielle Stoffmengenbilanz in Konzentrationsform. Der Diffusionskoeffizient (*D*) und die Geschwindigkeit (*v*) sind ortsunabhängig.

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-v\frac{\partial c}{\partial z}-r(c)$$

2.5.1 Erläutere die Bedeutung der einzelnen Terme! (2 P)

Antw.:

•1. Term auf der linken Seite: Akkumulation

•1. Term auf der rechten Seite: Diffusion

•2. Term auf der rechten Seite: Konvektion

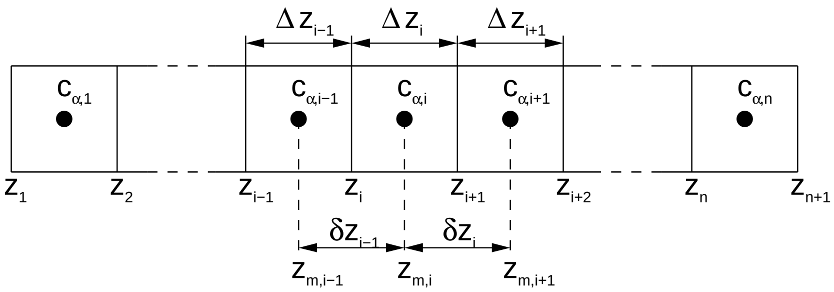
•3. Term auf der rechten Seite: Quelle/Senke durch chemische Reaktion

2.5.2 Wie viele Anfangsbedingungen und wie viele Randbedingungen sind zur Lösung der Gleichung notwendig? Begründe die Antwort! (1 P)

Antw.: Es ist eine Anfangsbedingung erforderlich, da die DGL 1. Ordnung in der Zeit ist. Zwei Randbedingungen werden benötigt, da die DGL 2. Ordnung im Ort ist.

2.5.3 Diskretisiere die partielle Differentialgleichungen in der Ortskoordinate unter Verwendung der der Finite-Volumen-Methode für ein mittleres Volumenelement. Benenne die für die Diskretisierung der einzelnen Terme notwendigen Annahmen und Rechenregeln. Verwende ein äquidistantes Gitter und fertige eine beschriftete Skizze an. (5 P)

Antw.: Die Diskretisierung des räumlichen Gebietes in finite Kontrollvolumen erfolgt analog zu der gegebenen Skizze.



Die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - v\frac{\partial c}{\partial z} - r(c)$$

über ein beliebiges inneres Kontrollvolumen [z_i, z_{i+1}] liefert folgende Gleichung.

$$\underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}z}_{\text{Term 1}} = \underbrace{D\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\mathrm{d}z}_{\text{Term 2}} - \underbrace{v\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial c}{\partial z}\mathrm{d}z}_{\text{Term 3}} - \underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} r(c)\mathrm{d}z}_{\text{Term 4}}$$

Beachte, dass der Diffusionskoeffizient und die Schwerpunktsgeschwindigkeit unabhängig von Ort und Zeit sind. Wir werten nun die Integrale (Term 1 bis 4) für ein inneres Kontrollvolumen aus. Es gelten folgende Abkürzungen:

1. Integration und Differentiation können vertauscht werden, da die Integration über ein ortsfestes Intervall [z_i, z_{i+1}] ausgeführt wird (folgt aus Leibniz Regel).
2. Profilannahme: $c(z,t)$ ist konstant im Intervall [z_i, z_{i+1}] und hat den Wert $c_i(t)$.
3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
4. Upwind Schema, d.h. $c(t)\big|_{z_i} = c_{i-1}(t)$.
5. Profilannahme für inneres Kontrollvolumen: $c(z,t)$ ist stückweise linear im Intervall [$z_{m,i}$, $z_{m,i+1}$].
6. Äquidistantes Gitter: $\Delta z_i = \delta z_i = \Delta z = const$.

Auswertung Term 1:

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}z \overset{1.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{z_i}^{z_{i+1}} c\,\mathrm{d}z \overset{2.}{=} \frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}\Delta z_i \overset{6.}{=} \frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}\Delta z$$

Auswertung Term 2:

$$D\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\,\mathrm{d}z \overset{3.}{=} D\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_i}^{z_{i+1}} = D\left(\frac{\partial c}{\partial z}\bigg|_{z_{i+1}} - \frac{\partial c}{\partial z}\bigg|_{z_i}\right) \overset{5.}{=} D\frac{c_{i+1}-c_i}{\delta z_i} - \frac{c_i - c_{i-1}}{\delta z_{i-1}} \overset{6.}{=} D\frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{\Delta z}$$

Auswertung Term 3:

$$v\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial c}{\partial z}\mathrm{d}z \overset{3.}{=} v[c]_{z_i}^{z_{i+1}} = v\left(c\big|_{z_{i+1}} - c\big|_{z_i}\right) \overset{2.+4.}{=} v\left(c_i - c_{i-1}\right)$$

Auswertung Term 4:

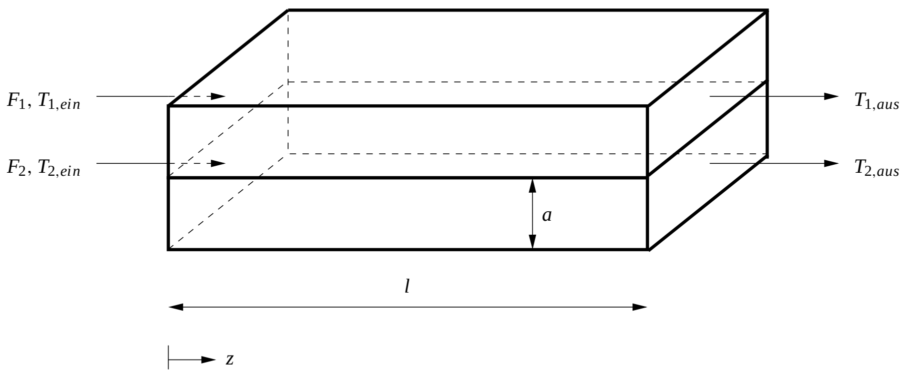
$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} r(c)\,\mathrm{d}z \overset{2.}{=} r(c_i)\int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathrm{d}z = r(c_i)\Delta z_i \overset{6.}{=} r(c_i)\Delta z$$

Durch Zusammenfassen der einzelnen Terme und Division durch Δz erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für ein beliebiges, mittleres Kontrollvolumen.

$$\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t} = D\frac{c_{i+1}-2c_i+c_{i-1}}{\Delta z^2} + v\frac{c_{i-1}-c_i}{\Delta z} - r(c_i) \quad .$$

3. Aufgabe – Wärmübertrager (11,5 P)

Es sollen die Temperaturfelder $T_1(z,t)$, $T_2(z,t)$ eines Gleichstromwärmeübertragers bestimmt werden (siehe Skizze). Es kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass (a) die Strömungsgeschwindigkeiten der beiden Fluide konstant sind, (b) der Druck konstant ist, (c) Wärmeleitung in den Fluiden vernachlässigt werden kann, (d) die Wärmeübertragerwand sehr dünn ist (kann damit als speicherlos betrachtet werden) und (e) der Apparat keine Energie an die Umgebung verliert.



3.1 Gehe zunächst von der Enthalpiebilanz für Fluid 1 aus (substantielle Formulierung, örtlich 1-dimensional). Benenne die Bedeutung der einzelnen Terme und streiche diejenigen, die im vorliegenden Fall vernachlässigt werden können (mit Begründung). (3 P)

Antw.:

- Ausgangspunkt ist die Enthalpiebilanz in substantieller Formulierung:

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial q_k'}{\partial z_k}+\sum_\alpha f_{k,\alpha}j_{k,\alpha}-\pi_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial z_k} \quad .$$

- 1. Term linke Seite: Akkumulation von *h*
- 2. Term linke Seite: berücksichtigt Druckänderung; hier: $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0$ wegen Annahme (b)
- 1. Term rechte Seite: ein und ausgetragener Wärmestrom, der sich in einen stofftransportgebunden Wärmestrom und einen solchen, der nicht mit einem Stofftransport einhergeht, unterteilt:

$$q_k'=q_k+\sum_\alpha j_{k,\alpha}h_\alpha$$

wegen Annahme (c) ist $q_k = 0$, da es sich bei den beiden Fluiden jeweils um Einkomponentensysteme handelt ist auch $j_{k,\alpha} = 0$

- 2. Term rechte Seite: Arbeit der Volumenkräfte $f_{k,\alpha}$; hier: 0 wegen $j_{k,\alpha} = 0$
- 3. Term rechte Seite: Arbeit der Oberflächenkräfte (Reibung); hier: 0 wegen Annahme (a)
- Für 1-D Betrachtung bleibt schließlich

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0} \quad .$$

3.2 Überführe die so erhaltene Bilanzgleichung in die Temperaturform. Setze hierzu das totale Differential für *h* ein und streiche zu vernachlässigende Terme (mit Begründung). Überführe die Gleichung abschließend in die lokale Formulierung. Kommentiere sämtliche Umformungsschritte, sodass sie nachvollziehbar sind! (3 P)

Antw.:

- Die spezifische Enthalpie lässt sich als Funktion $h(T,p,w_\alpha)$ darstellen. Das totale Differential lautet:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{T,w_\alpha = const.} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \sum_\alpha h_\alpha \frac{\mathrm{d}w_\alpha}{\mathrm{d}t} \quad .$$

- Wegen Annahme (b) ist $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0$. Da es sich bei den beiden Fluiden jeweils um Einkomponentensysteme handelt, verschwindet auch der letzte Term. Es bleibt:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \quad .$$

- Eingesetzt in das Ergebnis aus 2.4.1 folgt

$$\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 \quad .$$

- Anwenden der Operatorgleichung aus 2.2 führt schließlich auf die gesuchte Beziehung:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p v \frac{\partial T}{\partial z}} \quad .$$

3.3 Formuliere in Analogie zu den obigen Betrachtungen die Differentialgleichung für das Temperaturfeld von Fluid 2. Ergänze vorzeichenrichtig in beiden Differentialgleichungen den Term zur Beschreibung des ausgetauschten Wärmestroms (dieser folgt bei „sauberer“ Herleitung aus dem 3-dimensionalen Problem und muss hier nachträglich ergänzt werden):

$$\frac{1}{a} \frac{q_a}{(\rho c_p)_{Fluid}} \quad \text{mit} \quad q_a = k(T_2 - T_1) \quad .$$

Wichtiger Hinweis: die linke Seite der Differentialgleichungen muss hierzu in die Form $\partial T/\partial t$ gebracht werden. Nur dann passen die Einheiten zusammen.

Gib beide Gleichungen zusammenfassend an. (1,5 P)

Antw.:

- Mit Hilfe eines Gedankenexperimentes lässt sich jeweils das entsprechende Vorzeichen bestimmen. Falls beispielsweise $T_2 > T_1$ muss T_2 abnehmen und T_1 zunehmen. Laut obiger Definition ist q_a in diesem Fall positiv und muss deshalb in die Differentialgleichung für T_1 mit positiven Vorzeichen und in die Gleichung für T_2 mit negativen Vorzeichen eingehen:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t} &= -v_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{q_a}{(\rho c_p)_1} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= -v_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{1}{a} \frac{q_a}{(\rho c_p)_2}\end{aligned}}\ .$$

3.4 Wie viele Anfangs- und Randbedingungen sind zur Bestimmung der Temperaturfelder nötig? Schlage geeignete Anfangs- und Randbedingungen vor. (2,5 P)

Antw.:

- Die beiden Differentialgleichungen sind 1. Ordnung bezüglich der Zeit. Deshalb ist jeweils eine Anfangsbedingung nötig, z.B. $T_1(z,t=0) = T_{1,\text{start}}(z)$, $T_2(z,t=0) = T_{2,\text{start}}(z)$.
- Die beiden Differentialgleichungen sind 1. Ordnung bezüglich des Ortes. Deshalb ist jeweils eine Randbedingung nötig, z.B. $T_1(z=0,t) = T_{1,\text{ein}}(t)$, $T_2(z=0,t) = T_{2,\text{ein}}(t)$.

3.5 Triff eine begründete Aussage zur Linearität des hergeleiteten Gleichungssatzes. (1,5 P)

Antw.:

- Term auf der linken Seite: linear, weil die Ableitung ein linearer Operator ist.
- 1. Term auf der rechten Seite: linear, weil v konstant und die Ableitung ein linearer Operator ist.
- 2. Term auf der rechten Seite: linear, weil a, ρ sowie c_p konstant sind und q_a eine lineare Funktion ist (falls $c_p = c_p(T)$ wäre dieser Term nichtlinear).
- Beide Gleichungen sind damit linear.